ᲗᲑᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲣᲠᲘ ᲘᲜᲡᲢᲘᲢᲣᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, Ტ. X, 1941
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. X, 1941
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. X, 1941

ИЛЬЯ ВЕКУА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЫМ ЯДРОМ ТИПА КОШИ

В заметке [1] я предложил новый способ исследования сингулярных интегральных уравнений, основанный на теории аналитических функций одной комплексной переменной. Этот способ является дальнейшим развитием идеи Карльмана [2] и существенным образом опирается на формулы Ф. Д. Гахова [3], дающие в явном виде для односвязной области решение задачи Римана—Гильберта [4].

Б. В. Хведелидзе перенес результаты моей работы [1] на тот случай, когда областью интегрирования является граница многосвязной области [5] [1].

В работе [6] я доказал также некоторые основные теоремы теории сингулярных интегральных уравнений, в том числе все теоремы Ф. Нетера [7], доказанные им раньше другим путем только для вещественных уравнений с ядрами, имеющими особенность вида [2]

$$\operatorname{cotg} \frac{s-\sigma}{2}.$$

Целью настоящей работы является, объединив результаты работ [1], [5] и [6], дать на основе нового метода систематическое изложение теории сингулярных уравнений с интегралами в смысле главного значения по Коши.

§ 1. Постановка задачи и вспомогательные предложения

1. Целью этой работы является исследование сингулярного интегрального уравнения вида

$$A\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x) - \int\limits_L \frac{k(x,\,t)}{t-x}\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{A}$$

где L—граница многосвязной области T, ограниченной конечным числом простых контуров $L_0, L_1, \ldots, L_m$, $m \geqq 0$, не имеющих общих точек; при этом

[1] В [1] мною изучен тот случай, когда интеграл берется лишь по простому замкнутому контуру.

[2] Теоремы Нетера для комплексных уравнений с интегралами типа Коши, следуя в основном методу Нетера, чрезвычайно просто доказал недавно В. Д. Купрадзе [8].

контур L_0 содержит внутри себя все остальные. В частности, при $m>0$ L_0 может вовсе отсутствовать. x, t—комплексные координаты точек L. $\alpha(x)$, $k(x, t)$, $f(x)$—заданные, вообще говоря, комплексные функции точек L, $\varphi(x)$—искомая функция. Интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши. Положительным направлением на каждом контуре L_j мы будем считать то направление, которое область T оставляет слева.

Уравнение

$$A'\psi \equiv \alpha(x)\,\psi(x)+\int\limits_L \frac{k(t,\ x)}{t-x}\,\psi(t)=f(x)$$

назовем *союзным* с (A).

Рассмотрим также уравнение

$$B\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x)-\beta(x)\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt=f(x),$$

где $\beta(x)=k(x,\ x)$, которое будем называть *характеристическим* для (A).

2. Если существуют такие положительные постоянные M и λ, $0<\lambda\leqq 1$, что

$$|f(x')-f(x'')|\leqq M|x'-x''|^{\lambda}, \tag{1}$$

для любых двух точек $x', x''\in L$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Hölder'a. Такие функции во всем дальнейшем будем называть H-функциями. Постоянную λ будем называть показателем Hölder'a для функции $f(x)$. Если хотим подчеркнуть, что H-функция $f(x)$ имеет показатель Hölder'a λ, то будем писать $f(x)\in H_\lambda$.

Для функции двух аргументов $F(x,\ t)$ условие Hölder'a имеет вид

$$|F(x',\ t')-F(x'',\ t'')|\leqq M\{|x'-x''|^{\lambda}+|t'-t''|^{\lambda}\}, \tag{1'}$$

где M и λ—положительные постоянные, $0<\lambda\leqq 1$, x', x'', t', t''—любые точки на L. Функции, удовлетворяющие (1'), также будем называть H-функциями, а постоянную λ—показателем Hölder'a для этой функции.

Во всем дальнейшем относительно функций $\alpha(x)$, $k(x,\ t)$ и $f(x)$ примем следующие ограничения:

$$1)\ \alpha(x),\ k(x,\ t)\ \text{и}\ f(x)\in H,\qquad 2)\ \alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)\neq 0,$$

для любой точки на L[1].

---

[1] В работе [6] я налагал более сильное ограничение на $k(x,\ t)$, а именно, требовал, что функция $A(x,\ t)=\dfrac{k(x,\ t)-k(x,\ x)}{x-t}\in H$. Как будет ниже показано, такое требование является излишним.

Относительно контуров L_j достаточно принять следующее ограничение: координаты точек этих контуров допускают производные первого порядка по дуге, которые удовлетворяют условию Hölder'a.

3. Ниже нам придется иметь дело с функцией вида

$$A(x,\ t)=\frac{k(x,\ t)-k(x,\ x)}{x-t}, \tag{2}$$

относительно которой докажем предложение:

$$A(x,\ t)=\frac{A_0(x,\ t)}{|x-t|^{\nu}}, \tag{2'}$$

где $A_0(x,\ t)\in H$, $\nu<1$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

a) Какова бы ни была постоянная γ, $0<\gamma\leqq 1$, имеет место неравенство

$$\left|\,|x-t|^{\gamma}-|y-t|^{\gamma}\,\right|\leqq|x-y|^{\gamma}, \tag{3}$$

где x, y, t—любые точки на плоскости комплексной переменной z.

Мы можем без ограничения общности предположить, что $|y-t|\leqq|x-t|$. Тогда (3) примет вид

$$|x-t|^{\gamma}-|y-t|^{\gamma}\leqq|x-y|^{\gamma}. \tag{3'}$$

Пусть $u=|x-t|$, $v=|y-t|$, $u\geqq v$. Но ввиду того, что $u-v=|x-t|-$ $-|y-t|\leqq|x-y|$, (3′) будет доказано, если докажем неравенство

$$u^{\gamma}-v^{\gamma}\leqq(u-v)^{\gamma}$$

или неравенство

$$\frac{u^{\gamma}-v^{\gamma}}{(u-v)^{\gamma}}=\frac{1-z^{\gamma}}{(1-z)^{\gamma}}=f(z)\leqq 1,\quad 0\leqq z=\frac{v}{u}\leqq 1.$$

Но так как

$$f'(z)=\frac{\gamma(z^{1-\gamma}-1)}{z^{1-\gamma}(1-z)^{1+\gamma}}<0,$$

функция $f(z)$ убывает от $f(0)=1$ до $f(1)=0$, что и требовалось доказать.

b) Пусть $k(x,\ t)\in H_{\lambda}$. Тогда имеем

$$k(x,\ t)-k(x,\ x)=k_0(x,\ t)|x-t|^{\gamma}, \tag{4}$$

где γ—любая положительная постоянная, удовлетворяющая условию $\frac{\lambda}{2}\leqq\gamma<\lambda$, а $k_0(x,t)\in H_{\lambda-\gamma}$.

В дальнейшем все время через M с различными индексами будем обозначать какие-нибудь положительные постоянные, независящие от выбора точек x, t и т. д.

Прежде всего из того, что $k(x, t) \in H_\lambda$ вытекает непрерывность $k_0(x, t)$ и равенство

$$k_0(x, x) = 0$$

при любом $x \in L$.

Докажем теперь неравенство

$$|k_0(x, t) - k_0(y, t)| \leqq M_1 |x-y|^{\lambda-\gamma}, \tag{4'}$$

где x, y, t—произвольные точки на L. В дальнейшем без ограничения общности можем предполагать, что

$$|y-t| \leqq |x-t|.$$

Пусть сперва $|x-y| \leqq |x-t|$. Тогда

$$|k_0(x, t) - k_0(y, t)| = \left| \frac{k(x, t) - k(x, x)}{|x-t|^\gamma} - \frac{k(y, t) - k(y, y)}{|y-t|^\gamma} \right|$$

$$\leqq \left| \frac{k(x, t) - k(x, x) - k(y, t) + k(y, y)}{|x-t|^\gamma} \right| + |k(y, t) - k(y, y)| \left| \frac{1}{|x-t|^\gamma} - \frac{1}{|y-t|^\gamma} \right|$$

$$\leqq \frac{|k(x, t) - k(y, t)| + |k(x, x) - k(y, y)|}{|x-t|^\gamma} + \frac{|k(y, t) - k(y, y)|}{|x-t|^\gamma |y-t|^\gamma} \Big| |x-t|^\gamma - |y-t|^\gamma \Big|.$$

Но, так как $k(x, t) \in H_\lambda$, в силу (1') и (3), будем иметь

$$|k_0(x, t) - k_0(y, t)| \leqq 3M \frac{|x-y|^\lambda}{|x-t|^\gamma} + M \frac{|y-t|^\lambda |x-y|^\gamma}{|x-t|^\gamma |y-t|^\gamma}$$

$$= 3M|x-y|^{\lambda-\gamma} \left| \frac{x-y}{x-t} \right|^\gamma + M|x-y|^{\lambda-\gamma} \left| \frac{y-t}{x-t} \right|^{\lambda-\gamma} \left| \frac{x-y}{x-t} \right|^{2\gamma-\lambda}.$$

Отсюда, в силу того, что, по предположению,

$$\left| \frac{x-y}{x-t} \right| \leqq 1, \quad \left| \frac{y-t}{x-t} \right| \leqq 1, \quad 2\gamma - \lambda \geqq 0,$$

легко получим (4').

