ახალგაზრდა მეცნიერთა საერთაშორისო კონფერენცია „დედამიწის შემსწავლელი მეცნიერების თანამედროვე პრობლემები“
შრომები, **ISBN 978-9941-36-044-2**, თბილისი, საქართველო, 21-22 ნოემბერი, 2022 წ.
International Conference of Young Scientists "Modern Problems of Earth Sciences"
Proceedings, ISBN 978-9941-36-044-2, Tbilisi, Georgia, November 21-22, 2022

სისტემის სანდოობის შეფასების ამოცანა მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებით

არაბაშვილი ნ.
გორის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანოტაცია. *ნაშრომში განხილული მონტე-კარლოს მეთოდი - ეს არის რიცხობრივი მეთოდი შემთხვევით სიდიდეების მოდელირებისათვის, რომლითაც საკვლევი პროცესის რეალურთან მაქსიმალურად მიახლოებული სცენარის წინასწარი მოდელირებაა შესაძლებელი. ქვემოთ განხილული ნაშრომი არამარტო მათემატიკური ამოცანების გადაწყვეტისას არამედ დედამიწის შემსწავლელი მეცნიერების თანამედროვე აპარატურის პრობლემების (კალიბრაციის საკითხები) აღმოჩენისთვისაა რეკომენდირებული.*
საკვანძო სიტყვები: *შემთხვევითი პროცესები, მოდელირება*

ზოგადად, მონტე-კარლოს მეთოდით დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის გათამაშება გულისხმობს შემდეგს: a სიდიდის მნიშვნელობის საპოვნელად ავარჩიოთ ისეთი X შემთხვევითი სიდიდე, რომლის მათემატიკური ლოდინი

$$a: M(X) = a \qquad (1)$$

პრაქტიკულად, ვმოქმედებთ შემდეგნაირად: ვითვლით (გავათამაშებთ) n შესაძლო x_i მნიშვნელობებს X შემთხვევითი სიდიდიდან, ამასთან ვპოულობთ მათ საშუალო მნიშვნელობას

$$\bar{x} = (\sum_i x_i)/n \qquad (2)$$

$\bar{x}$ რანგში ვიღებთ შეფასებას (მიახლოებით მნიშვნელობას) a^* და საძიებელი a-სთვის გვაქვს:

$$a \simeq a^* = \bar{x} \qquad (3)$$

ამრიგად, მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებისას უნდა შევძლოთ გავათამაშოთ შემთხვევითი სიდიდე.

შემოვიტანოთ (0, 1) ინტერვალზე R თანაბრად განაწილებული უწყვეტი შემთხვევით სიდიდე და r_j $(j = 1,2 \ldots)$ არის შესაძლო სიდიდეები R-დან.

წესი: იმისათვის, რომ გავათამაშოთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, რომლის განაწილების წესია (4)

$$\begin{matrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{matrix} \qquad (4)$$

საჭიროა: 1. (0,1) დავხლიჩოთ ინტერვალებად: $\Delta_1 - (0; p_1),\ \Delta_2 - (p_1; p_1 + p_2), \ldots, \Delta_n - (p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}; 1)$; 2. შევარჩიოთ (ვთქვათ, თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების სპეციალური ცხრილიდან) შემთხვევითი რიცხვები r_j.

თუ r_j ჩავარდა Δ_i ინტერვალში, მაშინ გათამაშდა მნიშვნელობა x_i [1-3].

მაგალითი: გავათამაშოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის ექვსი შესაძლო მნიშვნელობა, რომლის განაწილების კანონი არის შემდეგი ცხრილის სახით:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

ამოხსნა. (0,1) ინტერვალი დავხლიჩოთ შემდეგ ინტერვალებად შემდეგ წერტილებში 0,22; $0,22 + 0,17 = 0,39$ და მივიღებთ ინტრვალებს $\Delta_1 - (0; 0,22), \Delta_2 - (0,22; 0,39), \Delta_3 - (0; 39,1)$.
2. ამოვწეროთ თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვების სპეციალური ცხრილიდან 6 რიცხვი, მაგალითად 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87.

