თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები, ტ. VII, 1939
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. VII, 1939
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. VII, 1939

Илья ВЕКУА

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ

Глава I

Комплексное представление решений диференциальных уравнений эллиптического типа

1. Введение. Мы рассматриваем несколько вопросов, относящихся к эллиптическим дефереціальным уравнениям вида

$$\mathfrak{L}_n(u) \equiv \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = \begin{cases} f(x, y) \neq 0 & \text{(A)} \\ 0, & \text{(A}_0\text{)} \end{cases}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta^m = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2(m-s)} \partial y^{2s}}, \quad \Delta^0 = 1,$$

$$(m = 1, \ldots, n),$$

L_k—наиболее общий линейный деференциальный оператор с аналитическими коэфициентами порядка k с двумя независимыми переменными, т. е.

$$L_k \equiv \sum_{p+q \leqq k}^{p, q = 0, \ldots, k} A_{pq}(x, y) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q},$$

$f(x, y)$—заданная аналитическая функция.

При $n = 1$ мы получаем эллиптическое диференциальное уравнение второго порядка общего вида

$$\Delta u + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y).$$

При $n=2$ имеем уравнение

$$\Delta\Delta u + a\Delta u_x + b\Delta u_y + c\Delta u + e u_x + f u_y + g u = h(x, y).$$

К уравнениям последнего вида приводит, напр., изучение изгиба пластинки силами, лежащими в ее плоскости.

Частным видом уравнения (A) является также уравнение

$$\Delta^n u + a_1(x, y)\Delta^{n-1} u + a_2(x, y)\Delta^{n-2} u + \ldots + a_n(x, y) u = b(x, y),$$

где $a_k(x, y)$ и $b(x, y)$—аналитические функции.

Настоящая работа состоит из трех глав. В первой главе мы строим общее представление всех решений диференциального уравнения (A) при помощи аналитических функций одной комплексной переменной. Это представление осуществляется посредством некоторого линейного интегрального оператора, переводящего произвольные аналитические функции одной комплексной переменной в решения уравнения (A). При помощи названного «общего представления» мы строим далее так называемые «элементарные» решения уравнения (A) и посредством них доказываем известную теорему о том, что все решения этого уравнения являются аналитическими функциями.

Во второй главе мы даем применение «общего представления» к решению граничной задачи, когда на контуре области известны значения искомого решения уравнения (A) и всех его производных до $n-1$-го порядка по нормали границы; при этом мы ограничиваемся рассмотрением односвязной области. Для решения этой граничной задачи мы строим при помощи нашего «общего представления» методом акад. Н. И. Мусхелишвили интегральные уравнения Фредгольма.

При исследовании этих интегральных уравнений нам приходится пользоваться допущением существования решения поставленной граничной задачи, когда порядок диференциального уравнения выше второго. Поэтому заключительная, третья глава нашей работы посвящается доказательству теоремы существования упомянутой граничной задачи.

2. Аналитические и регулярные функции. Пусть $f(x, y, \ldots)$ функция переменных $x, y, \ldots$, заданная в некоторой области $Txy\ldots$ изменения этих переменных. Функция $f(x, y, \ldots)$ называется аналитической или голоморфной в области $Txy\ldots$, если она во всякой точке $(x_0, y_0, \ldots)$ этой области разлагается в ряд по положительным степеням разностей $x-x_0$, $y-y_0$, $\ldots$, который сходится для всех точек некоторой сферы с центром в точке $(x_0, y_0, \ldots)$. Этот ряд называется элементом аналитической функции, соответствующим точке $(x_0, y_0, \ldots)$. Замечательным свойством аналитических функций, отличающим их от остальных функций, является то, что аналитическое продолжение их возможно только един-

ственным образом, т. е. аналитическая функция вполне определяется одним каким-нибудь своим элементом.

Так, например, если $f(x, y)$—функция аналитическая в области T плоскости xy, то ее можно аналитически продолжить, притом единственным образом, в четырехмерную область комплексных переменных $x=x'+ix''$, $y=y'+iy''$, где $(x', y')\subset T$, а $|x''|$ и $|y''|$ достаточно малы.

Пусть теперь $f(x, y)$ какая-нибудь аналитическая функция комплексных переменных x и y в четырехмерной области T_{xy}. Рассмотрим далее две аналитические функции $\varphi(z, z')$ и $\psi(z, z')$ комплексных переменных z и z' в некоторой четырехмерной области $T_{zz'}$, которые удовлетворяют дополнительно следующим условиям:

1. $E\{\varphi(z, z'), \psi(z, z')\}\subset T_{xy}$, когда $(z, z')\subset T_{zz'}$, где E заменяет слово множество.

2. Двум различным точкам области $T_{zz'}$ соответствуют всегда две различные точки из области T_{xy}.

Тогда, если вместо x и y подставим в функцию $f(x, y)$ соответственно $\varphi(z, z')$ и $\psi(z, z')$, то полученная функция

$$F(z, z')=f[\varphi(z, z'), \psi(z, z')]$$

будет аналитической в области $T_{zz'}$.

Наряду с аналитическими функциями мы будем рассматривать более широкий класс функций, называемых регулярными. Функцию одной или многих переменных будем называть **регулярной**, если она непрерывна и допускает непрерывные производные до какого-нибудь конечного порядка. Причем высший порядок существования производной может изменяться сообразно с требованиями разбираемого вопроса.

Во избежании недоразумения надо отметить, что в русской литературе термин «регулярная функция» часто употребляется для обозначения аналитической функции одной комплексной переменной. Мы нигде не будем в этой работе пользоваться им в этом смысле.

3. **Введение комплексных переменных.** Вернемся теперь к нашему диференциальному уравнению и рассмотрим вначале уравнение без свободного члена, которое в дальнейшем будем обозначать через (A_0). Предположим, что коэфициенты этого диференциального уравнения являются аналитическими функциями, вообще говоря комплексными, переменных x и y в некоторой области T плоскости xy.

Всякую функцию $u(x, y)$, однозначную и непрерывную вместе со своими производными до $2n$-го порядка в области T и удовлетворяющую уравнению (A_0), будем называть *регулярным решением* этого уравнения. Решение, которое не удовлетворяет этим условиям будем называть *сингулярным.* Если в области T регулярное решение уравнения (A_0) непрерывно вместе со своими производными до $2n-1$-го порядка также в $T+S$, где S граница области T, то будем говорить, что решение регулярно в $T+S$.

Как мы указывали выше, область существования коэфициентов уравнения (A_0) можно расширить, а именно, мы можем считать, что коэфициенты уравнения (A_0) являются аналитическими функциями в некоторой области T^4 четырехмерного пространства комплексных переменных $x=x'+ix''$, $y=y'+iy''$; причем наша двумерная область T будет целиком находиться внутри четырехмерной области T^4. В дальнейшем мы будем считать переменные x и y комплексными, пока особо не будет оговорено противоположное.

Для нашей цели, как мы это скоро увидим, удобнее ввести вместо переменных x и y новые переменные, связанные с ними следующим образом:

$$z=x+iy, \quad z'=x-iy; \tag{3.1}$$

причем отметим здесь же, что z и z' вообще говоря не являются взаимно сопряженными. Таковыми они станут, очевидно, лишь тогда, когда x и y будут вещественными. В этом случае мы будем употреблять общепринятое обозначение $\bar{z}$ вместо z'.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}=i\frac{\partial}{\partial z}-i\frac{\partial}{\partial z'}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z'},$$

легко видеть, что диференциальный оператор $\mathfrak{L}_n$ примет вид

$$\mathfrak{L}_n\equiv 4^n\mathfrak{L}'_n,$$

где

$$\mathfrak{L}'_n\equiv\frac{\partial^{2n}}{\partial z^n\,\partial z'^n}+\sum_{k=1}^{n}L'_k\left[\frac{\partial^{2n-2k}}{\partial z^{n-k}\,\partial z'^{n-k}}\right];$$

причем

$$L'_k\equiv\sum_{p+q\leqq k}^{p,\,q=0,\,\ldots,\,k}B_{pq}(z,z')\,\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p\partial z'^q}.$$

$B_{pq}(z, z')$—аналитические функции переменных z и z', так как они выражаются линейно при помощи коэфициентов $A_{pq}(x, y)$ оператора $\mathfrak{L}_n$.

Диференциальное уравнение (A_0) в новых переменных принимает вид

$$\mathfrak{L}'_n(u) \equiv \frac{\partial^{2n} u}{\partial \zeta^n \partial \zeta'^n} + \sum_{k=1}^{n} L'_k \left[\frac{\partial^{2n-2k} u}{\partial \zeta^{n-k} \partial \zeta'^{n-k}} \right] = 0. \qquad (A'_0)$$

Этот переход от вещественных переменных x и y к комплексным —$x=x'+ix''$, $y=y'+iy''$ и затем, в силу преобразования (3.1), замена диференциального уравнения (A_0) уравнением (A'_0) возможна только при том условии, что решения (A_0) суть аналитические функции переменных x и y.

Вопрос об аналитическом характере решений диференциальных уравнений эллиптического типа был предметом исследований многих выдающихся ученых. Впервые на это обстоятельство обратил внимание É. Picard, который доказал, что *всякое регулярное решение линейного диференциального уравнения эллиптического типа с аналитическими коэфициентами является аналитической функцией*[1].

Из этой теоремы сразу вытекает законность перехода из вещественных переменных x и y к комплексным—ζ и ζ' и эквивалентность уравнений (A_0) и (A'_0).

Но ниже мы не будем опираться на эту теорему, а получим ее как следствие из наших исследований. Пока для нас важно знать лишь следующее: если искать только аналитические решения уравнения (A_0), то уравнения (A_0) и (A'_0) эквивалентны между собой.

В следующем параграфе мы построим такой линейный интегральный оператор, который дает все аналитические решения уравнения (A_0).

4. Интегральные операторы. n-гармонические функции. Пусть T и $\overline{T}$ конечные односвязные области на плоскости комплексной переменной ζ, симметричные относительно вещественной оси. Совокупность областей T и $\overline{T}$ называется цилиндрической областью четырехмерного пространства и обозначается так: $(T, \overline{T})$. Ниже мы будем предполагать, что функции $B_{pq}(\zeta, \zeta')$ являются аналитическими в области $(T, \overline{T})$, т. е. функции $B_{pq}(\zeta, \zeta')$ будем считать аналитическими, когда переменные ζ и ζ' изменяются соответственно в областях T и $\overline{T}$.

