სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის საქართველოს ფილიალის მოამბე. ტ. I № 3, 1940
СООБЩЕНИЯ ГРУЗИНСКОГО ФИЛИАЛА АКАДЕМИИ НАУК СССР. Т. I № 3. 1940
MITTEILUNGEN d. GEORGISCHEN ABTEILUNG d. AKADEMIE d. WISS. d. USSR. Bd. I Nr 3. 1940

МАТЕМАТИКА

И. Н. ВЕКУА

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. II [1]

В первой части работы мы доказали, что первая граничная задача, связанная с уравнением вида

$$u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0, \tag{E$_0$}$$

на основании формулы (I, 8), дающей общее представление всех решений этого уравнения, приводится к сингулярному интегральному уравнению (I, 12).

Докажем, что последнее уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма.

Пусть $k(t)$ — решение уравнения (I, 12). Обозначим через $\varphi_i(t)$ и $\varphi_a(t)$ предельные значения интеграла (I, 10), когда $z \to t \subset S$ соответственно изнутри или извне области T. Для существования этих пределов достаточно, например, предположить, что функция $k(t)$ удовлетворяет условию Hölder'a и что контур S — гладкий.

На основании формул

$$k(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_i(t)-\varphi_a(t)\right],\quad \frac{1}{\pi i}\int\limits_S \frac{k(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{2}\left[\varphi_i(t)+\varphi_a(t)\right] \tag{1}$$

уравнение (I, 12) принимает вид

$$\alpha(t,\bar t)\,\varphi_i(t)=\bar\alpha(\bar t,t)\,\varphi_a(t)-\int\limits_S P(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau+g(t). \tag{2}$$

Но согласно (I, 7)

$$\alpha(t,\bar t)=e^{\omega(t)+i\chi(t)},\quad \bar\alpha(\bar t,t)=e^{\omega(t)-i\chi(t)}, \tag{3}$$

[1] Первую часть см. в «Сообщениях Груз. Фил. АН СССР», т. I, № 1, стр. 29—34. При ссылках на формулы первой части перед номером формулы мы ставим цифру I.

где $\omega(t)$ и $\chi(t)$ — однозначные и непрерывные действительные функции точки t кривой S.

В силу (3), уравнение (2) принимает вид

$$e^{i\chi(t)}\varphi_j(t)=e^{-i\chi(t)}\varphi_a(t)-e^{-\omega(t)}\int_S P(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau+g(t)\,e^{-\omega(t)}. \tag{4}$$

Предположим теперь, что

$$\varphi(z)=\Phi(z)\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_S\frac{\chi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right), \tag{5}$$

где $\Phi(z)$ обозначает голоморфную функцию внутри или вне S, смотря по тому, где находится z; при этом

$$\Phi(z)\to 0,\ \text{когда}\ z\to\infty.$$

Согласно свойствам интегралов типа Коши, из (5) вытекает, что

$$\varphi_j(t)=\Phi_j(t)e^{-i\chi(t)-h(t)}\ \text{ и }\ \varphi_a(t)=\Phi_a(t)\,e^{i\chi(t)-h(t)}, \tag{6}$$

где

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_S\frac{\chi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Подставляя выражения (6) в (4), будем иметь

$$\Phi_j(t)=\Phi_a(t)-e^{\varkappa(t)}\int_S P(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau+g(t)\,e^{\varkappa(t)},$$

где

$$\varkappa(t)=h(t)-\omega(t).$$

Отсюда сразу получаем, что

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{e^{\varkappa(\tau)}g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_S k(\tau)\,d\tau\int_S\frac{e^{\varkappa(\zeta)}P(\zeta,\tau)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{7}$$

где z лежит внутри или вне S.

Из (7) легко находим, что

$$\Phi_j(t)=\frac{1}{2}\,e^{\varkappa(t)}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{e^{\varkappa(\tau)}g(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int_S M_j(t,\tau)\,k(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

$$\Phi_a(t) = -\frac{1}{2} e^{\varkappa(t)} g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{e^{\varkappa(\tau)} g(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int\limits_S M_a(t,\tau) k(\tau) d\tau, \qquad (9)$$

где $M_j(t,\tau)$ и $M_a(t,\tau)$ обозначают пределы интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{e^{\varkappa(\zeta)} P(\zeta,\tau)}{\zeta - z} d\zeta,$$

при $z \to t \subset S$ соответственно изнутри или извне области T.