შემთხვევითი რიცხვი $r_1 = 0{,}32$ მიეკუთვნება ინტერვალს Δ_2, ამიტომ, გათამაშდა დისკრეტული შემთხვევით სიდიდე $x_2 = 10$; შემთხვევითი სიდიდე $r_2 = 0{,}17$ ეკუთვნის Δ_1-ს, გათამაშებული შემთხვევით სიდიდე იქნება $x_1 = 2$. ანალოგიურად ექვსივესთვის ვიპოვით გათამაშების მნიშვნელობებს და საბოლოოდ მივიღებთ შესაძლო გათამაშების შედეგებს: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

სისტემის სანდოობის შემოწმება მონტე-კარლოს მეთოდით

ვთქვათ, სისტემა შედგება ორი ბლოკისგან, რომლებიც ჩართულები არიან მიმდევრობით. სისტემა აჩერებს მუშაობს მაშინ, როცა ჩერდება მაშინაც კი, როცა ერთ-ერთ ბლოკი ჩერდება. პირველი ბლოკი შეიცავს ორ ელემენტს: A, B (ისინი დაერთებულია პარალელურად) და პირველი ბლოკი ჩერდება თუ A, B ჩერდება ორივე ერთდროულად. მეორე ბლოკი შეიცავს ერთ ელემენტს - C-ს და ჩერდება მაშინ როცა ეს ელემენტი ჩერდება.

ამოვხსნათ ორი ამოცანა:

ა) ვიპოვოთ მონტე-კარლოს მეთოდით სისტემის უწყვეტი მუშაობის ალბათობის P^*-ის შეფასება, თუ ცნობილია ელემენტების უწყვეტად მუშაობის ალბათობები: $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}85$, $P(C) = 0{,}6$;

ბ) მოვიყვანოთ $|P - P^*|$ -ს აბსოლუტური ცდომილების ანალიტიკური გამოთვლა, სადაც P-არის სისტემის სანდოობის ალბათობა. ჩავატაროთ 50 ცდა.

ამოხსნა. ა) ზემოხსენებული თანაბრად განაწილებული შემთხვევით რიცხვების ცხრილიდან ავირჩიოთ (პირველი ცდა): 0,10, 0,09 и 0,73 ; მონტე-კარლოს მეთოდში არსებობს ასეთი წესი: თუ შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია ალბათობაზე , მაშინ ეს ხდომილება შედგა, ხოლო თუ შემთხვევითი სიდიდე მეტია ან ტოლია ხდომილების ალბათობის, მაშინ ეს ხდომილება არ შედგა. გავათამაშოთ ხდომილებები A, B, C, ცდის შედეგები წარმოვადგინეთ ცხრილი 1-ის სახით:

ვინაიდან , $P(A) = 0{,}8$ და $0{,}10 < 0{,}8$, მაშინ A ხდომილება შედგა ე.ი A ელემენტი უწყვეტად მუშაობს ამ ცდის დროს. ასევე, ვინაიდან $P(B) = 0{,}85$ и $0{,}09 < 0{,}85$, მაშინ ხდომილება B შედგა, მაშასადამე B ელემენტიც მუშაობს.

გამოდის, რომ პირველი ბლოკის ორივე ელემენტი მუშაობს ამ გათამაშების მიხედვით;

ცხრილი 1

ცდის N	ბლოკი	ელემენტის მოდელირების შემთხვევით სიდიდე			დასკვნითი ნაწილი				
					შედეგი ელემენტებისთვის			ბლოკის შედეგი	შედეგი სისტემისთვის
		A	B	C	A	B	C		
1	პირველი მეორე	0,10	0,09	0,73	"+"	"+"	"-"	"+" "-"	"-"
2	პირველი მეორე	0,25	0,33	0,76	"+"	"+"	"-"	"+" "-"	"-"
3	პირველი მეორე	0,52	0,01	0,35	"+"	"+"	"+"	"+" "+"	"+"
4	პირველი მეორე	0,86	0,34	0,67	"-"	"+"	"-"	"+" "-"	"-"