Рассмотрим теперь функции вида

$$\Gamma_n(\zeta, \zeta') = \sum_{k=0}^{n-1} [\zeta^k \psi_k(\zeta') + \zeta'^k \varphi_k(\zeta)], \qquad (4.1)$$

где $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\zeta')$ ($k=0, \ldots, n-1$) — какие угодно голоморфные функции соответственно в T и $\overline{T}$. Эти функции для любых голоморфных $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\zeta')$ удовлетворяют диференциальному уравнению

$$\Delta^n \Gamma_n = 0 \qquad (4.2)$$

[1] См. É. Picard. Journ. Éc. Polyt. 60 (1890), p. 89—105; Paris C. R. 121 (1891), p. 12—14; Acta Math. 25 (1902), p. 121—137.

или, что тоже самое, уравнению

$$\frac{\partial^{2n}\Gamma_n}{\partial z^n \partial z'^n}=0.$$

Как показано Ch. Riquier[2] и другими авторами, а также как это вытекает из настоящей работы, выражение (4.1) представляет самое общее решение диференциального уравнения (4.2). Это уравнение мы будем называть *n-гармоническим уравнением* и всякую функцию вида (4.1), являющуюся решением этого уравнения, — *n-гармонической функцией*. Мы ниже еще вернемся к уравнению (4.2).

Положим, что существует в области $(T, \overline{T})$ такая аналитическая функция $u(z, z')$, которая удовлетворяет уравнению (A'_0).

Тогда

$$\frac{\partial^{2n}u}{\partial z^n \partial z'^n}+\sum_{k=1}^{n} L'_k\left(\frac{\partial^{2n-2k}u}{\partial z^{n-k}\partial z'^{n-k}}\right)\equiv 0$$

для всех $z\subset T$ и $z'\subset\overline{T}$. Заменяя в этом равенстве z и z' через z_1 и z'_1 $(z_1\subset T,\ z'_1\subset\overline{T})$ и умножая затем обе части его на

$$\frac{1}{(n-1)!^2}(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}\,dz_1\,dz'_1,$$

получим

$$\frac{(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}\left[\frac{\partial^{2n}u}{\partial z_1^n\partial z_1'^n}+\sum_{k=1}^{n}L'_k\left(\frac{\partial^{2n-2k}u}{\partial z_1^{n-k}\partial z_1'^{n-k}}\right)\right]dz_1\,dz'_1\equiv 0.$$

Пусть (z_0, z'_0) $(z_0\subset T,\ z'_0\subset\overline{T})$ какая-нибудь фиксированная точка. Тогда интегрированием обоих частей последнего равенства будем иметь, что

$$\int_{z_0}^{z}dz_1\int_{z'_0}^{z'}\frac{(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}\,\frac{\partial^{2n}u}{\partial z_1^n\partial z_1'^n}\,dz'_1$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{p,q=0,\ldots,k\\ p+q\leq k}}\int_{z_0}^{z}dz_1\int_{z'_0}^{z'}\frac{(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}\,B_{pq}(z_1, z'_1)\frac{\partial^{2n-2k+p+q}u}{\partial z_1^{n-k+p}\partial z_1'^{n-k+q}}\,dz'_1\equiv 0$$

для любых z и z' $(z\subset T,\ z'\subset\overline{T})$.

---

[2] См. Ch. Riquier. Journ. de Math. V (1926), p. 297—393.

Интегрированием по частям легко устанавливается, что

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \frac{\partial^{2n} u}{\partial \zeta_1^{n} \partial \zeta_1'^{n}} d\zeta'_1 = u(\zeta, \zeta')$$

$+n$-гармоническая функция,

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{k0}(\zeta_1, \zeta'_1) \frac{\partial^{2n-k} u}{\partial \zeta_1^{n} \partial \zeta_1'^{n-k}} d\zeta'_1$$

$$= (-)^k \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \left\{ \frac{\partial^{2n-k}}{\partial \zeta_1^{n} \partial \zeta_1'^{n-k}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{k0}(\zeta_1, \zeta'_1) \right] \right\}_{\zeta_1=\zeta} u(\zeta, \zeta'_1)\, d\zeta'_1$$

$+n$-гармоническая функция,

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{0k}(\zeta_1, \zeta'_1) \frac{\partial^{2n-k} u}{\partial \zeta_1^{n-k} \partial \zeta_1'^{n}} d\zeta'_1$$

$$= (-)^k \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left\{ \frac{\partial^{2n-k}}{\partial \zeta_1^{n-k} \partial \zeta_1'^{n}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{0k}(\zeta_1, \zeta'_1) \right] \right\}_{\zeta_1'=\zeta'} u(\zeta_1, \zeta')\, d\zeta_1$$

$+n$-гармоническая функция,

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{pq}(\zeta_1, \zeta'_1) \frac{\partial^{2n-2k+p+q} u}{\partial \zeta_1^{n-k+p} \partial \zeta_1'^{n-k+q}} d\zeta'_1$$

$$= (-)^{p+q} \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} \frac{\partial^{2n-2k+p+q}}{\partial \zeta_1^{n-k+p} \partial \zeta_1'^{n-k+q}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} \right] u(\zeta_1, \zeta'_1)\, d\zeta'_1$$

$+n$-гармоническая функция,

при $p \neq 0$, $q \neq k$ или $p \neq k$, $q \neq 0$.

В силу этих формул легко найдем, что

$$u(\zeta, \zeta') + \int_{\zeta_0}^{\zeta} a(\zeta, \zeta'; \zeta_1) u(\zeta, \zeta_1) d\zeta_1 + \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1) u(\zeta, \zeta'_1) d\zeta'_1$$

$$+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) u(\zeta_1, \zeta'_1) d\zeta'_1 = \Gamma_n(\zeta, \zeta'), \tag{4.3}$$

где

$$a(\zeta, \zeta'; \zeta_1) = \sum_{k=1}^{n} (-)^k \left\{ \frac{\partial^{2n-k}}{\partial \zeta_1^{n-k} \partial \zeta_1'^{n}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1} (\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{0k}(\zeta_1, \zeta'_1) \right] \right\}_{\zeta_1'=\zeta'}, \tag{4.4}$$

$$a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1) = \sum_{k=1}^{n} (-)^k \left\{ \frac{\partial^{2n-k}}{\partial \zeta_1^{n} \partial \zeta_1'^{n-k}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1} (\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{k0}(\zeta_1, \zeta'_1) \right] \right\}_{\zeta_1=\zeta}, \tag{4.5}$$

$$b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p+q \leqq k} (-)^{p+q} \frac{\partial^{2n-2k+p+q}}{\partial \zeta_1^{n-k+p} \partial \zeta_1'^{n-k+q}} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1} (\zeta'-\zeta'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2} B_{pq}(\zeta_1, \zeta'_1) \right]; \tag{4.6}$$

причем вторая сумма в формуле (4.6) распространяется на все целые положительные значения p и q от 0 до k, для которых не имеет место одновременно одно из равенств $p=0$, $q=k$ или $q=0$, $p=k$. $\Gamma_n(\zeta, \zeta')$ обозначает n-гармоническую функцию, которую получаем в результате интегрирования по частям.

Отметим, что функции $a(\zeta, \zeta'; \zeta_1)$, $a'(\zeta, \zeta; \zeta'_1)$ и $b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$, как видно непосредственно из формул (4.4), (4.5) и (4.6), представляют n-гармонические функции относительно переменных ζ и ζ'; причем $a(\zeta, \zeta'; \zeta_1)$ —полином $n-1$-ой степени относительно ζ, $a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1)$—полином $n-1$-ой степени относительно ζ' и, наконец, $b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$—полином переменных ζ и ζ' не больше $n-1$-ой степени относительно каждой из них.

Уравнение (4·3) представляет немного обобщенный вид интегрального уравнения типа Вольтера в комплексной области. Но, несмотря на это, к этому интегральному уравнению можно применить весь формальный аппарат решения обыкновенных уравнений Вольтера в вещественной области [3].

Оператор, стоящий в левой части уравнения (4·3), отображает семейство аналитических функций двух комплексных переменных в области $(T, \bar{T})$ взаимно однозначно на самого себя. В частности, этот оператор переводит аналитические решения уравнения (A'_0) в n-гармонические функции, причем, двум различным аналитическим решениям уравнения (A'_0) соответствуют всегда две различные n-гормонические функции. Этот оператор мы назовем *первым интегральным оператором, соответствующим дифеpенциальному уравнению* (A_0) и обозначим его через $\mathfrak{A}$. Функции $a(\zeta, \zeta'; \zeta_1)$, $a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1)$ и $b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ назовем компонентами оператора $\mathfrak{A}$.

Найдем теперь решение уравнения (4·3). Это уравнение мы можем переписать в следующих двух видах:

$$u(\zeta, \zeta') + \int_{\zeta_0}^{\zeta} a(\zeta, \zeta'; \zeta_1) u(\zeta_1, \zeta')\, d\zeta_1 = v(\zeta, \zeta'),$$

$$u(\zeta, \zeta') + \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1) u(\zeta, \zeta'_1)\, d\zeta'_1 = w(\zeta, \zeta'),$$

где

$$v(\zeta, \zeta') = -\int_{\zeta'_0}^{\zeta'} a'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1) u(\zeta, \zeta'_1)\, d\zeta'_1 - \int_{\zeta'_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) u(\zeta_1, \zeta'_1)\, d\zeta'_1 + \Gamma_n(\zeta, \zeta'), \tag{4·7}$$

$$w(\zeta, \zeta') = -\int_{\zeta_0}^{\zeta} a(\zeta, \zeta'; \zeta_1) u(\zeta_1, \zeta')\, d\zeta_1 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) u(\zeta_1, \zeta'_1)\, d\zeta'_1 + \Gamma_n(\zeta, \zeta'). \tag{4·8}$$

---

[3] См. Г. Мюнтц. Интегральные уравнения, т. I, ГТТИ, 1934, стр. 154—164.