В силу (1), (6), (8) и (9) легко получаем, что $k(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма

$$k(t) - \int\limits_S K(t,\tau) k(\tau) d\sigma = g^*(t), \qquad (10)$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2}\left[M_j(t,\tau) e^{-i\chi(t)-h(t)} - M_a(t,\tau) e^{i\chi(t)-h(t)}\right]\frac{d\tau}{d\sigma}, \qquad (11)$$

$$g^*(t) = \frac{1}{2} e^{-\omega(t)} \cos\chi(t) g(t) - \frac{e^{-h(t)}}{2\pi}\sin\chi(t)\int\limits_S \frac{e^{\varkappa(\tau)} g(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad (12)$$

σ—дуга, соответствующая точке τ.

Таким образом доказано, что любое решение сингулярного уравнения (I, 12) удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма (10).

Докажем теперь, что, обратно, всякое решение уравнения (10) будет удовлетворять уравнению (I, 12). Пусть $k(t)$—решение уравнения (10). Это уравнение, как легко видеть, можно переписать в виде

$$\varphi_j(t) - \varphi_a(t) = \Phi_j(t) e^{-i\chi(t)-h(t)} - \Phi_a(t) e^{i\chi(t)-h(t)}.$$

Отсюда легко находим, что

$$\varphi_j(t) = \Phi_j(t) e^{-i\chi(t)-h(t)}$$

и

$$\varphi_a(t) = \Phi_a(t) e^{+i\chi(t)-h(t)}.$$

Из этих формул сразу вытекает соотношение (4), которое, как легко видеть, равносильно уравнению (I, 12).

Таким образом, *интегральные уравнения* (I, 12) и (10) *эквивалентны между собою.*

Выше мы часто пользовались допущением, что функция $k(t)$ удовлетворяет условию Hölder'a. Можно показать, что это всегда имеет место, если функция $g(t)$ удовлетворяет условию Hölder'a.

В самом деле, согласно (12) легко видеть, что $g^*(t)$ будет удовлетворять условию Hölder'a, если таковому удовлетворяет функция $g(t)$. Далее, легко доказывается, что всякое решение уравнения (10) и, следовательно, уравнения (I, 12) удовлетворяет условию Hölder'a.

Докажем теперь, что наша граничная задача эквивалентна интегральному уравнению (10).

В самом деле, если рассматриваемая граничная задача имеет решение, то, как это видно из предыдущих рассуждений, интегральное уравнение (10) всегда имеет решение. Обратно, если функция $k(t)$ есть решение уравнения (10), то она будет вместе с тем, как было доказано, решением уравнения (I, 12). Если составим теперь голоморфную функцию $\varphi(z)$ при помощи интеграла (I, 10), то, в силу формулы (I, 8), получим функцию $u(x, y)$, решающую нашу граничную задачу.

Из полученных выше результатов легко вытекает следующая теорема: *либо рассматриваемая неоднородная граничная задача всегда имеет решение при любой функции* $g(t)$, *либо соответствующая однородная граничная задача* $[g(t)\equiv 0]$ *имеет конечное число линейно независимых решений:* $u_1, u_2, \ldots, u_n$; *в последнем случае неоднородная граничная задача имеет решение тогда и только тогда, когда функция* $g^*(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\int_S \rho_j(t)\, g^*(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где $\rho_j(t)$*—полная система линейно независимых решений уравнения*

$$\rho(t) - \int_S K(\tau, t)\, \rho(\tau)\, d\sigma = 0;$$

при этом решение неоднородной граничной задачи определяется с точностью до аддитивной слагаемой вида

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n,$$

где $C_1, \ldots, C_n$*—произвольные постоянные.*

В частности, из этой теоремы вытекает важное следствие: *Первая граничная задача, связанная с уравнением* (E_0), *всегда имеет решение, если для этой задачи доказана теорема единственности.*

Предположения, сделанные выше относительно контура S и функции $g(t)$, можно намного смягчить без изменения результата. Например, достаточно предположить, что контур S состоит из конечного числа гладких дуг, имеющих ограниченную кривизну, точки соединения которых не являются точками возврата. Относительно функции $g(t)$ достаточно предположить только непрерывность. При этих условиях, как это можно вывести из исследований Л. Г. Магнарадзе [1], сохраняют силу все полученные выше результаты.