Если же $|x-y| > |x-t|$, то

$$|k_0(x, t) - k_0(y, t)| = \left| \frac{k(x, t) - k(x, x)}{|x-t|^\gamma} - \frac{k(y, t) - k(y, y)}{|y-t|^\gamma} \right|$$

$$\leqq M|x-t|^{\lambda-\gamma} + M|y-t|^{\lambda-\gamma} \leqq 2M|x-y|^{\lambda-\gamma}.$$

Таким образом, неравенство (4') доказано при любых x, y, $t \in L$. Совершенно аналогично доказывается неравенство

$$|k_0(x, t) - k_0(x, \zeta)| \leqq M_2 |t-\zeta|^{\lambda-\gamma}. \tag{4''}$$

Из (4′) и (4″) получим

$$|k_0(x,\ t)-k_0(y,\ \zeta)| \leqq |k_0(x,\ t)-k_0(y,\ t)|+|k_0(y,\ t)-k_0(y,\ \zeta)|$$

$$\leqq M_1|x-y|^{\lambda-\gamma}+M_2|t-\zeta|^{\lambda-\gamma} \leqq M\{|x-y|^{\lambda-\gamma}+|t-\zeta|^{\lambda-\gamma}\},$$

т. е. $k_0(x,\ t)\varepsilon H_{\lambda-\gamma}$, что и требовалось доказать.

c) Пусть $\vartheta(x,\ t)=\arg(x-t)$. Тогда, в силу (2) и (4), найдем

$$A(x,\ t)=\frac{k_0(x,\ t)|x-t|^{\gamma}}{|x-t|\,e^{i\vartheta}}=\frac{k_0(x,\ t)\,e^{-i\vartheta(x,\ t)}}{|x-t|^{1-\gamma}},$$

где $\frac{\lambda}{2}\leqq\gamma<\lambda\leqq 1$, $k_0(x,\ t)\,\varepsilon\,H_{\lambda-\gamma}$.

Формула (2′), очевидно, будет доказана, если докажем, что функция

$$A_0(x,\ t)=k_0(x,\ t)\,e^{-i\vartheta(x,\ t)}\,\varepsilon\,H.$$

Это очевидно, когда точки x и t принадлежат различным контурам L_j. Следовательно, остается доказать предложение для того случая, когда эти точки лежат на одном и том же контуре.

Пусть $x,\ t\,\varepsilon\,L_j$, где L_j один из контуров $L_0,\ L_1,\ \ldots,L_m$. Пусть δ—положительное число, для которого выполняется условие: если точки $x,\ y,\ t$ лежат на дуге кривой L_j, длина которой $\leqq\delta$, причем t находится между x и y, то всегда имеют место неравенства[1]

$$|x-t|\leqq|x-y|,\quad |y-t|\leqq|x-y|.$$

Зафиксируем точку t и примем ее за начало отсчета длины дуги на L_j, причем этот отсчет будем производить всегда в положительном направлении.

Тогда, несмотря на то, что функция $e^{-i\vartheta(x,\ t)}$ терпит конечный разрыв в точке t, будем иметь

$$|e^{-i\vartheta(x,\ t)}-e^{-i\vartheta(y,\ t)}|\leqq M_3|s-\sigma|^{\mu},$$

где s и σ—дуговые координаты соответственно точек $x,\ y\,\varepsilon\,L_j$, $0<\mu\leqq 1$, причем постоянная M_3 не зависит от точки t.

Возьмем дугу $L_j^{(\delta)}$ длины δ с центром в точке t на L_j.

Пусть $x,\ y\,\varepsilon\,L_j^{(\delta)}$, а t находится между ними. Но тогда, по условию,

$$|x-y|\geqq|x-t|,\quad |x-y|\geqq|y-t|$$

и мы будем иметь

$$|k_0(x,\ t)\,e^{-i\vartheta(x,\ t)}-k_0(y,\ t)\,e^{-i\vartheta(y,\ t)}|\leqq M_4\{|x-t|^{\lambda-\gamma}+|y-t|^{\lambda-\gamma}\}\leqq M_5|x-y|^{\lambda-\gamma}.$$

---

[1] При сделанных нами ограничениях относительно контуров L_j, это предложение доказывается легко.

Во всех остальных случаях расположения точек x, y на L_j, мы будем иметь

$$1 \leqq \left| \frac{s-\sigma}{x-y} \right| \leqq N,$$

где N—постоянная, независящая от выбора точек x, y, t. Но тогда можем написать

$$|k_0(x, t)\, e^{-i\vartheta(x, t)} - k_0(y, t)\, e^{-i\vartheta(y, t)}|$$

$$\leqq |k_0(x, t) - k_0(y, t)| + |k_0(y, t)|\, |e^{-i\vartheta(x, t)} - e^{-i\vartheta(y, t)}|$$

$$\leqq M_6\{|x-y|^{\lambda-\gamma} + |s-\sigma|^{\mu}\} \leqq M_6\{|x-y|^{\lambda-\gamma} + N|x-y|^{\mu}\} \leqq M_7|x-y|^{\mu'}$$

$$(0 < \mu' = \min(\mu, \lambda-\gamma) < 1)\ ^{(1}.$$

Рассуждая далее так же как в b), легко докажем, что $k_0(x, t)\, e^{-i\vartheta(x, t)} \varepsilon H$, что и требовалось доказать.

4. Пусть T_j, $j = 1, 2, \ldots, m$—конечная область с границей L_j, а T_0—бесконечная область с границей L_0. Пусть далее $T' = T_0 + T_1 + \cdots + T_m$. Очевидно, T'—несвязная область.

Введем теперь следующие определения:

Если функция $\Phi(z)$ голоморфна внутри области T, непрерывна в $T+L$ и предельные значения ее на $L \varepsilon H$, то мы будем говорить, что $\Phi(z)$ H-голоморфна в T. Мы будем говорить также, что $\Phi(z)$ H-голоморфна в $T+T'$, если она H-голоморфна в каждой из областей $T, T_0, \ldots, T_m$ и $\Phi(\infty) = 0$.

Если функция $\Phi(z)$ H-голоморфна в $T+T'$, то через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ будем обозначать ее предельные значения, когда z стремится к $x \varepsilon L$, соответственно из области T или T'. Очевидно, вообще говоря, $\Phi^+(x) \neq \Phi^-(x)$. В том случае, когда $\Phi^+(x) \equiv \Phi^-(x)$, очевидно, будем иметь $\Phi(z) \equiv 0$.

В дальнейшем через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать значения H-голоморфной в $T+T'$ функции $\Phi(z)$, смотря по тому $z \varepsilon T$ или T'. Через $\Phi_j^-(z)$ будем обозначать значения функции $\Phi^-(z)$ в области T_j, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Запомним также, что во всем дальнейшем z всегда будет обозначать точку, лежащую вне L, а x, y, t—точки, лежащие на L.

5. Приведем теперь без доказательства некоторые основные свойства интегралов типа Коши.

Пусть $\varphi(x) \varepsilon H$. Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt \tag{5}$$

(1 Очевидно, мы можем $\lambda-\gamma$ взять настолько малым, чтобы $\mu' = \lambda-\gamma$.

представляет H-голоморфную функцию в $T+T'$, предельные значения которой связаны с плотностью интеграла следующими формулами:

$$\Phi^{+}(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)+E[\varphi(x)]), \tag{6}$$

$$\Phi^{-}(x)=\frac{1}{2}(-\varphi(x)+E[\varphi(x)]), \tag{6'}$$

где

$$E[\varphi(x)]\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,$$

причем интеграл надо брать в смысле главного значения по Коши (см., например, [9], стр. 166).