Решая эти уравнения (например методом последовательных приближений), получим

$$u(z, z') = v(z, z') - \int_{z_0}^{z} A(z, z'; z_1)\, v(z_1, z')\, dz_1, \tag{4.9}$$

$$u(z, z') = w(z, z') - \int_{z'_0}^{z'} A'(z, z'; z'_1)\, w(z, z'_1)\, dz'_1, \tag{4.10}$$

где $A(z, z'; z_1)$ и $A'(z, z'; z'_1)$ — разольвенты, соответствующие ядрам $a(z, z'; z_1)$ и $a'(z, z'; z'_1)$. В силу общего свойства резольвенты, они удовлетворяют следующим функциональным соотношениям:

$$\begin{aligned} A(z, z'; z_1) &= a(z, z'; z_1) - \int_{z_1}^{z} a(z, z'; t)\, A(t, z'; z_1)\, dt \\ &= a(z, z'; z_1) - \int_{z_1}^{z} a(t, z'; z_1)\, A(z, z'; t)\, dt \end{aligned} \tag{4.11}$$

и

$$\begin{aligned} A'(z, z'; z'_1) &= a'(z, z'; z'_1) - \int_{z'_1}^{z'} a'(z, z'; t')\, A'(z, t'; z'_1)\, dt' \\ &= a'(z, z'; z_1) - \int_{z'_1}^{z'} a'(z, t'; z'_1)\, A(z, z'; t')\, dt'. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Докажем теперь, что $A(z, z'; z_1)$ и $A'(z, z'; z'_1)$ суть аналитические функции своих аргументов, когда $z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$, $z_1 \subset T$ и $z'_1 \subset \overline{T}$. В самом деле,

$$A(z, z'; z_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z, z'; z_1), \tag{4.13}$$

где

$$a_0(z, z'; z_1) = a(z, z'; z_1), \quad a_m(z, z'; z_1) = \int_{z_1}^{z} a(z, z'; t)\; a_{m-1}(t, z'; z_1)\, dt,$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Так как каждая из функций $a_m(z, z'; z_1)$ есть аналитическая для $z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$, $z_1 \subset T$, и ряд (4.13), как это легко можно установить рассмотрением мажорантного ряда, сходится абсолютно и равномерно в каждой цилиндрической области $(T', \overline{T}')$, где T' и $\overline{T}'$ любые области соответственно внутри T и $\overline{T}$, то в силу теоремы Вейерштраса, которая легко распространяется также и на ряды функции многих комплексных переменных, получается, что сумма ряда (4.13), т. е. резольвента $A(z, z'; z_1)$, является аналитической внутри области $(T, \overline{T})$. Аналогично доказывается аналитичность — $A'(z, z'; z'_1)$ в области $(T, \overline{T})$.

Можно также показать, что A и A' удовлетворяют обыкновенным линейным диференциальным уравнениям.

В самом деле, из (4.4) и (4.5) вытекают, что

$$\frac{d^n a(z, z'; z_1)}{dz^n} = 0, \quad \frac{d^n a'(z, z'; z'_1)}{dz'^n} = 0 \tag{4.14}$$

при любых $z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$, $z_1 \subset T$, $z'_1 \subset \overline{T}$. Диференцируем первое соотношение (4.11) n раз по z. Тогда, в силу первого уравнения (4.14), легко получим искомое уравнение для $A(z, z'; z_1)$

$$\frac{d^n A(z, z'; z_1)}{dz^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} \left\{ \left[\frac{d^{k-1} a(z, z'; z_1)}{dz^{k-1}} \right]_{z_1 = z} A(z, z'; z_1) \right\} = 0. \tag{4.15}$$

Совершенно аналогично из (4.12), в силу второго уравнения (4.14), получим

$$\frac{d^n A'(z, z'; z'_1)}{dz'^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{n-k}}{dz'^{n-k}} \left\{ \left[\frac{d^{k-1} a'(z, z'; z'_1)}{dz'^{k-1}} \right]_{z'_1 = z'} A(z, z'; z'_1) \right\} = 0. \tag{4.16}$$

Подставляя выражения (4.7) и (4.8) соответственно в (4.9) и (4.10), после простых выкладок, получим

$$u(z, z') = \Gamma_n(z, z') - \int_{z_0}^{z} A(z, z'; z_1)\,\Gamma_n(z_1, z')\,dz_1 - \int_{z'_0}^{z'} a'(z, z'; z'_1)\,u(z, z'_1)\,dz'_1$$

$$- \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} \Big[b(z, z'; z_1, z'_1) - a'(z_1, z'; z'_1)\,A(z, z'; z_1)$$

$$- \int_{z_1}^{z} b(z_2, z'; z_1, z'_1)\,A(z, z'; z_2)\,dz_2 \Big] u(z_1, z'_1)\,dz'_1,$$

$$u(z, z') = \Gamma_n(z, z') - \int_{z'_0}^{z'} A'(z, z'; z'_1)\,\Gamma_n(z, z'_1)\,dz'_1 - \int_{z_0}^{z} a(z, z'; z_1)\,u(z_1, z')\,dz_1$$

$$-\int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} \Big[b(z, z'; z_1, z'_1) - a(z, z'_1; z_1)\,A'(z, z'; z'_1)$$

$$-\int_{z'_1}^{z'} b(z, z'_2; z_1, z'_1)\,A'(z, z'; z'_2)\,dz'_2 \Big] u(z_1, z'_1)\,dz'_1.$$

Сложив эти два равенства и приняв во внимание уравнение (4.3), получим

$$u(z, z') = \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} K(z, z'; z_1, z'_1)\,u(z_1, z'_1)\,dz'_1 + F(z, z'), \tag{4.17}$$

где

$$\begin{aligned} K(z, z'; z_1, z'_1) = {} & -b(z, z'; z_1, z'_1) + a'(z_1, z'; z'_1)\,A(z, z'; z_1) \\ & + a(z, z'_1; z_1)\,A'(z, z'; z'_1) + \int_{z_1}^{z} b(z_2, z'; z_1, z'_1)\,A(z, z'; z_2)\,dz_2 \\ & + \int_{z'_1}^{z'} b(z, z'_2; z_1, z'_1)\,A'(z, z'; z'_2)\,dz'_2, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} F(z, z') = {} & \Gamma_n(z, z') - \int_{z_0}^{z} A(z, z'; z_1)\,\Gamma_n(z_1, z')\,dz_1 \\ & - \int_{z'_0}^{z'} A'(z, z'; z'_1)\,\Gamma_n(z, z'_1)\,dz'_1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Очевидно $K(z, z'; z_1, z'_1)$ и $F(z, z')$ — аналитические функции своих аргументов при $z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$, $z_1 \subset T$, $z'_1 \subset \overline{T}$. Интегральные уравнения (4.3) и (4.17) эквиваленты между собой.

Пусть $H(z, z'; z_1, z'_1)$—резольвента ядра $K(z, z'; z_1, z'_1)$. Тогда искомое решение уравнения (4.3) будет

$$u(z, z') = F(z, z') + \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} H(z, z'; z_1, z'_1)\, F(z_1, z'_1)\, dz'_1. \tag{4.20}$$

Резольвента $H(z, z'; z_1, z'_1)$, согласно общей теории, удовлетворяет функциональным соотношениям

$$\begin{aligned} H(z, z'; z_1, z'_1) &= K(z, z'; z_1, z'_1) + \int_{z_1}^{z} dt \int_{z'_1}^{z'} K(z, z'; t, t')\, H(t, t'; z_1, z'_1)\, dt' \\ &= K(z, z'; z_1, z'_1) + \int_{z_1}^{z} dt \int_{z'_1}^{z'} K(t, t'; z, z')\, H(z, z'; t, t')\, dt'. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Нетрудно доказать, что $H(z, z'; t, t')$ представляет аналитическую функцию от своих аргументов, когда $z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$, $t \subset T$ и $t' \subset \overline{T}$.

Формула (4.20) представляет аналитическое решение интегрального уравнения (4.3) для всех значений z и z' ($z \subset T$, $z' \subset \overline{T}$) и для любых регулярных n-гармонических функций $\Gamma_n(z, z')$. Легко доказать, что этим исчерпываются все аналитические решения уравнения (4.3).

В силу (4.19), формула (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned} u(z, z') = \Gamma_n(z, z') &- \int_{z_0}^{z} A(z, z'; z_1)\, \Gamma_n(z_1, z')\, dz_1 \\ &- \int_{z'_0}^{z'} A'(z, z'; z'_1)\, \Gamma_n(z, z'_1)\, dz'_1 \\ &- \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} B(z, z'; z_1, z'_1)\, \Gamma_n(z_1, z'_1)\, dz'_1, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned} B(z, z'; z_1, z'_1) = -H(z, z'; z_1, z'_1) &+ \int_{z_1}^{z} H(z, z'; z_2, z'_1)\, A(z_2, z'; z_1)\, dz_2 \\ &+ \int_{z'_1}^{z'} H(z, z'; z_1, z'_2)\, A'(z, z'_2; z'_1)\, dz'_2. \end{aligned} \tag{4.22'}$$

Правая сторона (4.22), очевидно, представляет линейный однородный оператор, который переводит всякую регулярную n-гармоническую функцию в области $(T, \overline{T})$ в аналитическое решение диференциального уравнения (A'_0); причем, как нетрудно увидеть, двум различным n-гармоническим функциям соответствуют два различных аналитических решения уравнения (A'_0). Назовем этот оператор *вторым интегральным оператором, соответствующим диференциальному уравнению* (A_0) и обозначим его через $\mathfrak{A}^*$. Функции A, A' и B назовем компонентами этого интегрального оператора. Нетрудно видеть, что операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ взаимообратны, т. е. оператор $\mathfrak{A}$ переводит аналитические решения диференциального уравнения (A_0) в решения n-гармонического уравнения, а оператор $\mathfrak{A}^*$ переводит, обратно, n-гармонические функции в аналитические решения уравнения (A_0).

Компоненты оператора $\mathfrak{A}^*$ строятся, в общем случае методом последовательных приближений, при помощи компонентов интегрального оператора $\mathfrak{A}$ и, следовательно, выражаются окончательно при помощи коэфициентов исходного диференциального уравнения (A_0).

Придадим теперь формуле (4.22) другой вид, более удобный во многих случаях для нас в дальнейшем. n-гармоническая функция $\Gamma_n(\zeta, \zeta')$, входящая в формулу (4.22), как мы видели выше, имеет вид

$$\Gamma_n(\zeta, \zeta') = \sum_{k=0}^{n-1} [\zeta'^k \varphi_k(\zeta) + \zeta^k \psi_k(\zeta')], \tag{4.1}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\zeta')$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ произвольные голоморфные функции соответственно от ζ и ζ', когда $\zeta \subset T$ и $\zeta' \subset \overline{T}$. Не уменьшая общности, функции $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\zeta')$ можно подчинить следующим условиям[4], считая, что точка $(0, 0) \subset (T, \overline{T})$:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = \ldots = \varphi_k^{(k-1)}(0) = 0,\\
&\psi_k(0) = \psi_k'(0) = \ldots = \psi_k^{(k-1)}(0) = 0,\\
&J[\varphi_k^{(k)}(0) + \psi_k^{(k)}(0)] = 0,\\
&\quad (k = 0, \ldots, n-1),
\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

где J обозначает мнимую часть следующего за ним выражения. Если эти условия выполнены, то функции $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\zeta')$ определяются однозначно

[4] См. нашу статью в Тр. Тбил. Мат. Ин-та, т. II (1937), стр. 229 и Ch. Riquier. loc. cit. [2], p. 351.

