სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის საქართველოს ფილიალის მოამბე, ტ. I № 1, 1940
СООБЩЕНИЯ ГРУЗИНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР, Т. I № 1, 1940
MITTEILUNGEN d. GEORGISCHEN ABTEILUNG d. AKADEMIE d. WISS. d. USSR, Bd. I Nr 1, 1940

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. I

В настоящее время в литературе имеется несколько способов, довольно хорошо разработанных, для решения граничных задач, связанных с линейными эллиптическими диференциальными уравнениями. Среди этих способов метод интегральных уравнений является одним из наиболее распространенных. Систематическое применение и развитие последний метод получил, главным образом, в работах D. Hilbert'a [1], E.-E. Levi [2], L. Lichtenstein'a [3] и M. Gevrey [4] по теории граничных задач линейных эллиптических диференциальных уравнений. Этими авторами дано исчерпывающее теоретическое исследование почти всех основных видов граничных задач, особенно в случае линейных эллиптических диференциальных уравнений второго порядка, при довольно общих предположениях относительно коэфициентов уравнения и границы рассматриваемой области. Названные авторы, для построения интегральных уравнений, отвечающих той или иной граничной задаче, пользуются обыкновенно или функцией Грина, соответствующей граничной задачи уравнения Лапласа (Lichtenstein) или же— определенными сингулярными функциями, удовлетворяющими некоторым граничным условиям (Gevrey); при этом, во всех случаях, в полученных интегральных уравнениях интегралы берутся по *области* рассматриваемой задачи.

В настоящей работе мы предлагаем новый способ построения интегральных уравнений, отвечающих граничным задачам линейных эллиптических диференциальных уравнений с двумя независимыми переменными; причем в полученных нами интегральных уравнениях интегрирование происходит по *контуру* данной области.

Мы начнем с рассмотрения уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=f, \tag{E}$$

где a, b, c и f—целые функции переменных x и y. В следующих статьях мы покажем, каким образом перейти к диференциальным уравнениям с произвольными коэфициентами.

Всякую функцию, непрерывную вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяющую уравнению (E), мы будем называть *регулярным решением* этого уравнения.

É. Picard'у принадлежит следующая важная теорема: *всякое регулярное решение линейного эллиптического диференциального уравнения с аналитическими коэфициентами есть аналитическая функция.*

Ранее ([5], [6]) нами была найдена общая форма представления всех решений уравнения (E) при помощи аналитических фукций одной комплексной переменной. Чтобы облегчить понимание настоящей работы, мы дасм здесь заново краткий вывод этого общего представления.

На основании теоремы É. Picard'a переменные x и y в уравнении (E) могут принимать произвольные комплексные значения. Поэтому, введя новые переменные

$$z=x+iy, \quad z'=x-iy,$$

можем переписать уравнение (E) в виде

$$u_{zz'}+Au_z+A'u_{z'}+Bu=F(z, z'), \tag{E'}$$

где A, A', B и F—целые функции переменных z и z'.

Это уравнение, как нетрудно видеть, эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} u(z, z') + \int_{z_0}^{z} A'(z_1, z')\, u(z_1, z')\, dz_1 + \int_{z'_0}^{z'} A(z, z'_1)\, u(z, z'_1)\, dz'_1 + \\ \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} C(z_1, z'_1)\, u(z_1, z'_1)\, dz_1' = \varphi(z)+\psi(z') + \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} F(z_1, z'_1)\, dz'_1 \equiv \Phi(z, z'), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$C(z, z') = B(z, z') - A_{z'}(z, z') - A'_{z'_1}(z, z'),$$

$\varphi(z)$ и $\psi(z')$ — произвольные аналитические функции, а $z_0=x_0+iy_0$, $z'_0=x_0-iy_0$—произвольно фиксированные точки.

Простыми преобразованиями последнее уравнение приводится к виду

$$u(z, z') - \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} K(z, z';\ z_1, z'_1)\, u(z_1, z'_1)\, dz'_1 = \Psi(z, z'), \tag{2}$$

где

$$K(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1)=C(\zeta_1,\zeta'_1)\left\{1-\exp\left[\int_{\zeta}^{\zeta_1}A'(\tau,\zeta')\,d\tau\right]-\exp\left[\int_{\zeta'}^{\zeta'_1}A(\zeta,\tau')\,d\tau'\right]\right\}+$$

$$A(\zeta,\zeta'_1)\,A'(\zeta_1,\zeta'_1)\exp\left[\int_{\zeta'}^{\zeta'_1}A(\zeta,\tau')\,d\tau'\right]+A(\zeta_1,\zeta'_1)\,A'(\zeta_1,\zeta')\exp\left[\int_{\zeta}^{\zeta_1}A'(\tau,\zeta')\,d\tau\right], \tag{3}$$

$$\Psi(\zeta,\zeta')=\Phi(\zeta,\zeta')-\int_{\zeta_0}^{\zeta}\Phi(\zeta_1,\zeta')\,A'(\zeta_1,\zeta')\exp\left[\int_{\zeta}^{\zeta_1}A'(\tau,\zeta')\,d\tau\right]d\zeta_1-$$

$$-\int_{\zeta'_0}^{\zeta'}\Phi(\zeta,\zeta'_1)\,A(\zeta,\zeta'_1)\exp\left[\int_{\zeta'}^{\zeta'_1}A(\zeta,\tau')\,d\tau'\right]d\zeta'_1. \tag{4}$$