Если $\varphi(x)\in H_{\lambda}$, $0<\lambda\leqq 1$, то функция

$$E[\varphi(x)]\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt$$

$\in H_{\lambda}$, при $\lambda<1$ и $\in H_{1-\varepsilon}$, при $\lambda=1$, причем ε сколь угодно малое положительное число (см. [9], стр. 171).

Следовательно, если $\varphi(x)\in H_{\lambda}$, то $\Phi^{+}(x)$ и $\Phi^{-}(x)\in H_{\lambda}$, при $\lambda<1$ и $\in H_{1-\varepsilon}$ при $\lambda=1$.

Из (6) и (6') получаются, как следствие, формулы

$$f^{+}(x)=E[f^{+}(x)], \tag{7}$$

$$f^{-}(x)=-E[f^{-}(x)], \tag{7'}$$

где $f^{+}(x)$ и $f^{-}(x)$ обозначают граничные значения каких-нибудь H-голоморфных функций соответственно в T или T'.

Из (6) и (6') имеем также

$$\varphi(x)=\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x), \tag{8}$$

$$E[\varphi(x)]=\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x). \tag{8'}$$

Следовательно, любую H-функцию $\varphi(x)$ всегда можно представить в виде (8), где $\Phi(z)$ изображается интегралом типа Коши (5) с плотностью $\varphi(z)$. Легко доказать, что такое представление единственно.

Из (8) и (8') вытекает следующая важная формула. Пусть $\varphi(x)\in H$. Если

$$E[\varphi(x)]=\psi(x), \tag{9}$$

где $\psi(x)$—заданная H-функция, то обратно

$$\varphi(x)=E[\psi(x)]. \tag{9'}$$

В самом деле, в силу (8'), имеем

$$\psi(x)=\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x).$$

Беря операцию E от обеих частей этого равенства, в силу (7), (7') и (8), получим искомую формулу (9'), которую можно записать еще в виде

$$\varphi(x)=E(E(\varphi))=E^{2}[\varphi(x)]. \tag{9''}$$

Эта формула верна для любой H-функции $\varphi(x)$.

Заметим также, что формулы (8) и (8') вытекают одна из другой. В самом деле, беря операцию E от обеих частей одной из них, в силу (7), (7') и (9''), мы придем к другой.

6. Пусть $A_0(x, t)\in H$, $\varphi(x)\in H$ и $\nu<1$. Тогда, как известно, имеет место формула

$$\int_L \frac{dy}{y-x}\int_L \frac{A_0(y, t)}{|t-y|^{\nu}}\varphi(t)\,dt=\int_L \varphi(t)\,dt\int_L \frac{A_0(y, t)\,dy}{(y-x)|t-y|^{\nu}}. \tag{10}$$

Докажем, что функция

$$B(x, t)=\int_L \frac{A_0(y, t)\,dy}{(y-x)|t-y|^{\nu}}=\frac{B_0(x, t)}{|t-x|^{\nu'}}, \tag{10'}$$

где $B_0(x, t)\in H$, $\nu'<1$.

В самом деле, пусть $\vartheta=\arg(t-y)$. Тогда имеем

$$B(x, t)=\int_L \frac{A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}}{(y-x)(t-y)\,e^{-i\vartheta}}\,dy=\int_L \frac{A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}e^{i\vartheta(t, y)}}{(y-x)(t-y)}\,dy$$

$$=\frac{1}{t-x}\left[\int_L \frac{A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}e^{i\vartheta}}{y-x}\,dy-\int_L \frac{A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}e^{i\vartheta}\,dy}{y-t}\right]$$

$$=\frac{A'_0(x, t)-A'_0(t, t)}{t-x},$$

где

$$A'_0(x, t)=\int_L \frac{A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}e^{i\vartheta}}{y-x}\,dy.$$

Но, так как функция $A_0(y, t)|t-y|^{1-\nu}e^{i\vartheta(t, y)}\in H$ (см. n° 3, c), то и $A'_0(x, t)\in H$ (n° 5) и следовательно, в силу (2'), получим формулу (10').

Наконец, заметим также, что всякая функция вида

$$F(x)=\int_L \frac{B_0(x, t)\,\varphi(t)}{|t-x|^{\nu}}\,dt$$

$\in H$, если $B_0(x, t)\in H$, $\nu<1$, а $\varphi(x)$—какая-нибудь непрерывная функция.

§ 2. Решение характеристических уравнений

1. Изучим предварительно характеристическое уравнение, которое мы можем записать в виде

$$B\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x) - \pi i\beta(x)\,E[\varphi(x)] = f(x). \tag{B}$$

Наша цель—построить все H-решения этого уравнения.

Пусть $\varphi(x)$—какое-нибудь H-решение уравнения (B). Тогда, в силу (5), (8) и (8'), уравнение (B) примет вид

$$[\alpha(x) - i\pi\beta(x)]\,\Phi^{+}(x) - [\alpha(x) + i\pi\beta(x)]\,\Phi^{-}(x) = f(x). \tag{11}$$

Таким образом, если $\varphi(x)$ есть H-решение уравнения (B), то интеграл типа Коши с плотностью $\varphi(x)$ определяет H-голоморфную функцию в $T+T'$, предельные значения которой удовлетворяют соотношению (11).

Докажем теперь обратное предложение: если существует H-голоморфная функция $\Phi(z)$ в $T+T'$, предельные значения которой удовлетворяют (11), то разность

$$\varphi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) \tag{12}$$

представляет H-функцию, удовлетворяющую уравнению (B).

В самом деле, согласно n° 5, § 1, из (12) сразу вытекает соотношение

$$E[\varphi(x)] = \Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x),$$

которое вместе с (12) дает

$$\Phi^{+}(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + E[\varphi(x)]),$$

$$\Phi^{-}(x) = \frac{1}{2}(-\varphi(x) + E[\varphi(x)]).$$

Подставляя эти выражения в (11), получим уравнение (B).

Таким образом, решение уравнения (B) приводится к решению следующей задачи Римана—Гильберта:

Требуется найти в $T+T'$ H-голоморфную функцию, предельные значения которой удовлетворяют условию (11).

Наиболее простое решение задачи Римана—Гильберта в случае односвязной области дал Ф. Д. Гахов [3]. Следуя Гахову, Б. Хведелидзе [5] решил эту задачу для многосвязной области.

2. Пусть

$$n_j = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\alpha(x) + i\pi\beta(x)}{\alpha(x) - i\pi\beta(x)}\right\}_{L_j}, \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

где $\{ \ \}_{L_j}$ обозначает приращение выражения в скобках при обходе один раз контура L_j в положительном направлении; очевидно, n_j целое число или нуль.

Число

$$n = n_0 + n_1 + \cdots + n_m$$

назовем *индексом* уравнения (A) или соответствующего характеристического уравнения (B).

При отсутствии внешнего контура L_0 мы будем считать $n_0 = 0$ и, следовательно, $n = n_1 + \cdots + n_m$.

Поместим начало координат внутри T и зафиксируем в областях $T_1, T_2, \ldots, T_m$ какие-нибудь точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ соответственно.

Тогда любая ветвь функции

$$h(x) = \lg\left[\frac{\alpha(x) + i\pi\beta(x)}{\alpha(x) - i\pi\beta(x)}\, x^{-n} S(x)\right], \tag{13}$$

где

$$S(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{n_j}, \text{ при } m \geqq 1 \text{ и } S(x) = 1, \text{ при } m = 0,$$

очевидно, является однозначной H-функцией на каждом контуре L_j, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Рассмотрим функцию

$$\chi(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{h(t)}{t - z}\, dt}, \quad z \in T + T'. \tag{14}$$

Очевидно, $\chi(z)$ H-голоморфна в $T + T'$, всюду $\neq 0$ и $\chi(\infty) = 1$. Кроме того, $\chi(z)$ не зависит от выбора ветви функции $h(x)$.

В самом деле, одна ветвь функции $h(x)$ отличается от любой другой на каждом контуре L_j величиной вида $2m_j\pi i$, где m_j—целые числа. Следовательно, подставляя в формулу (14) вместо $h(x)$ какую-нибудь другую ветвь этой функции, мы не изменим правой части этой формулы.