при помощи $\Gamma_n(z, z')$. Считая условия (4.23) выполненными, мы можем положить

$$\varphi_k(z)=z^k\Phi_k(z),\quad \psi_k(z')=z'^k\Psi_k(z'),\quad J\{\Phi_k(0)+\Psi_k(0)\}=0,$$
$$(k=0, \ldots, n-1),$$

где $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(z')$—голоморфные функции. Тогда, в силу (4.1), будем иметь

$$\Gamma_n(z, z')=\sum_{k=0}^{n-1}(z z')^k[\Phi_k(z)+\Psi_k(z')]. \tag{4.24}$$

Подставляя это выражение в формулу (4.22), получим

$$\begin{aligned} u(z, z') =\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[& g_k(z, z')\Phi_k(z)+\int_{z_0}^{z} G_k(z, z';\ z_1)\Phi_k(z_1)\,dz_1 \\ & +g'_k(z, z')\Psi_k(z')+\int_{z'_0}^{z'} G'_k(z, z';\ z'_1)\Psi_k(z'_1)\,dz'_1\Bigg], \end{aligned} \tag{4.25}$$

где

$$g_k(z, z')=(z z')^k-z^k\int_{z'_0}^{z'} A'(z, z';\ z'_1)z'^k_1\,dz'_1, \tag{4.26}$$

$$g'_k(z, z')=(z z')^k-z'^k\int_{z_0}^{z} A(z, z';\ z_1)z_1^k\,dz_1, \tag{4.27}$$

$$G_k(z, z';\ z'_1)=-z'^k z_1^k A(z, z';\ z_1)-z_1^k\int_{z'_0}^{z'} B(z, z';\ z_1, z'_1)z'^k_1\,dz'_1, \tag{4.28}$$

$$G'_k(z, z';\ z'_1)=-z^k z'^k_1 A'(z, z';\ z'_1)-z'^k_1\int_{z_0}^{z} B(z, z';\ z_1, z'_1)z_1^k\,dz_1. \tag{4.29}$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение: *Если коэфициенты диференциального уравнения* (A'_0) *суть аналитические функции в области* $(T, \overline{T})$, *то все аналитические решения этого уравнения можно получить при помощи формулы* (4.25), *где* $\Phi_k(z)$ *и* $\Psi_k(z')$ $(k=0, \ldots, n-1)$—*произвольные голоморфные функции в областях* T *и* $\overline{T}$ *соответственно. При этом, двум раз-*

личным системам голоморфных функций $\Phi_k'(z)$, $\Psi_k'(z')$ *и* $\Phi_k''(z)$, $\Psi_k''(z')$ $(k=0, \ldots, n-1)$, *которые удовлетворяют дополнительно условиям*

$$J[\Phi_k'(0)+\Psi_k'(0)]=0, \quad J[\Phi_k''(0)+\Psi_k''(0)]=0,$$
$$(k=0, \ldots, n-1)$$

соответствуют два различных решения диференциального уравнения (A'_0).

Рассмотрим теперь неоднородное диференциальное уравнение (A). Чтобы получить все его аналитические решения, надо решить интегральное уравнение

$$\mathfrak{A}[u]\equiv\Gamma_n(z, z')+\int_{z_0}^{z} dz_1\int_{z'_0}^{z'}\frac{(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}F(z_1, z'_1)\,dz'_1,$$

где $\Gamma_n(z, z')$—произвольная n-гармоническая функция, а

$$F(z, z') = \frac{1}{4^n}f\left(\frac{z+z'}{2}, \frac{z-z'}{2i}\right).$$

Следовательно, всякое аналитическое решение этого уравнения будет иметь вид

$$u(z, z')=\mathfrak{A}^*[\Gamma_n(z, z')]+\mathfrak{A}^*[F_1(z, z')],$$

где

$$F_1(z, z')=\int_{z_0}^{z} dz_1\int_{z'_0}^{z'}\frac{(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}F(z_1, z'_1)\,dz'_1.$$

$\mathfrak{A}^*[F_1(z, z')]$, очевидно, представляет частное решение неоднородного уравнения (A).

Общее представление решений диференциальных уравнений эллиптического типа с двумя независимыми переменными при помощи голоморфных функций от одной комплексной переменной для линейных уравнений второго порядка и также $2n$-го порядка, линейного относительно оператора Лапласа, нами было получено еще раньше [5].

Для линейных уравнений второго порядка эллиптического типа другой вид представления решений при помощи голоморфных функций одной комплексной переменной дает также С. Б. Бергман [6]. Но формулы Бергмана значительно отличаются от наших; причем наши формулы лучше приспособлены для решения различных краевых задач, так как они, как это будет показано ниже, легко приводят к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

[5] См. наши работы: а) ДАН СССР, т. XVI, № 3 (1937), стр. 163—168. б) ДАН СССР, т. XVII, № 6 (1937), стр. 295—299. в) loc. cit. [4].

[6] См. Ст. Бергман. а) ДАН СССР, т. XV, № 5 (1937), стр. 227—230, б) Paris C. R. 205 (1937), p. 1198; в) Paris C. R. 205 (1937), p. 1360—1365, г) Мат. Сб., т. 2 (44), № 6, стр. 1169—1198.

4. Элементарные решения. Аналитический характер решений уравнения (A_0). До сих пор мы занимались построением аналитических решений уравнения (A_0) и показали, что все аналитические решения этого уравнения представляются формулой (4.22) при помощи произвольных n-гармонических функций $\Gamma_n(z, z')$, которые в свою очередь выражаются при помощи $2n$ аналитических функций одной комплексной переменной. Теперь мы переходим к доказательству того, что всякое регулярное решение уравнения (A_0) есть аналитическая функция в области T. Для этой цели мы построим некоторый класс сингулярных решений уравнения (A_0), которых, по терминологии J. Hadamard'a, назовем *элементарными решениями*.

Рассмотрим n-гармоническую функцию

$$\gamma_n(z, z'; z_1, z'_1) = -\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1}\lg[(z-z_1)(z'-z'_1)], \quad (5.1)$$

где (z_1, z'_1)—какая-нибудь фиксированная точка в области $(T, \overline{T})$. Если $z=x+iy$, $z'=x-iy$, $z_1=\xi+i\eta$, $z'_1=\xi-i\eta$, то γ_n примет вид

$$\gamma_n(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{n-1}\lg[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-1)!^2}R^{2n-2}\lg\frac{1}{R} \qquad (R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}). \quad (5.2)$$

Эта функция называется *элементарным решением* n-гармонического уравнения. Функция γ_n является аналитической для всех значений x и y за исключением $x=\xi$ и $y=\eta$. В этой точке она и все ее производные до $2n$—3-го порядка непрерывны и обращаются в нуль. Производные $2n$—2-го и $2n$—1-го порядков обращаются в бесконечность, соответственно, как $\lg\frac{1}{R}$ и $\frac{1}{R}$. Функция γ_n играет для n-гармонического уравнения примерно такую же роль, как $\lg\frac{1}{R}$ для уравнения Лапласа. Построим теперь при помощи $\gamma_n(x, y; \xi, \eta)$ искомые элементарные решения для уравнения (A_0).

Будем считать (z_1, z'_1), попрежнему, фиксированной точкой в области $(T, \overline{T})$ и рассмотрим функцию

$$\gamma_n^*(z, z'; z_1, z'_1) = \mathfrak{A}^*[\gamma_n(z, z'; z_1, z'_1)]$$

$$= \gamma_n(z, z'; z_1, z'_1) - \int_{z_1}^{z} A(z, z'; t)\gamma_n(t, z'; z_1, z'_1)\,dt \quad (5.3)$$

$$-\int_{z'_1}^{z'} A'(z, z'; t')\gamma_n(z, t'; z_1, z'_1)\,dt' - \int_{z_1}^{z} dt\int_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')\gamma_n(t, t'; z_1, z'_1)\,dt'.$$

Обозначим, по порядку, интегралы правой части (5.3) через J_1, J_2 и J_3. В силу (5.1) напишем

$$J_1=\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\int_{z_1}^{z}A(z,z';t)(t-z_1)^{n-1}\lg(t-z_1)\,dt$$

$$+\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\lg(z'-z'_1)\int_{z_1}^{z}A(z,z';t)(t-z_1)^{n-1}dt.$$

Интегрированием по частям легко найдем

$$J_1=\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\lg(z-z_1)\int_{z_1}^{z}A(z,z';t)(t-z_1)^{n-1}dt$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\int_{z_1}^{z}\frac{dt}{t-z_1}\int_{z_1}^{t}A(z,z';\tau)(\tau-z_1)^{n-1}d\tau$$

$$+\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\lg(z'-z'_1)\int_{z_1}^{z}A(z,z';t)(t-z_1)^{n-1}dt$$

$$=\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\lg[(z-z_1)(z'-z'_1)]\int_{z_1}^{z}A(z,z';t)(t-z_1)^{n-1}dt$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1}\int_{z_1}^{z}\frac{dt}{t-z_1}\int_{z_1}^{t}A(z,z';\tau)(\tau-z_1)^{n-1}d\tau. \qquad (5.4)$$

Совершенно аналогично получим

$$J_2=\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z-z_1)^{n-1}\lg[(z-z_1)(z'-z'_1)]\int_{z'_1}^{z'}A'(z,z';t')(t'-z'_1)^{n-1}dt'$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z-z_1)^{n-1}\int_{z'_1}^{z'}\frac{dt'}{t'-z'_1}\int_{z'_1}^{t'}A'(z,z';\tau')(\tau'-z'_1)^{n-1}d\tau'. \qquad (5.5)$$

Рассмотрим теперь интеграл J_3:

$$J_3 = \frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)\lg(t-z_1)^{n-1}dt$$

$$+\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}\lg(t'-z'_1)^{n-1}dt'$$

$$=\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\lg(z-z_1)\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}dt'$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z'_1}^{z'} dt' \int\limits_{z_1}^{z}\frac{dt}{t-z_1}\int\limits_{z_1}^{t} B(z, z'; \tau, t')(\tau-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}d\tau$$

$$+\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\lg(z'-z'_1)\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}dt'$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'}\frac{dt'}{t'-z'_1}\int\limits_{z'_1}^{t'} B(z, z'; t, \tau')(t-z_1)^{n-1}(\tau'-z'_1)^{n-1}d\tau'$$

$$=\frac{1}{4\pi(n-1)!^3}\lg[(z-z_1)(z'-z'_1)]\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}dt'$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z'_1}^{z'} dt' \int\limits_{z_1}^{z}\frac{dt}{t-z_1}\int\limits_{z_1}^{t} B(z, z'; \tau, t')(\tau-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1}d\tau$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}\int\limits_{z_1}^{z} dt \int\limits_{z'_1}^{z'}\frac{dt'}{t'-z'_1}\int\limits_{z'_1}^{t'} B(z, z'; t, \tau')(t-z_1)^{n-1}(\tau'-z'_1)^{n-1}d\tau'. \qquad (5.6)$$

В силу формул (5.4), (5.5) и (5.6), выражение для γ_n^* примет вид

$$\gamma_n^*(z, z'; z_1, z'_1) = -\frac{1}{2} V_n(z, z'; z_1, z'_1) \lg[(z-z_1)(z'-z'_1)] + W_n(z, z'; z_1, z'_1), \tag{5.7}$$