Решая уравнение (2) методом последовательных приближений, легко находим, что

$$u(\zeta,\zeta')=\Psi(\zeta,\zeta')+\int_{\zeta_0}^{\zeta}d\zeta_1\int_{\zeta'_0}^{\zeta'}H(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1)\,\Psi(\zeta_1,\zeta'_1)\,d\zeta'_1, \tag{5}$$

где

$$H(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1)=\sum_{m=0}^{\infty}K_m(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1),\quad K_0(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1)=K(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1),$$

$$K_m=\int_{\zeta_1}^{\zeta}d\tau\int_{\zeta'_1}^{\zeta'}K(\zeta,\zeta';\ \tau,\tau')K_{m-1}(\tau,\tau';\ \zeta_1,\zeta'_1)\,d\tau',\ (m=1,2,\ldots);$$

отсюда сразу видно, что H есть целая функция своих аргументов.

На основании (4), формула (5) принимает вид

$$u(\zeta,\zeta')=\alpha(\zeta,\zeta')\,\varphi(\zeta)+\alpha'(\zeta,\zeta')\,\psi(\zeta')+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\beta(\zeta,\zeta';\zeta_1)\,\varphi(\zeta_1)\,d\zeta_1$$

$$+\int_{\zeta'_0}^{\zeta'}\beta'(\zeta,\zeta';\ \zeta'_1)\,\psi(\zeta'_1)\,d\zeta'_1+\int_{\zeta_0}^{\zeta}d\zeta_1\int_{\zeta'_0}^{\zeta'}\gamma(\zeta,\zeta';\ \zeta_1,\zeta'_1)\,F(\zeta_1,\zeta'_1)\,d\zeta'_1, \tag{6}$$

где

$$\alpha(\zeta,\zeta')=\exp\left[-\int_{\zeta'_0}^{\zeta'}A(\zeta,\zeta'_1)\,d\zeta'_1\right],\quad \alpha'(\zeta,\zeta')=\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta}A'(\zeta_1,\zeta')\,d\zeta_1\right], \tag{7}$$

а β, β' и γ — определенные целые функции своих аргументов, выражающиеся исключительно при помощи коэфициентов уравнения (E).

Формула (6) дает нам искомое общее представление всех решений уравнения (E) при помощи двух произвольных аналитических функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta')$. Кратный интеграл в правой части формулы (6) представляет частное решение уравнения (E). Этот интеграл, очевидно, отпадает, если мы будем иметь однородное уравнение

$$u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0. \tag{E_0}$$

Если предположить, что функции a, b и c принимают вещественные значения при вещественных x и y и если искать только вещественные решения уравнения (E_0), то в формуле (6) функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta')$ должны быть взаимно сопряженными, когда переменные ζ и ζ' принимают взаимно сопряженные значения. Таким образом, все вещественные решения уравнения (E_0) представляются в виде

$$\begin{aligned} u(x,y)=\alpha(\zeta,\bar\zeta)\varphi(\zeta)+\bar\alpha(\zeta,\bar\zeta)\bar\varphi(\bar\zeta)&+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\beta(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)\varphi(\zeta_1)\,d\zeta_1\\ &+\int_{\bar\zeta_0}^{\bar\zeta}\bar\beta(\bar\zeta,\zeta;\bar\zeta_1)\bar\varphi(\bar\zeta_1)\,d\bar\zeta_1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция, а $\bar\varphi(\bar\zeta)$ — функция, сопряженная с ней. Как это вытекает из самого вывода формулы (8), правая часть ее обращается в нуль, если φ — любая мнимая постоянная.

Поэтому, все голоморфные функции $\varphi(\zeta)$, отличающиеся друг от друга лишь мнимой постоянной, дают одинаковые решения уравнения (E_0). Если же мы имеем какие-нибудь две голоморфные функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$, такие что $\varphi_1-\varphi_2\not\equiv$ мнимой постоянной, то этим функциям соответствуют два различных решения уравнения (E_0).

В работе [6] мы даем несколько приемов применения формулы (8) к решению граничных задач уравнения (E_0). В настоящей работе мы укажем еще один новый вариант использования формулы (8) для решения граничных задач.

Пусть T — конечная односвязная область, ограниченная простым замкнутым контуром S, имеющим в каждой точке ограниченную кривизну.

Начнем с рассмотрения следующей граничной задачи:

Найти в области T такое регулярное решение уравнения (E_0), *которое на контуре S обращается в заданную непрерывную функцию $g(s)$* (s—длина дуги кривой S).