Кроме того,

$$\chi^+(x) = e^{\frac{1}{2} h(x)}\, e^{\omega(x)}, \quad \chi^-(x) = e^{-\frac{1}{2} h(x)}\, e^{\omega(x)},$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{2} E[h(x)]. \tag{15}$$

Отсюда, в силу (13), получим

$$\frac{\alpha(x) + i\pi\beta(x)}{\alpha(x) - i\pi\beta(x)} = \frac{x^n \chi^+(x)}{S(x)\, \chi^-(x)}. \tag{16}$$

В силу (16), (11) примет вид

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)}-\frac{x^n\Phi^-(x)}{\chi^-(x)}=\gamma_n(x)\,f(x), \tag{17}$$

где

$$\gamma_n(x)=\frac{S(x)}{\chi^+(x)[\alpha(x)-i\pi\beta(x)]}=e^{-\omega(x)}\sqrt{\frac{x^nS(x)}{\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)}}. \tag{18}$$

Функция $\gamma_n(x)\in H$ и $\neq 0$ на L. Кроме того, $\gamma_n(x)$ не зависит от выбора точек a_k соответственно внутри L_k. В самом деле, пусть a'_k—какая-нибудь другая система точек, расположенных соответственно внутри L_k. В силу (13) и (15),

$$\omega(x)-\omega_1(x)=\frac{1}{2}\,E\left[\lg\frac{S(x)}{S_1(x)}\right],$$

где $\omega_1(x)$ и $S_1(x)$—функции, соответствующие точкам a'_k. Но, ввиду того, что $\lg S(x)/S_1(x)$—голоморфная функция в $T+L$, в силу (7), имеем

$$\omega(x)-\omega_1(x)=\frac{1}{2}\lg\frac{S(x)}{S_1(x)},$$

т. е.

$$e^{-\omega(x)}\sqrt{S(x)}=e^{-\omega_1(x)}\sqrt{S_1(x)}.$$

Отсюда, в силу (18), сразу вытекает наше утверждение.

Рассмотрим в отдельности три случая: 1° $n=0$, 2° $n>0$, 3° $n<0$.

1° $n=0$. В этом случае (17) принимает вид

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{\chi^-(x)}=\gamma_0(x)\,f(x). \tag{19}$$

Первый член левой части этого равенства является предельным значением H-голоморфной функции в области T, а второй—предельным значением H-голоморфной функции в T'. Беря операцию E от обеих частей (19), в силу (7) и (7'), получим

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)}+\frac{\Phi^-(x)}{\chi^-(x)}=E[\gamma_0(x)\,f(x)]. \tag{19'}$$

Определяя из (19) и (19') $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ и вычисляя по формуле (12) функцию $\varphi(x)$, найдем [1]

$$\varphi(x)=\alpha^*(x)\,f(x)+i\pi\beta_0^*(x)\,E[\gamma_0(x)\,f(x)], \tag{20}$$

где

$$\alpha^*(x)=\frac{\alpha(x)}{\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)},\quad \beta_n^*(x)=\frac{\beta(x)}{[\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)]\,\gamma_n(x)}.$$

[1] Легко доказать, что других решений у уравнения (B) не будет.

Ввиду того, что $\gamma_0(x) \varepsilon H$ и $\neq 0$, в силу § 1, n° 5, функция $\varphi(x) \varepsilon H$. Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Если $n=0$, то уравнение $B\varphi=f$ для любой f имеет H-решение, притом единственное, определенное формулой* (20).

В частности, однородное уравнение $B\varphi=0$ имеет только решение $\equiv 0$.

2°. $n>0$. В этом случае мы можем написать

$$\frac{x^n \Phi^-(x)}{\chi^-(x)} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1} + \frac{\Phi'^-(x)}{\chi^-(x)}, \tag{21}$$

где c_k—постоянные, а $\Phi'^-(z)$—H-голоморфная функция в T'. Тогда, в силу (21), (17) примет вид

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)} - \frac{\Phi'^-(x)}{\chi^-(x)} = \gamma_n(x) f(x) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}. \tag{22}$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, найдем

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)} + \frac{\Phi'^-(x)}{\chi^-(x)} = E[\gamma_n(x) f(x)] + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}. \tag{22'}$$

Определяя из (22) и (22') функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi'^-(x)$, а затем, принимая во внимание (21), из (12) найдем

$$\varphi(x) = \alpha^*(x) f(x) + i\pi\beta_n^*(x)\, E[\gamma_n(x) f(x)] + \beta_n^*(x)\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi(x) \varepsilon H$.

Путем непосредственной подстановки получим, что функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$, найденные из (21), (22) и (22'), удовлетворяют, при любых значениях постоянных c_k, условию (11). Следовательно, функция $\varphi(x)$, определенная формулой (23), при любых значениях постоянных c_k, удовлетворяет уравнению (B). Легко доказать, что у этого уравнения других решений, кроме (23), не будет.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если $n>0$, то уравнение $B\varphi=f$ всегда разрешимо, причем оно имеет ∞^n H-решений, которые определяются формулой* (23).

В частности, однородное уравнение $B\varphi=0$ имеет ∞^n решений

$$\varphi(x) = \beta_n^*(x)\sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}$$

(c_k—произвольные комплексные постоянные).

3°. $n<0$. В этом случае, если задача имеет решение, из (17) вытекает сразу, что

$$\frac{S(x)\,\Phi^+(x)}{\chi^+(x)}+\frac{x^n\,\Phi^-(x)}{\chi^-(x)}=E[\gamma_n(x)\,f(x)]. \qquad (17')$$

Из (17) и (17') получим

$$\Phi^+(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\chi^+(x)}{S(x)}\{\gamma_n(x)\,f(x)+E[\gamma_n(x)\,f(x)]\},$$

$$\Phi^-(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\chi^-(x)}{x^n}\{-\gamma_n(x)\,f(x)+E[\gamma_n(x)\,f(x)]\}.$$

Последняя формула представляет предельные значения функции

$$\Phi^-(z)=z^{-n}\chi^-(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\gamma_n(t)\,f(t)}{t-z}\,dt, \quad z\in T'.$$

Но так как $-n>0$ и $\chi^-(\infty)=1$, функция $\Phi^-(z)$ будет H-голоморфной в T' тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:

$$\int\limits_L t^k\gamma_n(t)\,f(t)\,dt=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -n-1. \qquad (24)$$

Пусть эти соотношения выполнены. Тогда функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$, найденные выше, действительно будут представлять единственное решение задачи Римана—Гильберта (11). Затем по формуле (12) находим

$$\varphi(x)=\alpha^*(x)\,f(x)+i\pi\beta_n^*(x)\,E[\gamma_n(x)\,f(x)]. \qquad (25)$$

Очевидно, что $\varphi(x)\in H$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Если $n<0$, то уравнение $B\varphi=f$, вообще говоря, решения не имеет. Оно разрешимо лишь в том случае, когда правая часть удовлетворяет соотношениям (24). В этом случае уравнение $B\varphi=f$ имеет единственное H-решение, которое определяется формулой (25).*

В частности, однородное уравнение $B\varphi=0$ имеет лишь решение $\equiv 0$.

При отсутствии контура L_0 все выведенные выше формулы останутся в силе, если только мы положим в них

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_m,$$

$$h(x)=\lg\left[\frac{\alpha(x)+i\pi\beta(x)}{\alpha(x)-i\pi\beta(x)}\,S(x)\right].$$

§ 3. Уравнение $A\varphi=f$

1. Уравнение

$$A\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x)-\int_L \frac{k(x,\ t)}{t-x}\,\varphi(t)\,dt=f(x)$$

мы можем переписать в виде

$$B\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x)-i\pi\beta(x)\,E[\varphi(x)]=F(x), \tag{26}$$

где

$$F(x)=f(x)+\int_L A(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{27}$$

$$A(x,\ t)=\frac{k(x,\ t)-k(x,\ x)}{t-x}.$$

Как мы видели в n° 3, § 1,

$$A(x,\ t)=\frac{A_0(x,\ t)}{|x-t|^{\nu}},\quad \nu<1,$$

где $A_0(x,\ t)\in H$.

Заметим, что, согласно n° 6, § 1, функция $F(x)\in H$, если $\varphi(x)\in H$.

Рассмотрим в отдельности следующие случаи: 1° $n=0$, 2° $n>0$, 3° $n<0$, где n — индекс уравнения $A\varphi=f$.