где

$$V_n(z, z'; z_1, z'_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(n-1)!^2} \Bigg[(z-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1} - \int_{z_1}^{z} A(z, z'; t)(t-z_1)^{n-1}(z'-z'_1)^{n-1} dt - \int_{z'_1}^{z'} A'(z, z'; t')(z-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1} dt' - \int_{z_1}^{z} dt \int_{z'_1}^{z'} B(z, z'; t, t')(t-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1} dt' \Bigg], \tag{5.8}$$

$$W_n(z, z'; z_1, z'_1) = -\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z'-z'_1)^{n-1} \int_{z_1}^{z} \frac{dt}{t-z_1} \int_{z_1}^{t} A(z, z'; \tau)(\tau-z_1)^{n-1} d\tau$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2}(z-z_1)^{n-1} \int_{z'_1}^{z'} \frac{dt'}{t'-z'_1} \int_{z'_1}^{t'} A(z, z'; \tau')(\tau'-z'_1)^{n-1} d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi(n-1)!^2} \int_{z'_1}^{z'} dt' \int_{z_1}^{z} \frac{dt}{t-z_1} \int_{z_1}^{t} B(z, z'; \tau, t')(\tau-z_1)^{n-1}(t'-z'_1)^{n-1} d\tau$$

$$-\frac{1}{4\pi(r-1)!^2} \int_{z_1}^{z} dt \int_{z'_1}^{z'} \frac{dt'}{t'-z'_1} \int_{z'_1}^{t'} B(z, z'; t, \tau')(t-z_1)^{n-1}(\tau'-z'_1)^{n-1} d\tau'.$$

Функция $V_n(z, z'; z'_1, z'_1)$, как видно из (5.8) [сравните с формулой (4.20)], есть аналитическое решение уравнения (A_0), а $W_n(z, z'; z_1, z'_1)$ — определенная аналитическая функция. Функция $V_n(z, z'; z_1, z'_1)$ в точке (z_1, z'_1), как нетрудно видеть, обращается в нуль вместе со своими производными до $2n$—3-го порядка.

Нетрудно видеть, что функция $\gamma_n^*(z, z'; z_1, z'_1)$ удовлетворяет следующим условиям: в точке (z_1, z'_1) функция γ_n^* и все ее производные до $2n$—3-го порядка обращаются в нуль. Производные $2n$ — 2-го и $2n$ — 1-го порядков обращаются в бесконечность, соответственно, как $\lg\frac{1}{R}$ и $\frac{1}{R}$.

Функция $\gamma_n^*(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ как раз и есть искомое элементарное решение уравнения (A_0). Она, как нетрудно видеть, является аналитической функцией для всех значений своих аргументов за исключением $\zeta=\zeta_1$ и $\zeta'=\zeta'_1$. Если мы теперь прибавим к W_n произвольное регулярное решение уравнения (A_0), опять получим элементарное решение того же уравнения.

До сих пор мы предполагали, что ζ, ζ', ζ_1 и ζ'_1 суть произвольные точки из областей T и $\overline{T}$. Теперь пусть будут

$$\zeta'=\bar{\zeta} \text{ и } \zeta'_1=\bar{\zeta}_1.$$

Тогда x, y, ξ и η будут вещественными и

$$\gamma_n^*(x, y; \xi, \eta)=V_n(x, y; \xi, \eta)\lg\frac{1}{R}+W_n(x, y; \xi, \eta). \tag{5.9}$$

Очевидно, что $\gamma_n^*(x, y; \xi, \eta)$ будет аналитической функцией относительно каждой пары аргументов (x, y) и (ξ, η) за исключением $x=\xi$, $y=\eta$.

Элементарные решения вида (5.9) построил впервые É. Picard (7 для линейного уравнения второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c(x, y)\,u=0.$$

Для линейных уравнений общего вида доказательство существования элементарных решений дали: D. Hilbert (8, E. Holmgren (9, J. Hadamard (10, E. E. Levi (11 и др. В частности, E. E. Levi указал конструктивный способ построения элементарных решений линейных эллиптических уравнений $2n$-го порядка при помощи интегральных уравнений Фредгольма.

Вопросу построения элементарных решений в последнее время уделяется большое внимание как для уравнений эллиптического, так и для гиперболического и параболического типов. Это объясняется тем, что при помощи соответственно подобранных элементарных решений легко составляются решения тех или иных граничных задач диференциальных уравне-

(7 См. É. Picard. Paris C. R. 112 (1891), p. 685—688; Paris C. R. 136 (1903), p. 1293—1296.

(8 См. D. Hilbert. Göttingen Nachrichten, 1904, p. 213—259; см. также книгу: D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

(9 См. E. Holmgren. Math. Ann. 58 (1904), p. 404—412.

(10 См. J. Hadamard. Deuxième Congrès international des Mathématiciens, Paris, 1901; Notice scientifique, Paris, Hermann, 1901.

(11 См. E. E. Levi. Rendiconti Palermo, 24 (1907), p. 275—317.

ний (задачи Дирихле, Неймана, Коши и др.). Фундаментальный результат в этом направлении принадлежит J. Hadamard'у[12], который построил элементарные решения линейных уравнений второго порядка с произвольным числом независимых переменных и затем применил их к решению проблемы Коши и других смешанных задач этого вида. Другие способы решения аналогичных задач предложили Mathison[13] и академик С. Л. Соболев[14]. Результаты J. Hadamard'a на случай уравнений высших порядков обобщил N. Théodoresco[15].

Используем теперь элементарные решения для доказательства аналитического характера решений диференциального уравнения (A_0). Для этой цели переходим к выводу некоторых вспомогательных формул, обобщающих классические формулы Грина.

Пусть u и v—две произвольные функции вещественных переменных x и y в области T, непрерывные вместе со своими частными производными до $2n$-го порядка в $T+S$, где S—граница области T. В силу формулы Грина, можем написать

$$\iint_T v\,\Delta^n u\,dT = -\int_S\left(v\frac{d\Delta^{n-1}u}{d\nu} - \frac{dv}{d\nu}\Delta^{n-1}u\right)ds + \iint_T \Delta v\,\Delta^{n-1}u\,dT,$$

$$\iint_T \Delta v\,\Delta^{n-1}u\,dT = -\int_S\left(\Delta v\frac{d\Delta^{n-2}u}{d\nu} - \frac{d\Delta v}{d\nu}\Delta^{n-2}u\right)ds + \iint_T \Delta^2 v\,\Delta^{n-2}u\,dT,$$

. . . . ,

$$\iint_T \Delta^{n-1}v\,\Delta u\,dT = -\int_S\left(\Delta^{n-1}v\frac{du}{d\nu} - \frac{d\Delta^{n-1}v}{d\nu}u\right)ds + \iint_T u\,\Delta^n v\,dT,$$

где ν—внутренняя нормаль кривой S; причем, относительно S достаточно предположить, что она в каждой точке имеет непрерывную касательную. Сложением этих равенств получим

$$\iint_T (v\Delta^n u - u\Delta^n v)\,dT = -\sum_{m=0}^{n-1}\int_S\left(\Delta^m v\frac{d\Delta^{n-m-1}u}{d\nu} - \frac{d\Delta^m v}{d\nu}\Delta^{n-m-1}u\right)ds. \qquad (5.10)$$

(12 См. J. Hadamard. Le problème de Cauchy..., Paris, 1932.

(13 См. Mathison. Math. Ann. 107 (1933), S. 400—419.

(14 См. С. Л. Соболев. Мат. Сбор. 1 (43) (1936), № 1, стр. 39—72.

(15 См. N. Théodoresco. Ann. Sc. de l'Université de Jassy, XXIV, partie I, Fasc. 2 (1933), p. 293—321.

Эта формула принадлежит A. Gutzmer'у[16]. Она представляет непосредственное обобщение классической формулы Грина

$$\iint\limits_T (v\Delta u - u\Delta v)\, dT = -\int\limits_S \left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} \right) ds.$$

Последовательным применением формул интегрального исчисления

$$\iint\limits_T \frac{\partial u}{\partial x}\, dxdy = -\int\limits_S u\cos(\nu, x)\, ds, \quad \iint\limits_T \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_S u\cos(\nu, y)\, ds,$$

можем получить формулу

$$\begin{aligned}\iint\limits_T vL_k(\Delta^{n-k}u)\, dT &= \sum_{p+q\leqq k}^{p,\, q=0,\, \ldots,\, k} \iint\limits_T vA_{pq}\frac{\partial^{p+q}\Delta^{n-k}u}{\partial x^p \partial y^q}\, dT \\ &= \int\limits_S D_{2n-k-1}[u, v]\, ds + \sum_{p+q\leqq k}^{p,\, q=0,\, \ldots,\, k} (-)^{p+q} \iint\limits_T u\frac{\partial^{p+q}\Delta^{n-k}(vA_{pq})}{\partial x^p \partial y^q}\, dT,\end{aligned} \tag{5.11}$$

где D_{2n-k-1} обозначает сумму произведений вида

$$\frac{\partial^{l_1+l_2}v}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}}\, \frac{\partial^{l_3+l_4}u}{\partial x^{l_3}\partial y^{l_4}}, \quad l_1+l_2+l_3+l_4 \leqq 2n-k-1.$$

помноженных на определенные функции длины дуги S. В силу (5.10) и (5.11) получим

$$\iint\limits_T [v\mathfrak{L}_n(u) - u\mathfrak{M}_n(v)]\, dT = \int\limits_S u\frac{d\Delta^{n-1}v}{d\nu}\, ds + \int\limits_S D'_{2n-1}[u, v]\, ds, \tag{5.12}$$

где

$$\mathfrak{M}_n(v) = \Delta^n v + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p+q\leqq k}^{p,\, q=0,\, \ldots,\, k} (-)^{p+q} \frac{\partial^{p+q}\Delta^{n-k}(vA_{pq})}{\partial x^p \partial y^q}, \tag{5.13}$$

---

[16] См. A. Gutzmer. Journ. de Math. (4) 6 (1890), p. 405—422.

а $D'_{2n-1}[u, v]$ содержит производных от v не выше $2n-2$-го порядка. Диференциальный оператор $\mathfrak{M}_n$ называется сопряженным—с диференциальным оператором $\mathfrak{L}_n$. Диференциальное уравнение

$$\mathfrak{M}_n(v)=0$$

имеет тот же вид, что и уравнение (A_0). Следовательно, к этому уравнению мы можем применить теорию интегрирования, изложенную выше.