Следуя установившейся в литературе традиции, эту задачу мы назовем первой граничной задачей уравнения (E_0).

Возьмем точку z_0 на контуре S и примем ее за начало отсчета дуги s. Обозначим через t точку S, соответствующую дуге s. Нетрудно увидеть, что наша граничная задача приводится к следующей граничной задаче теории функции комплексного переменного:

Найти в области T голоморфную функцию $\varphi(z)$, непрерывную в $T+S$ и удовлетворяющую на S функциональному уравнению

$$\alpha(t,\bar t)\varphi(t)+\bar\alpha(\bar t,t)\bar\varphi(\bar t)+\int_{z_0}^{z}\beta(t,\bar t;z_1)\varphi(z_1)\,dz_1 + \int_{\bar z_0}^{\bar z}\bar\beta(\bar t,t_1;\bar z_1)\bar\varphi(\bar z_1)\,d\bar z_1=g(s). \tag{9}$$

Докажем предварительно следующую лемму:

Если функция $\varphi(z)$ голоморфна в области T и непрерывна в $T+S$, причем граничные значения ее удовлетворяют условию Hölder'a, то, с точностью до аддитивной мнимой постоянной, в области T

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_S\frac{k(z_1)}{z_1-z}\,dz_1, \tag{10}$$

где $k(z_1)$—определенная вещественная непрерывная функция точки контура S, удовлетворяющая условию Hölder'a.

В самом деле, отделяя друг от друга вещественную и мнимую части интеграла (10), найдем, что $k(z_1)$ является плотностью потенциала двойного слоя, представляющего вещественную часть функции $\varphi(z)$. Заметив это, нетрудно доказать нашу лемму.

Так как в нашей граничной задаче искомая голоморфная функция $\varphi(z)$ может быть определена лишь с точностью до аддитивной мнимой постоянной, очевидно мы можем искать эту функцию в виде (10).

Согласно известным свойствам интегралов типа Коши, из (10) имеем

$$\varphi(t)=k(t)+\frac{1}{\pi i}\int_S\frac{k(z_1)}{z_1-t}\,dz_1,\quad \bar\varphi(\bar t)=k(t)-\frac{1}{\pi i}\int_S\frac{k(z_1)}{\bar z_1-\bar t}\,d\bar z_1, \tag{11}$$

где $\varphi(t)$—предельное значение функции $\varphi(z)$, когда z стремится изнутри области T к граничной точке t.

Внося эти выражения в уравнение (9) и производя некоторые выкладки, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$[\alpha(t,\bar{t})+\bar{\alpha}(\bar{t},t)]\,k(t)+\frac{[\alpha(t,\bar{t})-\alpha(\bar{t},t)]}{\pi i}\int\limits_S\frac{k(\zeta_1)}{\zeta_1-t}\,d\zeta_1+\int\limits_S P(t,\zeta_1)\,k(\zeta_1)\,d\zeta_1=g(t), \qquad (12)$$

где функция $P(t,\zeta_1)$ имеет вид

$$P(t,\zeta_1)=P_1(t,\zeta_1)\lg|t-\zeta_1|+P_2(t,\zeta_1);$$

причем $P_1(t,\zeta_1)$ и $P_2(t,\zeta_1)$ — непрерывные функции точек t и ζ_1 на контуре S.

На основании критерия, установленного С. Г. Михлиным [7], легко заключаем, что уравнение (12) эквивалентно регулярному интегральному уравнению Фредгольма.

В частности, если $\alpha=\bar{\alpha}$, то из уравнения (12) выпадает сингулярный член и мы получаем регулярное интегральное уравнение.

Как нетрудно видеть, это имеет место только тогда, когда в уравнении (E_0) $a\equiv b\equiv 0$.

Если предположить, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию Hölder'a, то легко заключим, что всякое решение уравнения (12) также удовлетворяет условию Hölder'a. Нетрудно также установить полную эквивалентность поставленной граничной задачи и интегрального уравнения (12).

Более подробное исследование этих вопросов будет дано в следующей статье.

Тбилисский Математический Институт
Грузинского Филиала АН СССР

(Поступило в редакцию 5.1.1940)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ZITIERTE LITERATUR

1. D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1912.
2. E.-E. Levi. Sulle equazioni lineari etc. Rendiconti di Palermo, t. 24, 1907, p. 275—317.
3. L. Lichtenstein. Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Leipzig—Berlin, 1924.
4. M. Gevrey. Determination et emploi fonctions de Green etc. Journ. de Math., tome IX, Fasc. I, 1930.
5. И. Н. Векуа. Об общем представлении решений диф. ур. и т. д. Доклады АН СССР, 1937, том XVII, № 6, стр. 291 - 295.
6. И. Н. Векуа. Комплексное представление решений эллиптических диф. ур-ний и т. д. Труды Тбилисского Математического Института, том VII, 1940.
7. С. Г. Михлин. Об одном классе синг. ур-ний. Доклады АН СССР, 1939, том XXIV № 4, стр. 315—317.