1° $n=0$. В этом случае, согласно теореме 1, уравнение (26) можем переписать в виде

$$\varphi(x)=\alpha^*(x)F(x)+i\pi\beta_0^*(x)\,E[\gamma_0(x)\,F(x)]. \tag{28}$$

Но это уравнение, в силу (27) и n° 6, § 1, примет вид

$$A_0^*\varphi \equiv \varphi(x)-\int_L k_0^*(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy=f_0^*(x), \tag{28'}$$

где в дальнейшем под $k_n^*(x,\ y)$ и $f_n^*(x)$ мы будем понимать функции, определенные по формулам

$$k_n^*(x,\ y)=\alpha^*(x)\,A(x,\ y)+i\pi\beta_n^*(x)\,E[A(x,\ y)\,\gamma_n(x)]\ ^{(1},$$

$$f_n^*(x)=\alpha^*(x)\,f(x)+i\pi\beta_n^*(x)\,E[\gamma_n(x)\,f(x)].$$

Нетрудно видеть, что, согласно n°n° 5, 6, § 1, функция $f_n^*(x)\in H$ а $k_n^*(x,\ y)$ имеет вид

$$k_n^*(x,\ y)=\frac{k_n'^*(x,\ y)}{|x-y|^{\nu}},\quad \nu<1,$$

где $k_n'^*(x,\ y)\in H$. Следовательно, к интегральному уравнению с ядром $k_n^*(x,y)$ применима теория Фредгольма.

(1 В этой формуле операция E распространяется только на переменную x, а y — входит в качестве параметра.

Таким образом, мы доказали, что если функция $\varphi(x) \in H$ и удовлетворяет уравнению (А), то она будет также удовлетворять уравнению Фредгольма (28′). Легко теперь доказать и обратное предложение: если $\varphi(x) \in H$ и удовлетворяет уравнению Фредгольма (28′), то $\varphi(x)$ будет решением также сингулярного уравнения (А).

В самом деле, пусть $\varphi(x) \in H$ и $A_0^*\varphi = f_0^*$. Тогда уравнение (28′) мы можем переписать в виде (28), которое эквивалентно, согласно теореме 1, уравнению (26). Но это представляет иначе записанное уравнение (А), а это и требовалось доказать.

Заметив, что (n° 6, § 1) любое непрерывное решение уравнения $A_0^*\varphi = f_0^* \in H$, мы можем высказать следующую теорему:

Теорема 4. *Если $n=0$, то уравнение $A\varphi = f$ для любой $f(x)$ эквивалентно уравнению Фредгольма $A_0^*\varphi = f_0^*$.*

В частности, однородное сингулярное уравнение $A\varphi = 0$ эквивалентно однородному уравнению Фредгольма $A_0^*\varphi = 0$.

Иными словами, уравнения $A\varphi = f$ и $A_0^*\varphi = f_0^*$ одновременно разрешимы или неразрешимы, причем в случае разрешимости они имеют одинаковые решения. Таким образом, условие разрешимости сингулярного уравнения $A\varphi = f$ совпадает с условием разрешимости уравнения Фредгольма $A_0^*\varphi = f_0^*$. Последнее замечание мы используем впоследствии.

2°. $n>0$. Пусть $\varphi(x) \in H$ и $A\varphi = f$. Тогда, в силу теоремы 2, из (26) получим соотношение

$$\varphi(x) = \alpha^*(x)\, F(x) + i\pi\beta_n^*\, E[\gamma_n(x)F(x)] + \beta_n^*(x) \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}, \tag{29}$$

которое, в силу (27), примет вид

$$A_n^*\varphi \equiv \varphi(x) - \int\limits_L k_n^*(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f_n^*(x) + \beta_n^*(x) \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}, \tag{29'}$$

где c_k — постоянные.

Таким образом, если H-функция $\varphi(x)$ удовлетворяет сингулярному уравнению $A\varphi = f$, то $\varphi(x)$ будет также решением уравнения Фредгольма (29′), причем в последнем уравнении постоянные c_k для заданной функции $\varphi(x)$ принимают определенные значения.

Докажем теперь обратное предложение: каковы бы ни были постоянные c_k, если уравнение (29′) имеет решение, то оно будет решением также сингулярного уравнения $A\varphi = f$.

Прежде всего заметим, что (n° 6, § 1) всякое непрерывное решение уравнения (29′) будет $\in H$. Пусть теперь $\varphi(x) \in H$ и удовлетворяет уравнению (29′). Тогда это уравнение мы можем записать в виде (29); оно в силу теоремы 2, равносильно соотношению (26), т. е. уравнению (А), что и требовалось доказать.

Таким образом, имеем теорему:

Теорема 5. *Если $n>0$, то уравнение $A\varphi=f$ эквивалентно для любой f уравнению Фредгольма*

$$A_n^*\varphi=f_n^*(x)+\beta_n^*(x)\sum_{k=1}^{n}c_kx^{k-1}, \tag{29'}$$

где c_k — произвольные постоянные.

В частности, однородное сингулярное уравнение $A\varphi=0$ эквивалентно неоднородному уравнению Фредгольма

$$A_n^*\varphi=\beta_n^*(x)\sum_{k=1}^{n}c_kx^{k-1}$$

(c_k — произвольные постоянные).

Следовательно, условие разрешимости сингулярного уравнения $A\varphi=f$ совпадает с условием разрешимости уравнения Фредгольма (29′).

3°. $n<0$. Пусть $\varphi(x)\varepsilon H$ и $A\varphi=f$. Тогда, в силу теоремы 3, из (26) получим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\varphi(x)=\alpha^*(x)F(x)+i\pi\beta_n^*(x)E[F(x)\gamma_n(x)],$$

$$\int_L t^k\gamma_n(t)F(t)\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -n-1.$$

В силу (27), эти уравнения принимают вид

$$A_n^*\varphi\equiv\varphi(x)-\int_L k_n^*(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy=f_n^*(x), \tag{30}$$

$$\int_L \delta_k(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_L t^k\gamma_n(t)f(t)\,dt,\ k=0,\ 1,\ \ldots,=-n-1, \tag{30'}$$

где

$$\delta_k(t)=-\int_L x^k\gamma_n(x)A(x,\ t)\,dx.$$

Таким образом, всякое H-решение сингулярного уравнения $A\varphi=f$ удовлетворяет также уравнению Фредгольма (30) и соотношениям (30′). Легко доказать также и обратное предложение: всякая H-функция, удовлетворяющая уравнению Фредгольма (30) и соотношениям (30′), удовлетворяет также сингулярному уравнению (A).

Замечая, что всякое непрерывное решение уравнений (30) и (30′) εH, мы можем высказать следующую теорему:

Теорема 6. *Если $n<0$, то уравнение $A\varphi=f$ эквивалентно функциональным уравнениям* (30) и (30′).

В частности, однородное сингулярное уравнение $A\varphi=0$ эквивалентно однородному уравнению Фредгольма $A_n^*\varphi=0$ и соотношениям

$$\int\limits_L \delta_k(t)\,\varphi(t)\,dt=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -n-1. \tag{30''}$$

Следовательно, условие разрешимости сингулярного уравнения $A\varphi=f$ при $n<0$ совпадает с условием разрешимости системы функциональных уравнений типа Фредгольма (30) и (30′).

Таким образом, случай, когда индекс сингулярного уравнения отрицателен выделяется особо в том смысле, что в этом случае исходное сингулярное уравнение $A\varphi=f$, вообще говоря, не эквивалентно одному уравнению Фредгольма $A_n^*\varphi=f_n^*(x)$, а следует также принимать обязательно во внимание дополнительные соотношения (30′).

Приведем пример, подтверждающий это утверждение. Пусть L—окружность радиуса 1 и с центром в начале координат. Рассмотрим сингулярное уравнение

$$\begin{aligned}&\left(x+\frac{1}{x}\right)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\left(x-\frac{1}{x}\right)\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt\\ &-\frac{1}{2\pi i}\left(x+\frac{1}{x}\right)\int\limits_L\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\,dt=2x^2.\end{aligned} \tag{31}$$

Легко видеть, что индекс этого уравнения $=-2$. Кроме того, это уравнение разрешимо, так как его решением служит функция $\varphi(x)=x$.

Уравнение Фредгольма (30), соответствующее (31), будет

$$\varphi(x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\,dt=x. \tag{31'}$$

Общим решением этого уравнения будет функция,

$$c+x,$$

где c—произвольная постоянная. Но эта функция при $c\neq0$ не удовлетворяет исходному сингулярному уравнению (31), т. е. уравнение (31) не эквивалентно уравнению (31′).