Пусть теперь $\gamma_n^*(x, y; \xi, \eta)$ есть элементарное решение уравнения $\mathfrak{M}_n(v)=0$. Пусть в формуле (5.12) u есть какое-нибудь регулярное решение диференциального уравнения (A_0), а v равно γ_n^*. Тогда, применяя обыкновенный способ выделения особенности, легко получим следующую важную формулу:

$$u(\xi, \eta)=\int\limits_S D_{2n-1}[u, \gamma_n^*(x, y; \xi, \eta)]\, ds.$$

Из этой формулы вытекает теорема:

Если коэфициенты диференциального уравнения (A_0) — *аналитические функции в области T, то всякое регулярное решение этого уравнения является также аналитической функцией в этой области.*

На основании результатов, полученных в двух последних параграфах, мы можем высказать следующую основную теорему:

Основная теорема. *Если коэфициенты уравнения* (A_0)—*аналитические функции в области T плоскости xy, то всякое регулярное решение этого уравнения является аналитической функцией в этой области и все эти решения имеют вид*

$$u(x, y)=\mathfrak{A}^*[\Gamma_n(z, z')],$$

где $\Gamma_n(z, z')$—произвольная регулярная n-гармоническая функция; причем двум различным n-гармоническим функциям всегда соответствуют два различных решения уравнения (A_0). *Если u—какое-нибудь регулярное решение уравнения* (A_0), *то соответствующая ему n-гармоническая функция будет*

$$\Gamma_n(z, z')=\mathfrak{A}[u(z, z')].$$

6. Диференциальное уравнение, линейное относительно оператора Лапласа. Случай постоянных коэфициентов[17]. Рассмотрим теперь более подробно диференциальное уравнение вида

$$\mathfrak{L}^*_n(u)\equiv\Delta^n u+A_1(x, y)\Delta^{n-1}u+\cdots+A_n(x, y)u=0. \qquad (A_0^*)$$

---

[17] См. нашу статью, loc. cit. [4].

В этом случае уравнение (A'_0) принимает, очевидно, вид

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial \zeta^n \partial \zeta'^n} + B_1(\zeta, \zeta') \frac{\partial^{2(n-1)} u}{\partial \zeta^{n-1} \partial \zeta'^{n-1}} + \cdots + B_n(\zeta, \zeta') u = 0, \qquad (A'^{*}_0)$$

где

$$B_k(\zeta, \zeta') = \frac{1}{2^{2k}} A_k\left(\frac{\zeta+\zeta'}{2}, \frac{\zeta-\zeta'}{2i}\right) \quad (k=0, \ldots, n-1).$$

В силу формул (4.4), (4.5) и (4.6) имеем

$$a \equiv 0, \ a' \equiv 0, \quad b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^{2k}}{\partial \zeta_1{}^k \partial \zeta'_1{}^k} \left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-k-1} (\zeta'-\zeta'_1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!^2} B_{n-k}(\zeta_1, \zeta'_1) \right] \right\}$$

и, следовательно, интегральное уравнение (4.3) принимает вид

$$u(\zeta, \zeta') + \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) u(\zeta_1, \zeta'_1) d\zeta'_1 = \Gamma_n(\zeta, \zeta'). \qquad (6.1)$$

Очевидно, $A \equiv A' \equiv 0$, $K(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) = -b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ и, следовательно, решение уравнения (6.1), в силу (4.22), дается формулой

$$u(\zeta, \zeta') = \Gamma_n(\zeta, \zeta') - \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} H_0(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) \Gamma_n(\zeta_1, \zeta'_1) d\zeta'_1, \qquad (6.2)$$

где $H_0(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ — функция, удовлетворяющая функциональным соотношениям

$$H_0(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) = b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} dt \int_{\zeta'_1}^{\zeta'} b(\zeta, \zeta'; t, t') H_0(t, t'; \zeta_1, \zeta'_1) dt'$$

$$= b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1) - \int_{\zeta_1}^{\zeta} dt \int_{\zeta'_1}^{\zeta'} b(t, t'; \zeta_1, \zeta'_1) H_0(\zeta, \zeta'; t, t') dt'. \qquad (6.3)$$

Так как $b(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ есть n-гармоническая функция, то, в силу (6.2), будем иметь, что $H_0(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$ удовлетворяет диференциальному уравнению

$$\frac{\partial^{2n} H_0}{\partial \zeta^n \partial \zeta'^n} + B_1(\zeta, \zeta') \frac{\partial^{2n-2} H_0}{\partial \zeta^{n-1} \partial \zeta'^{n-1}} + \cdots + B_n(\zeta, \zeta') H_0 = 0$$

при любых $\zeta_1 \subset T$ и $\zeta'_1 \subset \overline{T}$.

Рассмотрим семейство характеристических плоскостей диференциального уравнения (A_0)

$$\Pi \equiv E\{\zeta \subset T,\ \zeta' = c_2 = \text{const}\},\quad \Pi' \equiv E\{\zeta = c_1 = \text{const},\ \zeta' \subset \overline{T}\}.$$

Эти характеристики пересекаются в точке $(c_1, c_2) \subset (T, \overline{T})$. Назовем задачей Гурса для диференциального уравнения (A_0) следующую задачу: *пусть заданы на характеристиках* Π *и* Π' *значения искомого решения* (A_0) *и ее производных*

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta'},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta'^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \zeta'^{n-1}}\quad \text{на } \Pi$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \zeta^{n-1}}\quad \text{на } \Pi'.$$

Найти решение уравнения (A_0), *которое на характеристиках* Π *и* Π' *удовлетворяет заданным условиям.*

Как нетрудно видеть, этими заданиями решение уравнения (A_0^*) определяется вполне [18].

Из соотношения (6.3) мы сможем найти на характеристиках, проходящих через точку (ζ_1, ζ'_1), те данные, которые требуются в задаче Гурса для определения функции $H_0(\zeta, \zeta'; \zeta_1, \zeta'_1)$. Таким образом $H_0(\zeta, \zeta'; \zeta'_1, \zeta'_1)$ можно построить при помощи решения определенной задачи Гурса для диференциального уравнения (A_0^*); причем данные на характеристиках, проходящих через точку (ζ_1, ζ'_1), зависят лишь от коэфициентов диференциального уравнения (A_0^*).

Возьмем частный вид диференциального уравнения (A_0^*)

$$\Delta^n u + a_1 \Delta^{n-1} u + \cdots + a_n u = 0, \tag{6.4}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$—постоянные; причем предполагаем, что $a_n \neq 0$. Если перейдем к новым переменным ζ и ζ', то уравнение (6.4) примет вид

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial \zeta^n \partial \zeta'} + b_1 \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial \zeta^{n-1} \partial \zeta'^{n-1}} + \cdots + b_n u = 0,$$

где

$$b_k = \frac{a_k}{2^{2k}}\quad (k = 1, \ldots, n).$$

[18] См. нашу статью, loc. cit. [4].

В этом случае, как нетрудно видеть, компоненты оператора $\mathfrak{A}$ имеют вид

$$a \equiv 0, \ a' \equiv 0, \ b = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{(z-z_1)^{k-1}(z'-z'_1)^{k-1}}{(k-1)!^2}$$

и все решения уравнения (6.4), в силу (6.2), будут иметь вид

$$u(z, z') = \Gamma_n(z, z') - \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{z'_0}^{z'} H_0(z, z'; z_1, z'_1)\, \Gamma_n(z_1, z'_1)\, dz'_1,$$

где $\Gamma_n(z, z')$ попрежнему обозначает произвольную n-гармоническую функцию.

Из (6.3) легко получаем, что

$$H_0(z, z'; z_1, z'_1) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{[(z-z_1)(z'-z'_1)]^m}{m!^2}, \tag{6.5}$$

где коэфициенты c_m определяются следующими рекурентными соотношениями:

$$c_0 = b_1, \ c_m = b_{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1} b_{k+1} c_{m-k-1}, \ \text{при } m = 1, \ldots, n-1$$

и

$$c_m = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} c_{m-k-1}, \ \text{при } m \geqq n.$$

Если $z' = \bar{z}$, $z'_1 = \bar{z}_1$, то $(z-z_1)(z'-z'_1) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2$ и, следовательно, $H_0(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1)$ будет функцией r^2. Но мы знаем, что $H_0(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1)$ удовлетворяет диференциальному уравнению (6.4) и, следовательно, она есть одно из регулярных решений этого уравнения, зависящее только от r^2 $(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2})$. Но такие решения уравнения (6.4), как мы ниже покажем, можно выразить при помощи функций Бесселя.

Нетрудно видеть, что функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{6.6}$$

удовлетворяет также уравнению

$$\Delta^k u + (-)^{k-1} \lambda^{2k} u = 0,$$

где k принимает целые положительные значения, λ—постоянный параметр.

Если λ есть корень уравнения

$$\chi^{2n}-a_1\chi^{2n-2}+\cdots(-)^n a_n=0, \tag{6.7}$$

то, очевидно, всякое решение уравнения (6.6) будет вместе с тем решением уравнения (6.4). Следовательно, функции

$$J_m(\lambda r)\,\frac{\cos m\vartheta}{\sin m\vartheta}\quad (m=0,\ 1,\ \ldots)$$

являются решениями уравнения (6.4), когда λ пробегает значения корней уравнения (6.7).

В частности, $J_0(\lambda_k r)$ представляют линейно-независимые решения уравнения (6.4), зависящие только от r^2, где λ_k — корни уравнения (6.7), отличные друг от друга по абсолютному значению. Их число, очевидно, не превосходит n. Рассмотрим два случая: 1°. Число корней уравнения (6.7), отличных друг от друга по абсолютному значению, равно n и 2°. Это число меньше n.

Случай 1°. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни уравнения (6.7), отличные друг от друга по абсолютному значению.

Тогда мы будем иметь n линейно-независимых регулярных решений уравнения (6.4), зависящих лишь от r^2,

$$J_0(\lambda_1 r),\ J_0(\lambda_2 r),\ \ldots,\ J_0(\lambda_n r).$$

Мы докажем, что в этом случае

$$H_0=d_1 J_0(\lambda_1 r)+d_2 J_0(\lambda_2 r)+\cdots+d_n J_0(\lambda_n r). \tag{6.8}$$

В самом деле, из (6.5) имеем

$$H_0\Big|_{r=0}=c_0,\ \frac{dH_0}{d(r^2)}\Big|_{r=0}=c_1,\ \ldots,\frac{d^{n-1}H_0}{d(r^2)^{n-1}}\Big|_{r=0}=\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}. \tag{6.9}$$

Из (6.8) имеем

$$\frac{d^kH_0}{d(r^2)^k}\Big|_{r=0}=\frac{(-)^k}{2^{2k}k!}\left[d_1\lambda_1^{2k}+d_2\lambda_2^{2k}+\cdots+d_n\lambda_n^{2k}\right]. \tag{6.10}$$

Удовлетворяя теперь условиям (6.9) выражением (6.8), в силу (6.10), получим

$$d_1\lambda_1^{2k}+d_2\lambda_2^{2k}+\cdots+d_n\lambda_n^{2k}=(-)^k\,2^{2k}c_k \tag{6.11}$$
$$(k=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Из этой системы, которая всегда разрешима, найдем числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Таким образом, найдено выражение для H_0 при помощи функций Бесселя нулевого порядка.