Грузинский Филиал АН СССР
Тбилисский Математический Институт

(Поступило в редакцию 16.2.1940)

MATHEMATIK

RANDWERTAUFGABEN IN DER THEORIE DER LINEAREN ELLIPTISCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT ZWEI UNABHÄNGIGEN VERÄNDERLICHEN. II

Von I. VECOUA

Zusammenfassung [1]

Wir geben ein neues Verfahren zur Lösung der Randwertaufgaben bei einer elliptischen Differentialgleichung der Gestalt

$$u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=f, \tag{E}$$

worin a, b, c und f ganze Funktionen der Veränderlichen x und y sind.

Zunächst beweisen wir:

Alle Lösungen dieser Gleichung sind in der Form

$$u=R\left\{\alpha(z,\bar z)\varphi(z)+\int_{z_0}^{z}\beta(z,\bar z;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right\}$$

$$+\int_{z_0}^{z}dz_1\int_{\bar z_0}^{\bar z}\gamma(z,\bar z;z_1,\bar z_1)f\left(\frac{z_1+\bar z_1}{2},\ \frac{z_1-\bar z_1}{2i}\right)d\bar z_1 \tag{1}$$

darstellbar, worin R den Realteil bedeutet, $\varphi(z)$ eine willkürliche analytische Funktion der Veränderlichen $z=x+iy$ ist, α, β und γ ganze Funktionen ihrer Argumente bezeichnen und mit Hilfe der Koeffizienten der Gleichung (E) ausgedrückt werden, z_0 ein fester Punkt ist.

[1] Diese Zusammenfassung bezieht sich auch auf den vorhergehenden ersten Teil der Arbeit. (Diese «Mitteilungen» Bd. I, Nr 1, 1940, S. 29—34).

Weiterhin wird Formel (1) zur Lösung der folgenden Randwertaufgabe benutzt: Es sei T ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, das durch eine geschlossene einfache Kurve S mit beschränkter Krümmung begrenzt wird. Ferner sei $g(t)$ eine vorgegebene stetige reelle Funktion des Punktes t auf der Randkurve S. Dann soll in T eine solche reguläre Lösung der Gleichung (E) bestimmt werden, die auf der Kurve S die stetigen Randwerte $g(t)$ annimmt.

Da die in (1) auftretende Funktion $\varphi(z)$, bei vorgegebener Lösung der Gleichung (1), nur bis auf eine additive imaginäre Konstante bestimmt ist, so kann

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{k(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{2}$$

gesetzt werden, wobei $k(t)$ eine reelle Funktion ist. Setzt man (2) in (1) ein und lässt $z \to t \subset S$ innerhalb T rücken, so bekommt man beim Grenzübergang die singuläre Integralgleichung

$$(\alpha + \bar{\alpha}) k(t) + \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\pi i} \int_S \frac{k(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_S P(t, \tau) k(\tau) d\tau = g(t), \tag{3}$$

in der $P(t, \tau)$ eine Funktion bedeutet, die lediglich logarithmische Singularitäten besitzt.

Sodann wird bewiesen, dass diese Gleichung einer Fredholmschen Integralgleichung äquivalent ist. Mit Hilfe dieser Integralgleichung kann die gestellte Randwertaufgabe vollkommen gelöst werden.

Georgische Abteilung
d. Akad. d. Wiss. d. USSR
Mathematisches Institut
Tbilissi

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—ZITIERTE LITERATUR

1. Д. Г. Магнарадзе. Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Труды Тбилисского Математического Института, т. IV, 1938, стр. 41—74.