2. Докажем теперь, что функциональные уравнения (30) и (30′), эквивалентные сингулярному уравнению $A\varphi=f$ при $n<0$, можно заменить

одним интегральным уравнением Фредгольма и условиями, связанными только с функцией $f(x)$.

Пусть среди функций $\delta_0(x), \ldots, \delta_m(x)$, $m=-n-1$, имеются h линейно независимых функций

$$\delta_{k_1}(x), \ldots, \delta_{k_h}(x), \quad 0 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_h \leqq m.$$

Следовательно, остальные $m-h=\nu$ функции являются их линейными комбинациями, т. е.

$$c_{j0}\delta_0(x)+c_{j1}\delta_1(x)+\cdots+c_{jm}\delta_m(x)=0, \quad j=1,\ 2, \ldots, \nu,$$

где c_{jk} — определенные постоянные.

Тогда уравнения (30′) эквивалентны соотношениям

$$\int_L \delta_{kj}(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_L t^{kj}\gamma_n(t)\,f(t)\,dt, \quad j=1,\ 2, \ldots, h, \tag{32}$$

$$\int_L f(t)\,\varkappa_j(t)\,dt=0, \quad j=1, \ldots, \nu, \tag{33}$$

где

$$\varkappa_j(x)=(c_{j0}+c_{j1}x+\cdots+c_{jm}x^m)\,\gamma_n(x).$$

Пусть s — дуга точки x. Введем теперь новые функции $\chi_j(s)$ следующим образом:

$$\chi_j(s)=[B_{j1}\delta_{k_1}(x)+\cdots+B_{jh}\delta_{k_h}(x)]\,x'(s),$$

$$\int_L \chi_j(s)\,\overline{\chi}_k(s)\,ds=\begin{cases} 0, & j\neq k,\\ 1, & j=k,\end{cases}$$

$$(j,\ k=1,\ 2, \ldots, h),$$

где B_{jk} — постоянные, причем детерминант $|B_{jk}|\neq 0$.

Тогда система (32), очевидно, может быть заменена эквивалентной ей системой уравнений

$$\int_L \chi_j(s)\,\varphi(x)\,ds=\int_L \varkappa_{\nu+j}(x)\,f(x)\,dx=f_j, \quad j=1,\ 2, \ldots, h, \tag{32'}$$

где

$$\varkappa_{j+\nu}(x)=(B_{j1}x^{k_1}+\cdots+B_{jh}x^{k_h})\,\gamma_n(x).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{h} f_j\bar{\chi}_j(s)+\omega(x)-\sum_{j=1}^{h}\bar{\chi}_j(s)\int_L \omega(t)\,\chi_j(\sigma)\,d\sigma,$$

которая, какова бы ни была функция $\omega(x)$, всегда удовлетворяет уравнениям (32'). Эту функцию еще можно записать так

$$\varphi(x)=\omega(x)-\int_L \lambda(x,\ t)\,\omega(t)\,dt+\int_L \varkappa(x,\ t)\,f(t)\,dt, \tag{34}$$

где

$$\lambda(x,\ t)=\sum_{j=1}^{h}\bar{\chi}_j(s)\,\chi_j(\sigma)\,\bar{t}'(\sigma),$$

$$\varkappa(x,\ t)=\sum_{j=1}^{h}\bar{\chi}_j(s)\,\varkappa_{\nu+j}(\sigma)\,\bar{t}'(\sigma).$$

Таким образом, искомая функция $\varphi(x)$, которая кроме уравнения (30) удовлетворяет также соотношениям (30'), необходимо имеет вид (34).

Подставляя (34) в (30), получим

$$\omega(x)-\int_L \Omega(x,\ y)\,\omega(y)\,dy=\chi(x), \tag{35}$$

где

$$\Omega(x,\ y)=k_n^*(x,\ y)+\lambda(x,\ y)-\int_L k_n^*(x,\ t)\,\lambda(t,\ y)\,dt,$$

$$\chi(x)=f_n^*(x)-\int_L f(t)\Big[\varkappa(x,\ t)-\int_L k_n^*(x,\ y)\,\varkappa(y,\ t)\,dy\Big]\,dt.$$

Таким образом, при помощи функционального преобразования (34) система уравнений (30) и (30'), эквивалентная уравнению (A), приводится к уравнению Фредгольма (35) и условиям (33). В частности, если последние условия не выполнены то, очевидно, сингулярное уравнение (A) неразрешимо.

Если же условия (33) выполнены, то тогда уравнение (A) эквивалентно уравнению Фредгольма (35) в том смысле, что эти уравнения одновременно разрешимы или неразрешимы, и в случае разрешимости — из решения уравнения (35) получаются при помощи (34) решения уравнения (A).

В частности, если $f(x)\equiv 0$, то условия (33) автоматически выполняются и однородное сингулярное уравнение приводится к однородному уравнению Фредгольма

$$\omega(x)-\int_L \Omega(x,\ y)\,\omega(y)\,dy=0. \tag{35'}$$

Полученный результат мы можем еще сформулировать в следующем виде:

Теорема 7. *Если $n<0$ и условия (33) не выполнены, то уравнение (A) неразрешимо. Если же $n<0$ и условия (33) выполнены, то произведя функциональное преобразование (34), мы приходим к такому сингулярному уравнению, которое эквивалентно одному уравнению Фредгольма (35), причем функциональное преобразование (34) не меняет индекса сингулярного уравнения.*

Таким образом, условие разрешимости сингулярного уравнения (A) совпадает с условием разрешимости уравнения Фредгольма (35) плюс условия (33).

Сопоставляя теперь теоремы 4, 5 и 7, мы приходим к следующему заключению:

Кроме случая, когда индекс уравнения (A) отрицателен и условия (33) не выполняются, сингулярное уравнение (A) можно привести к эквивалентному уравнению Фредгольма, причем в указанном исключительном случае уравнение (A) неразрешимо.

Из теорем 4, 5, 6 и 7 вытекает, как следствие

Теорема 8. *Число линейно независимых H-решений однородного сингулярного уравнения $A\varphi=0$ ограничено.*

§ 4. Теоремы Нетера

1. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ и $\psi_1(x), \ldots, \psi_{k'}(x)$ — полная система линейно независимых решений соответственно однородных сингулярных уравнений $A\varphi=0$ и $A'\psi=0$. Следовательно, k и k' — числа линейно независимых решений этих уравнений. Согласно теоремы 8, эти числа — конечны.

Докажем теперь следующие две теоремы, принадлежащие Нетеру [7].

Теорема 9. *Для того, чтобы уравнение $A\varphi=f$ имело решение, необходимо и достаточно чтобы*

$$\int_L f(x)\,\psi_j(x)\,dx=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k', \tag{36}$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_{k'}(x)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного сингулярного уравнения $A'\psi=0$.

В частности, если уравнение $A'\psi=0$ не имеет другого решения, кроме $\psi\equiv 0$, то уравнение $A\varphi=f$ разрешимо для любой функции $f(x)$.

Теорема 10. *Пусть n—индекс уравнения* (A). *Тогда*

$$k-k'=n,$$

где k и k'—числа линейно независимых решений, соответственно уравнений $A\varphi=0$ и $A'\psi=0$.

Необходимость условия (36) непосредственно вытекает из легко проверяемой формулы

$$\int\limits_L \psi A\varphi\, dx=\int\limits_L \varphi A'\psi\, dx, \tag{37}$$

где φ и ψ—произвольные H-функции.

Перейдем теперь к доказательству достаточности этих условий. Для определенности пока будем считать $n>0$.

Так как, согласно теореме 5, необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $A\varphi=f$ совпадают с таковыми же условиями для уравнения Фредгольма

$$A_n^*\varphi=f_n^*(x)+\beta_n^*(x)\sum_{j=1}^{n} c_j x^{j-1}, \tag{29'}$$

то достаточно доказать, что условия (36) совпадают с необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (29′).

Пусть $\varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_p^*(x)$—полняя система линейно независимых решений однородного уравнения $A_n^*\varphi=0$, а $\psi_1^*(x), \ldots, \psi_p^*(x)$—полная система линейно независимых решений союзного с ним уравнения.