Случай 2°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m<n)$ — корни уравнения (6.7), отличные друг от друга по абсолютному значению. Пусть $\alpha_k \geqq 1$ — кратность корня λ_k. Тогда за линейно-независимые частные решения, соответствующие корню λ_k, можно взять функции

$$\left.\frac{d^l J_0(\lambda r)}{d(\lambda^2)^l}\right|_{\lambda=\lambda_k} \quad (l=0, \ldots, \alpha_k-1,\ k=1, \ldots, m).$$

Но, в силу свойства бесселевых функций, имеем

$$\frac{d^l J_0(\lambda r)}{d(\lambda^2)^l}=r^{2l}\frac{d^l J_0(\lambda r)}{d(\lambda^2 r^2)^l}=\left(-\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{r}{\lambda}\right)^l J_l(\lambda r).$$

Таким образом, за линейно-независимые частные решения в этом случае можно брать функции

$$J_0(\lambda_k r),\ \left(\frac{r}{\lambda_k}\right)J_1(\lambda_k r),\ \ldots,\ \left(\frac{r}{\lambda_k}\right)^{\alpha_k-1}J_{\alpha_k-1}(\lambda_k r)$$

$$(k=1, \ldots, m;\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n).$$

Введем новое обозначение

$$Y_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k-l}=\left(\frac{r}{\lambda_k}\right)^{\alpha_k-l-1}J_{\alpha_k-l-1}(\lambda_k r)$$

$$(l=0, \ldots, \alpha_k-1;\ k=1, \ldots, m).$$

Тогда H_0 можно представить так

$$H_0=d'_1 Y_1+d'_2 Y_2+\cdots+d'_n Y_n;$$

причем постоянные d'_k определяются из системы

$$d'_1 Y_1^{(k)}(0)+d'_2 Y_2^{(k)}(0)+\cdots+d'_n Y_n^{(k)}(0) = \frac{c_k}{k!}$$

$$\left(k=0, \ldots, n-1;\quad Y_l^{(k)}=\frac{d^k Y_l}{d(r^2)^k}\right),$$

которая, очевидно, всегда имеет решение, так как система функции $Y_k(r^2)$— линейно-независимая. Таким образом, и в этом общем случае найдено выражение H_0 при помощи бесселевых функций.

Рассмотрим в качестве частного случая колебательное уравнение (6.6). Оно получается из (6.4) при $n=1$ и $a_1=\lambda^2$. В этом случае, как нетрудно видеть,

$$H_0=\frac{\lambda^2}{4}J_0(\lambda r)=\frac{\lambda^2}{4}J_0[\lambda\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta'-\zeta'_1)}].$$

Следовательно, всякое решение уравнения (6.6) имеет вид

$$u(\zeta,\zeta')=\Gamma_1(\zeta,\zeta')-\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}d\zeta_1\int\limits_{\zeta'_0}^{\zeta'}J_0[\lambda\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta'-\zeta'_1)}]\,\Gamma_1(\zeta_1,\zeta'_1)\,d\zeta'_1,$$

где $\Gamma_1(\zeta,\zeta')$ есть произвольная гармоническая функция.

Общее представление решений колебательного уравнения можно использовать для нахождения общего представления решений уравнений плоского упругого колебания при помощи двух голоморфных функций одной комплексной переменной [19].

7. Диференциальные уравнения с вещественными коэфициентами. До сих пор мы проводили рассуждения таким образом, что наши выводы одинаково приложимы к диференциальным уравнениям как с комплексными, так и вещественными коэфициентами. Формулы (4.22) или (4.25) нам дают все решения уравнения (A_0) как комплексные, так и вещественные.

Сделаем теперь следующее ограничение. Пусть все коэфициенты диференциального уравнения (A_0) принимают вещественные значения, когда переменные x и y принимают вещественные значения и будем искать все вещественные регулярные решения этого диференциального уравнения.

Прежде чем итти дальше, рассмотрим сначала некоторые простые свойства аналитических функций вещественных аргументов x и y.

Если дана какая-нибудь аналитическая функция вещественных переменных x и y, то мы можем ее рассмотреть как функцию взаимно сопряженных переменных $\zeta=x+iy$, $\bar{\zeta}=x-iy$. Пусть теперь $f(\zeta,\bar{\zeta})$ — какая-нибудь аналитическая функция в области T, которая может быть как вещественной, так и комплексной. Введем следующее обозначение: если $f(\zeta,\zeta')$ есть

[19] См. нашу статью, loc. cit. [5 a].

аналитическая функция двух комплексных переменных ζ и ζ', то $\bar{f}(\bar{\zeta}, \bar{\zeta}')$ будет обозначать функцию, с ней сопряженную, т. е. $\bar{f}(\bar{\zeta}, \bar{\zeta}')$ есть функция, которая получится, если в функции $f(\zeta, \zeta')$ везде заменим i через $-i$. В частности, если $\zeta'=\bar{\zeta}$, то функция, сопряженная с $f(\zeta, \bar{\zeta})$, будет $\bar{f}(\bar{\zeta}, \zeta)$.

Докажем теперь несколько лемм, которые понадобятся нам ниже[20].

Лемма 1. *Если $f(\zeta, \bar{\zeta})$ и $g(\zeta, \bar{\zeta})$ суть взаимно сопряженные комплексные аналитические функции, то*

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+i\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

суть также взаимно сопряженные функции.

В самом деле, по условию

$$f(\zeta, \bar{\zeta})=A(x, y)+iB(x, y)$$

и

$$g(\zeta, \bar{\zeta})=A(x, y)-iB(x, y),$$

где A и B — вещественные функции вещественных переменных x и y. Отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}-i\frac{\partial A}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x}-i\frac{\partial B}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+i\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x}+i\frac{\partial B}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}\right).$$

Сравнивая эти два выражения, сразу убеждаемся в справедливости нашей леммы.

В частности, из этой леммы вытекают следующие следствия:

Следствие 1. *Пусть $f(\zeta, \bar{\zeta})$ — вещественная аналитическая функция в области T. Тогда $\frac{\partial^p f}{\partial \zeta^p}$, $\frac{\partial^p f}{\partial \bar{\zeta}^p}$ $(p \geqq 1)$ суть взаимно сопряженные функции.*

---

[20] См. Ch. Riquier. Loc. cit. [3], p. 328—331.

Следствие 2. *Если $f(z, \bar{z})$ и $g(z, \bar{z})$—взаимно сопряженные аналитические функции в области T, то производные $\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\mu}\, \partial \bar{z}^{\nu}}$ и $\frac{\partial^{\mu+\nu} g}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\mu}}$ при любых целых μ и ν ($\mu \geqq 0$, $\nu \geqq 0$) будут взаимно сопряженными функциями.*

Лемма 2. *Пусть $f(z, \bar{z})$ — вещественная аналитическая функция в области T, тогда производная $\frac{\partial^{2n} f}{\partial z^{n}\, \partial \bar{z}^{n}}$ —также вещественная функция.*

В самом деле,

$$\frac{\partial^{2n} f}{\partial z^{n}\, \partial \bar{z}^{n}} = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f = \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n} f.$$

Что доказывает нашу лемму.

Лемма 3. *Пусть $f(z, \bar{z})$ — вещественная аналитическая функция в области T. Тогда производные $\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{z\partial^{\mu}\, \partial \bar{z}^{\nu}}$ и $\frac{a^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\mu}}$ суть взаимно сопряженные функции.*

В самом деле, пусть $\mu > \nu$. Тогда

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\mu}} = \frac{\partial^{\mu-\nu}}{\partial \bar{z}^{\mu-\nu}} \left(\frac{\partial^{2\nu} f}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\nu}}\right),$$

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\mu}\, \partial \bar{z}^{\nu}} = \frac{\partial^{\mu-\nu}}{\partial \bar{z}^{\mu-\nu}} \left(\frac{\partial^{2\nu} f}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\nu}}\right).$$

Отсюда, в силу леммы 1 и следствия 1 леммы 1, получаем доказательство нашей леммы.

Легко доказать также следующее обратное предложение.

Лемма 4. *Для того, чтобы аналитическая в области T функция $f(z, \bar{z})$ была бы вещественной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1. *В какой-нибудь точке области T для любого целого $m \geqq 0$ производная $\frac{\partial^{2m} f}{\partial z^{m}\, \partial \bar{z}^{m}}$ принимает вещественное значение.*

2. *Для любых неравных целых μ и ν ($\mu \geqq 0$, $\nu \geqq 0$) в рассматриваемой точке производные $\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\mu}\, \partial \bar{z}^{\nu}}$ и $\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial z^{\nu}\, \partial \bar{z}^{\mu}}$ принимают взаимно сопряженные значения.*

Необходимость этих условий нами доказана выше. Теперь надо показать их достаточность.

Пусть (x_0, y_0) — точка области T, где условия леммы 4 выполнены.

Пусть $\zeta_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{\zeta}_0 = x_0 - iy_0$. Вблизи этой точки наша функция, очевидно, разлагается в ряд вида

$$\bar{f}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} (\zeta - \zeta_0)^{\mu} (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)^{\nu}, \tag{7.1}$$

где

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\ \nu!} \left[\frac{\partial^{\mu+\nu} \bar{f}}{\partial \zeta^{\mu}\, \partial \bar{\zeta}^{\nu}} \right]_{\substack{\zeta = \zeta_0, \\ \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_0.}}$$

Но, в силу условия нашей леммы,

$$a_{\mu\nu} = \bar{a}_{\nu\mu} \tag{7.2}$$

при любых μ и ν. Переходя в (7.1) к сопряженным, получим

$$\bar{f}(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\infty} \bar{a}_{\mu\nu} (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)^{\mu} (\zeta - \zeta_0)^{\nu}.$$

Меняя здесь местами индексы суммирования μ и ν и принимая во внимание (7.2), будем иметь

$$\bar{f}(\bar{\zeta}, \zeta) = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} (\zeta - \zeta_0)^{\mu} (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)^{\nu} = f(\zeta,\ \bar{\zeta}).$$

Что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 5. *Пусть $f(\zeta,\ \bar{\zeta})$—вещественная аналитическая функция в области T. Тогда интеграл*

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} f(\zeta_1,\ \bar{\zeta}_1)\, d\bar{\zeta}_1 \quad (\zeta, \zeta_0 \subset T)$$

есть также вещественная функция.