ვინაიდან $P(C) = 0{,}6$ и $0{,}73 > 0{,}6$, გამოდის რომ ხდომილება C არ დადგა, ე.ი. ელემენტი C არ მუშაობს ამ გათამაშების დროს; სხვა სიტყვებით, მეორე ბლოკი არ მუშაობს. რაც იმას ნიშნავს რომ მთლიანი სისტემა არ მუშაობს.

ცხრილ 1-ში მოყვანილია, მხოლოდ 4 გათამაშების შედეგი.

ანალოგიურად ჩავატაროთ კიდევ 49 ექსპერიმენტი და ავირჩიოთ შემთხვევითი სიდიდეების სპეციალური ცხრილიდან შემთხვევით მნიშვნელობები.

საბოლოოდ ჩავატარეთ 50 ცდა. მივიღეთ, რომ 50-დან 28 შემთხვევაში სისტემა მუშაობდა გამართულად (შეფერხებების გარეშე). სისტემის სანდოობის P საძიებო ალბათობის რანგში შეგვიძლია მივიღოთ ფარდობით სიხშირე $P^* = 28/50 = 0,56$.

ბ) ვიპოვოთ სისტემის მუშაობის სანდოობის P ალბათობა ანალიზურად. პირველი და მეორე ბლოკის უწყვეტი მუშაობის ალბათობა შესაბამისად არის:

$P_1 = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0,2 \cdot 0,15 = 0,97,\ P_2 = P(C) = 0,6.$

ხოლო, აქედან გამომდინარე მთელი სისტემის უწყვეტი მუშაობის ალბათობა იქნება:

$P = P_1 \cdot P_2 = 0,97 \cdot 0,6 = 0,582.$

საძიებელი ალბათობის აბსოლუტური ცდომილება $|P - P^*| = 0,582 - 0,56 = 0,022$.

დასკვნა

წარმოდგენილ ექსპერიმენტში გამოიკვეთა, რომ მონტე-კარლოს მეთოდით შეფასებული რისკის ალბათობა სისტემის გამართული მუშაობის შესახებ და ანალიტიკურად გამოთვლილი ალბათობა საკმაოდ ახლოს არიან. თუ ექსპერიმენტების რიცხვს გავზრდით ცხადია ეს აბსოლუტური ცდომილება კიდევ უფრო შემცირდება. ხშირად მონტე-კარლოს მეთოდი პრაქტიკაში უფრო მოხერხებულია და გვაძლევს სურათს შესაძლო მოვლენათა განვითარების შესახებ. ზოგადად მონტე-კარლოს მეთოდი ითვლება ერთ-ერთ საუკეთესო მეთოდად სხვადასხვა პროცესების წინასწარი მოდელირების ამოცანებში.

ლიტერატურა

1. Tarantola, Albert (2005). Inverse Problem Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 978-0-89871-572-9.
2. Vose, David (2008). Risk Analysis, A Quantitative Guide (3rd ed.). John Wiley & Sons. ISBN 9780470512845.
3. Mazhdrakov, Metodi; Benov, Dobriyan; Valkanov, Nikolai (2018). The Monte Carlo Method. Engineering Applications. ACMO Academic Press. ISBN 978-619-90684-3-4.

SYSTEM RELIABILITY ASSESSMENT TASK USING MONTE CARLO METHOD

Arabashvili N.

Gori State University, Gori, Georgia

Abstract. *The probability of the risk estimated by the Monte-Carlo method about the correct operation of the system and the analytically calculated probability are quite close. It is established that the Monte-Carlo method is one of the best methods in the tasks of preliminary modeling of various processes.*

Keywords: *random processes, modeling*