Тогда для разрешимости уравнения (29′) необходимо и достаточно, согласно теореме Фредгольма, выполнение следующих соотношений:

$$A_{j1}c_1+A_{j2}c_2+\cdots+A_{jn}c_n=b_j, \qquad j=1, \ldots, p, \tag{38}$$

где

$$A_{ji}=\int\limits_L \beta_n^*(x)\, \psi_j^*(x)\, x^{i-1}dx \qquad \begin{pmatrix} i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, p \end{pmatrix},$$

$$b_j=-\int\limits_L f_n^*(x)\, \psi_j^*(x)\, dx=-\int\limits_L \psi_j^{**}(x)\, f(x)\, dx, \qquad j=1, \ldots, p,$$

причем

$$\psi_j^{**}(x)=\alpha^*(x)\, \psi_j^*(x)-i\pi\gamma_n(x)\, E[\beta_n^*(x)\, \psi_j(x)].$$

Докажем, что $\psi_j^{**}(x)\not\equiv 0\,(j=1,\ldots,p)$. В самом деле, по условию функции $\psi_j^*(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi_j^*(x)=\int_L k_n^*(y,\ x)\,\psi_j^*(y)\,dy,$$

которое можно переписать еще так

$$\psi_j^*(x)=\int_L A(y,\ x)\ \psi_j^{**}(y)\,dy.$$

Из этой формулы, так как $\psi_j^*(x)\not\equiv 0$, сразу вытекает наше утверждение. Отсюда же получим, в силу линейной независимости функции $\psi_j^*(x)$, что функции $\psi_j^{**}(x)$ $(j=1,\ldots,p)$—линейно независимы.

Пусть q—ранг матрицы $\{A_{ji}\}$, $q\leqq\min(n,\ p)$.

Будем считать, что детерменант $|A_{ji}|$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ q)$ отличен от нуля [1]. Тогда, очевидно, необходимые и достаточные условия разрешимости системы (38) можно записать так

$$\int_L \lambda_j(x)\,f(x)\,dx=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r,\tag{39}$$

где $r=p-q\geqq 0$,

$$\lambda_j(x)=c_{j1}\psi_1^{**}(x)+\cdots+c_{jq}\psi_q^{**}(x)+\psi_{q+j}^{**}(x),$$

причем c_{ji}—обозначают определенные постоянные.

В силу линейной независимости функций $\psi_j^{**}(x)$, легко обнаружить, что функции $\lambda_j(x)$ также линейно независимы.

Таким образом, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (29′) и следовательно, эквивалентного ему сингулярного уравнения (A) выражается соотношениями (39).

Рассмотрим теперь, следуя Нетеру, сингулярное уравнение

$$A\varphi=Ag,$$

где $g(x)$—произвольная H-функция. Это уравнение всегда разрешимо, так как одним из решений его является функция $\varphi(x)=g(x)$. Следовательно, функция Ag всегда удовлетворяет соотношениям (39), т. е.

$$\int_L \lambda_j Ag\,dx=0,\quad j=1,\ldots,r$$

для любой H-функции $g(x)$. Но, в силу (37), эти соотношения примут вид

$$\int_L gA'\lambda_j\,dx=0,\quad j=1,\ \ldots,\ r.$$

[1] Легко проверить, что при всех возможных иных предположениях ход рассуждений остается тем же.

Но, отсюда, в силу произвольности функции $g(x)$, получим, что

$$A'\lambda_j = 0,$$

т. е.

$$\lambda_j(x) = d_{j1}\psi_1(x) + \cdots + d_{jk'}\psi_{k'}(x), \tag{40}$$

где d_{ji} — постоянные.

Следовательно, в силу (40), из условия (36) сразу вытекает условие (39), т. е. если условие (36) выполняется, то уравнение (A) разрешимо.

Таким образом, теорема 9 для случая $n > 0$ полностью доказана.

Рассматривая теперь случай $n \leqq 0$, в силу теорем 4 и 6, легко показать, что необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (A) в этом случае имеет вид (39). Следовательно, рассуждая далее так же, как выше, мы докажем теорему 9 и при $n \leqq 0$.

Докажем теперь, что

$$r = k'. \tag{41}$$

Ввиду того, что функции $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x)$ — линейно независимы и удовлетворяют уравнению $A'\psi = 0$, то, очевидно, можем положить

$$\lambda_1(x) = \psi_1(x), \ldots, \lambda_r(x) = \psi_r(x).$$

Следовательно, $r \leqq k'$. Пусть $r < k'$. Тогда возьмем функцию $f(x)$ так, чтобы

$$\int_L \lambda_j(x) f(x)\, dx = \int_L \psi_j(x) f(x)\, dx = 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

и, по крайней мере для одного $j = 1, 2, \ldots, k' - r$,

$$\int_L \psi_{r+j}(x) f(x)\, dx \neq 0.$$

Т. о. функция $f(x)$ удовлетворяет условию (39) и не удовлетворяет условию (36), что невозможно, так как эти условия эквивалентны. Итак, (41) доказано.

Пусть $f(x) \equiv 0$ и для определенности будем считать пока n опять положительным. Тогда, очевидно, условия (39) выполнены и, решая систему (38), получим

$$c_j = A^0_{j1} c_{q+1} + \cdots + A^0_{j-nq}\, c_n, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Следовательно, уравнение (29′) принимает вид

$$A^*_n \varphi = \sum_{j=1}^{n-q} c_{q+j} \nu_j(x), \tag{42}$$

где $c_{q+1}, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, а

$$\nu_j(x)=\beta_n^*(x)\,x^{q+j-1}+\sum_{l=1}^{q}A_{lj}^0 x^{l-1},\ j=1,\ldots,n-q.$$

Функции $\nu_j(x)$—очевидно, линейно независимы. Уравнение (42) разрешимо для любых c_{q+j} и эквивалентно уравнению $A\varphi=0$. Следовательно, общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\varphi=\sum_{j=1}^{p} d_j\varphi_j(x)+\sum_{j=1}^{n-q}c_{q+j}\mu_j(x), \tag{43}$$

где d_j—произвольные постоянные, а $\mu_j(x)$—какое-нибудь частное решение уравнения $A_n^*\varphi=\nu_j(x)$.

Докажем, что $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x),\ \mu_1(x),\ldots,\mu_{n-q}(x)$—линейно независимая система функций.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{p} d_j\varphi_j(x)+\sum_{j=1}^{n-q}c_{q+j}\mu_j(x)\equiv 0.$$

Беря операцию A_n^* от обеих частей этого равенства, получим

$$\sum_{j=1}^{n-q}c_{q+j}\nu_j(x)\equiv 0.$$

Но это возможно только тогда, когда все $c_{q+j}=0$. Следовательно, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{p}d_j\varphi_j(x)\equiv 0,$$

т. е. все $d_j=0$. Таким образом, $\varphi_j(x)$, $\mu_j(x)$—линейно независимая система функций. Это значит, что однородное уравнение $A\varphi=0$ имеет ровно $p+n-q=n+p-q=n+r$ линейно независимых решений, т. е. $k=n+r$. Отсюда, в силу (41), получим, что

$$k=n+k'.$$

Таким образом, теорема 10 при $n>0$ доказана. Случай отрицательного индекса, $n<0$, сразу сводится к предыдущему, если рассуждение будем вести для уравнения $A'\psi=0$, индекс которого $=-n$, т. е. положителен. В самом деле, на основании предыдущего будем иметь

$$k'=-n+k,$$

т. е. $k-k'=n$.

Наконец, при $n=0$, как легко видеть, $q=0$, и, в силу теоремы 4, $r=p=k$ и в силу (41), получим $k=k'$, т. е. $k-k'=0$.

Таким образом, теорема 10 полностью доказана.

Из теоремы 10 при $n>0$ получим

Следствие 1. *Если $n>0$, то число линейно независимых решений уравнения $A\varphi=0$ не меньше n, т. е. $k \geqq n$.*

Пусть теперь $n<0$. Тогда индекс уравнения $A'\psi=0$ будет $-n>0$ и, согласно следствию 1, число линейно независимых решений этого уравнения $\geqq -n$, т. е. это уравнение имеет всегда нетривиальные решения. Поэтому условие (36) не может быть выполнено для произвольной функции $f(x)$. Таким образом, имеем

Следствие 2. *Если $n<0$, то сингулярное уравнение $A\varphi=f$ имеет решение не для любой функции $f(x)$.*

Академия Наук Грузинской ССР
Тбилисский Математический Институт

ილია ვეკუა

ინტეგრალური განტოლებანი კოშის ტიპის განსაკუთრებული გულით

რეზიუმე

შრომაში განიხილება სინგულარული ინტეგრალური განტოლება შემდეგი სახის

$$A\varphi \equiv \alpha(x)\,\varphi(x)-\int_L \frac{k(x,\ t)}{t-x}\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{A}$$

სადაც L რთული კონტურია. შემდგარი მარტივი ჩაკეტილი ურთიერთ არა გადამკვეთი კონტურებისაგან $L_0, L_1, \ldots, L_m$, $m \geqq 0$, რომელთაგან L_0 თავის შიგნით შეიცავს ყველა დანარჩენს. კერძოდ, L_0 შეიძლება სრულიად არ იყოს. $\alpha(x)$, $k(x, t)$, $f(x)$ მოცემული, საზოგადოდ კომპლექსური, კონტურის წერტილების ფუნქციებია. ინტეგრალი აღებულია კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

L_j $(j=0,\ 1, \ldots, m)$ კონტურების შესახებ ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ამ კონტურების წერტილების კოორდინატებს აქვთ რკალის მიხედვით პირველი რიგის წარმოებულები, რომელნიც ჰელდერის პირობას აკმაყოფილებენ.

$\alpha(x)$, $k(x, t)$ და $f(x)$ ფუნქციების შესახებ კი ვიგულისხმებთ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ L-ზე ჰელდერის პირობას და, გარდა ამისა,

$$\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)\neq 0 \quad (L\text{-ზე}),$$

სადაც $\beta(x)=k(x,\ x)$.

მთელ რიცხვს, რომელიც კერძოდ შეიძლება იყოს ნული,

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d \lg \frac{\alpha(x)+i\pi\beta(x)}{\alpha(x)-i\pi\beta(x)}$$

ეწოდება (A) განტოლების ი ნ დ ე ქ ს ი.

ვთქვათ

$$E[\varphi(x)] \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}, \quad x \varepsilon L.$$

და განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციები:

$$\gamma_n(x) = e^{-\omega(x)}\sqrt{\frac{x^n S(x)}{\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)}},$$

სადაც

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\, E\left[\lg \frac{\alpha(x)+i\pi\beta(x)}{\alpha(x)-i\pi\beta(x)}\, x^{-n}S(x)\right],$$

$$S(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{n_j}, \quad n_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j} d\lg\frac{\alpha(x)+i\pi\beta(x)}{\alpha(x)-i\pi\beta(x)},$$

a_j ნებისმიერი წერტილია L_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ კონტურის შიგნით. შემდეგ

$$k_n^*(x,\ y) = \alpha^*(x)\,A(x,\ y)+i\pi\beta_n^*(x)\,E[\gamma_n(x)\,A(x,\ y)]\ ^{(1},$$

$$f_n^*(x) = \alpha^*(x)\,f(x)+i\pi\beta_n^*(x)\,E[\gamma_n(x)\,f(x)],$$

სადაც

$$A(x,\ y) = \frac{k(x,\ y)-k(x,\ x)}{y-x},$$

$$\alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)}, \quad \beta_n^*(x) = \frac{\beta(x)}{\gamma_n(x)[\alpha^2(x)+\pi^2\beta^2(x)]}.$$

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია $f_n^*(x)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას, ხოლო $k_n^*(x,\ y)$-ს აქვს სახე

$$k_n^*(x,\ y) = \frac{k_n'^*(x,\ y)}{|x-y|^\nu}, \quad \nu < 1,$$

სადაც $k_n'^*(x,\ y)$ აკმაყოფილებს აგრეთვე ჰელდერის პირობას ორივე არგუმენტის მიმართ. მაშასადამე, ინტეგრალური განტოლების მიმართ, რომლის გული $k_n^*(x,\ y)$ ფუნქციაა, შეიძლება გავრცელდეს ფრედჰოლმის თეორია. გარდა ამისა, ასეთი ინტეგრალური განტოლების ყოველი უწყვეტი ამოხსნა დააკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას, თუ ასეთივე პირობას აკმაყოფილებს განტოლების თავისუფალი წევრი.

(1 ამ ფორმულაში y შედის როგორც პარამეტრი და, მაშასადამე, მასზე არ ვრცელდება E ოპერაცია.

შრომაში დამტკიცებულია შემდეგი ძირითადი დებულებანი:[1]

1. თუ (A) განტოლების ინდექსი არაუარყოფითია, $n \geqq 0$, მაშინ ეს განტოლება ყოველი $f(x)$-სათვის ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის განტოლების

$$A_n^*\varphi=\varphi(x)-\int_L k_n^*(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy=f_n^*(x)+\beta_n^*(x)\sum_{k=1}^{m} c_k x^{k-1}, \tag{1}$$

სადაც c_k ნებისმიერი კომპლექსური მუდმივებია; ამასთან როცა $n=0$ უნდა მივიღოთ ყველა $c_k=0$.

2. თუ (A) განტოლების ინდექსი უარყოფითია, $n<0$, მაშინ ეს განტოლება ეკვივალენტურია ფრედჰოლმის ტიპის ფუნქციონალურ განტოლებათა სისტემის

$$A_n^*\varphi\equiv\varphi(x)-\int_L k_n^*(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy=f_n^*(x), \tag{2}$$

$$\int_L \delta_k(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_L t^k\gamma_n(t)\,f(t)\,dt,\ \ k=0,\ 1,\ \dots,\ -n-1, \tag{3}$$

სადაც

$$\delta_k(t)=-\int_L x^k\gamma_n(x)\,A(x,\ t)\,dx.$$

ამ დებულებებიდან საკმაოდ მარტივად მიიღებიან შემდეგი თეორემები.

3. ერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების $A\varphi=0$ წრფივად დამოუკიდებელ ამოხსნათა რიცხვი სასრულია.

4. (A) განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ

$$\int_L f(x)\,\psi_j(x)\,dx=0,\quad j=1,\ 2,\ \dots,\ k',$$

სადაც $\psi_1(x),\ \dots,\ \psi_{k'}(x)$ არის სრული სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნების (A) განტოლებასთან მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლების

$$A'\psi\equiv\alpha(x)\,\psi(x)+\int_L\frac{k(t,\ x)}{t-x}\,\psi(t)\,dt=0.$$

[1] თეორემების ნუმერაცია აქ არ თანხვდება ტექსტში მოყვანილ ნუმერაციას, რადგან აქ არ მოვყავს ზოგიერთი თეორემა, რომელთაც დამხმარე ხასიათი აქვთ.

5. ვთქვათ k და k' არიან რიცხვები შესაბამისად $A\varphi=0$ და $A'\psi=0$ ერთგვაროვან განტოლებათა წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნების. მაშინ

$$k-k'=n,$$

სადაც n (A) განტოლების ინდექსია.

უკანასკნელი სამი თეორემა პირველად დამტკიცებული იყო ნამდვილ განტოლებებისათვის, რომელთა გულს კოტანგენსის ტიპის განსაკუთრებულება აქვს, ფ. ნეტერის მიერ მის მეტად მნიშვნელოვან შრომაში [7].

უკანასკნელად შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ფუნქციონალურ განტოლებათა სისტემა (2), (3), რომელნიც ეკვივალენტურია (A) განტოლებისა, როცა $n<0$, შეიძლება შეიცვალოს ერთი ფრედჰოლმის განტოლებით და ისეთი პირობებით, რომელნიც მხოლოდ $f(x)$ ფუნქციას შეიცავენ.

საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემია
თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტი

ЛИТЕРАТУРА—ლიტერატურა

1. И. Н. Векуа. О сингулярных интегральных уравнениях,... Доклады АН СССР, т. XXVI, № 4, 1940, стр. 335—338.
2. T. Carleman. Sur le résolution de certaines équations integrales. Arkiv för Mat., Astr. och Fisik, Bd. 16, № 26, 1922, 1—19.
3. Ф. Д. Гахов. О краевой задаче Римана. Мат. сб. т. 2 (44), № 4, 1937, стр. 673—683.
4. D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. 1924, S. 81—109.
5. Б. В. Хведелидзе. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области. Сообщения АН ГССР, т. II, № 7, 1941, стр. 571—578.
6. Илья Векуа. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. Сообщения АН ГССР, т. II, № 7, 1941, стр. 579—586.
7. F. Noether. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Math. Ann. Bd. 82, 1921, S. 42—63.
8. В. Д. Купрадзе. К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. Сообщения АН ГССР, т. II, № 7, 1941, стр. 587—596.
9. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. 1940.