Эта лемма легко распространяется и на тот случай, когда подинтегральное выражение является вещественной аналитической функцией, зависящей от большего числа аргументов. Например, пусть имеем вещественную функцию $f(\zeta,\ \bar{\zeta};\ \zeta_1,\ \bar{\zeta}_1;\ t,\ \bar{t})$ $(\zeta \subset T,\ \zeta_1 \subset T,\ t \subset T)$. Тогда

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} f(\zeta,\ \bar{\zeta};\ \zeta_1,\ \bar{\zeta}_1;\ t,\ \bar{t})\, d\bar{\zeta}_1$$

есть также вещественная функция для любых ζ и t $(\zeta \subset T,\ t \subset T)$.

Лемма 6. *Пусть* $f(z, \bar{z}, z_1, t)$ *и* $g(z, \bar{z}, \bar{z}_1, \bar{t})$ *суть две сопряженные комплексные аналитические функции в области* T, *зависящие от трех точек* z, z_1, t. *Тогда интегралы*

$$\int_{z_0}^{z} f(z, \bar{z}, z_1, t)\, dz_1, \quad \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} g(z, \bar{z}, \bar{z}_1, \bar{t})\, d\bar{z}_1$$

являются также взаимно сопряженными функциями для любых z *и* t.

Пусть точки z, z_1 и t лежат в малой окрестности точки z_0. Тогда можем написать

$$f(z, \bar{z}, z_1, t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu (z, \bar{z}, t)(z_1 - z_0)^\mu,$$

$$g(z, \bar{z}, \bar{z}_1, \bar{t}) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu (z, \bar{z}, \bar{t})(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)^\mu.$$

В силу условия леммы

$$a_\mu (z, \bar{z}, t) = \bar{b}_\mu (\bar{z}, z, t) \quad (\mu = 0, 1, \ldots). \tag{7.3}$$

Далее

$$\int_{z_0}^{z} f(z, \bar{z}, z_1, t)\, dz_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu (z, \bar{z}, t) \frac{(z - z_0)^{\mu+1}}{\mu+1},$$

$$\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} g(z, \bar{z}, \bar{z}_1, \bar{t})\, d\bar{z}_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu (z, \bar{z}, \bar{t}) \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Но, в силу (7.3), очевидно, правые части этих равенств являются взаимносопряженными. Что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к нашему диференциальному уравнению (A_0) и положим, что все коэфициенты его суть вещественные аналитические функции в области T. Ищем только вещественные решения этого уравнения. Мы выше доказали, что все регулярные решения этого уравнения являются аналитическими функциями в области T и что все они даются формулой (4.22) или формулой (4.25). Но эти формулы дают, вообще говоря, комплексные решения и, следовательно, наша задача теперь состоит в том, чтобы из этого общего класса решений уравнения (A_0) выделить класс всех вещественных решений.

Докажем следующие предложения:

Теорема 1. *Если коэфициенты уравнения* (A_0) *суть вещественные аналитические функции в области* T, *то коэфициенты* $B_{pq}(\zeta, \bar\zeta)$ *и* $B_{qp}(\zeta, \bar\zeta)$ *уравнения* (A'_0) *являются взаимносопряженными.*

В самом деле, для любой вещественной аналитической функции $u(\zeta, \bar\zeta)$ производные $\frac{\partial^{2n-2k+p+q}u}{\partial\zeta^{n-k+p}\,\partial\bar\zeta^{n-k+q}}$ и $\frac{\partial^{2n-2k+p+q}u}{\partial\bar\zeta^{n-k+p}\,\partial\zeta^{n-k+q}}$, кофициентами которых являются соответственно B_{pq} и B_{qp}, в силу леммы 3, суть взаимносопряженные функции. Кроме того, $\mathfrak{L}'_n(u)=2^{2n}\mathfrak{L}_n(u)$ представляет всегда вещественную функцию. Отсюда легко заключаем справедливость нашей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\zeta, \bar\zeta$ *и* $\zeta_1, \bar\zeta_1$ *суть, соответственно, взаимносопряженные комплексные переменные и коэфициенты уравнения* (A_0)*—вещественные функции. Тогда компоненты* $a(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)$ *и* $a'(\zeta,\bar\zeta;\bar\zeta_1)$ *интегрального оператора* $\mathfrak{A}$ *суть взаимносопряженные комплексные функции, а компонент* $b(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1,\bar\zeta_1)$*—вещественная функция.*

Формулы (4.4) и (4.5) дают

$$a(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)=\sum_{k=1}^{n}(-)^k\left\{\frac{\partial^{n-k}}{\partial\zeta_1^{n-k}\,\partial\bar\zeta_1^{n}}\left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\bar\zeta-\bar\zeta_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}B_{0k}(\zeta_1,\bar\zeta_1)\right]\right\}_{\bar\zeta_1=\bar\zeta}$$

и

$$a'(\zeta,\bar\zeta;\bar\zeta_1)=\sum_{k=1}^{n}(-)^k\left\{\frac{\partial^{n-k}}{\partial\zeta_1^{n}\,\partial\bar\zeta_1^{n-k}}\left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\bar\zeta-\bar\zeta_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}B_{k0}(\zeta_1,\bar\zeta_1)\right]\right\}_{\zeta_1=\zeta}.$$

Отсюда, в силу предыдущей теоремы и следствия 2 леммы 1, сразу получается справедливость первой части нашей теоремы. В дальнейшем мы будем вместо $a'(\zeta,\bar\zeta;\bar\zeta_1)$ писать $\bar a(\bar\zeta,\zeta;\bar\zeta_1)$.

Далее, согласно (4.6)

$$b(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1,\bar\zeta_1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum(-)^{p+q}\frac{\partial^{2n-2k+p+q}}{\partial\zeta_1^{n-k+p}\,\partial\bar\zeta_1^{n-k+q}}\left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\bar\zeta-\bar\zeta_1)^{n-1}}{(n-2)!^2}B_{pq}(\zeta_1,\bar\zeta_1)\right].$$

Так как в эту сумму наряду с членом вида

$$\frac{\partial^{2n-2k+p+q}}{\partial\zeta_1^{n-k+p}\,\partial\bar\zeta_1^{n-k+q}}\left[\frac{(\zeta-\zeta_1)^{n-1}(\bar\zeta-\bar\zeta_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}B_{pq}(\zeta_1,\bar\zeta_1)\right]$$

всегда войдет член ему сопряженный, то, очевидно, $b(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1,\bar\zeta_1)$ всегда будет вещественной функцией. Что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если коэфициенты диференциального уравнения* (A_0) *суть вещественные аналитические функции и* $u(\zeta, \bar\zeta)$ *есть вещественное аналитическое* *решение этого уравнения, то оператор* $\mathfrak{A}$, *взятый от функции* $u(z, \bar{z})$, *всегда будет давать вещественную n-гармоническую функцию.*

В самом деле

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z, \bar{z}) = \mathfrak{A}[u(z, \bar{z})] = u(z, \bar{z}) - \int_{z_0}^{z} a(z, \bar{z}; z_1)\, u(z_1, \bar{z})\, dz_1 \\ - \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{a}(z, \bar{z}; \bar{z}_1)\, u(z, \bar{z}_1)\, d\bar{z}_1 - \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} b(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1)\, u(z_1, \bar{z}_1)\, d\bar{z}_1.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Но так как $a(z, \bar{z}; z_1)\, u(z_1, \bar{z})$ и $\bar{a}(\bar{z}, z; \bar{z}_1)\, u(z, \bar{z}_1)$ суть взаимносопряженные функции, то, в силу леммы 6, второй и третий члены (7.4) будут также взаимносопряженными функциями. Последний член (7.4) является, в силу леммы 5, вещественной, так как подинтегральная функция является вещественной. Отсюда сразу вытекает вещественность $\Gamma_n(z, \bar{z})$. Что и требовалось доказать.

Таким образом мы имеем, что все n-гармонические функции, соответствующие вещественным решениям уравнения (A_0), являются также вещественными. Ниже мы докажем и обратное предложение.

Теорема 4. *Если коэфициенты диференциального уравнения* (A_0) *суть ещественные аналитические функции, то компоненты* $A(z, \bar{z}; z_1)$ *и* $A'(z; \bar{z}, \bar{z}_1)$ *оператора* $\mathfrak{A}^*$ *суть взаимносопряженные комплексные функции, а компонент* $B(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1)$ *есть вещественная функция.*

В самом деле

$$A(z, \bar{z}; z_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z, \bar{z}; z_1),$$

$$A'(z, \bar{z}; \bar{z}_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m(z, \bar{z}; \bar{z}_1),$$

где

$$a_0 = a(z, \bar{z}; z_1),\quad a'_0 = a'(z, \bar{z}; \bar{z}_1),$$

$$a_m(z, \bar{z}; z_1) = \int_{z_1}^{z} a(z, \bar{z}; t)\, a_{m-1}(t, \bar{z}; z_1)\, dt,$$

$$a'_m(z, \bar{z}; \bar{z}_1) = \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}} a'(z, \bar{z}; \bar{t})\, a'_{m-1}(\bar{t}, z; \bar{z}_1)\, d\bar{t}$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Но мы выше увидели, что $a(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1)$ и $a'(\zeta, \bar{\zeta}; \bar{\zeta}_1)$ суть взаимносопряженные комплексные функции. Тогда в силу леммы 6 получаем, что $a_m(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1)$ и $a'_m(\zeta, \bar{\zeta}; \bar{\zeta}_1)$ суть также взаимносопряженные функции при любом $m > 0$. Отсюда легко заключаем взаимносопряженность функций $A(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1)$ и $A'(\zeta, \bar{\zeta}; \bar{\zeta}_1)$. В дальнейшем вместо $A'(\zeta, \bar{\zeta}; \bar{\zeta}_1)$ мы будем писать $\bar{A}(\bar{\zeta}, \zeta; \zeta_1)$. Совершенно аналогичным рассуждением доказывается вещественность функции $B(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1, \bar{\zeta}_1)$.

Легко доказать теперь следующие теоремы:

Теорема 5. *Если $\Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta})$ есть вещественная n-гармоническая функция в области T, то функция*

$$u(\zeta, \bar{\zeta}) = \mathfrak{A}^*[\Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta})] = \Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta}) - \int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1)\, \Gamma_n(\zeta_1, \bar{\zeta})\, d\zeta_1$$
$$- \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} \bar{A}(\bar{\zeta}, \zeta; \bar{\zeta}_1)\, \Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta}_1)\, d\bar{\zeta}_1 - \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} B(\zeta, \bar{\zeta}; \zeta_1, \bar{\zeta}_1)\, \Gamma_n(\zeta_1, \bar{\zeta}_1)\, d\zeta_1 \tag{7.5}$$

представляет вещественное решение уравнения (A_0).

Теорема 6. *Для того, чтобы n-гармоническая функция*

$$\Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta\bar{\zeta})^k [\varphi_k(\zeta) + \psi_k(\bar{\zeta})], \tag{7.6}$$

где $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\bar{\zeta})$ — голоморфные функции от ζ и $\bar{\zeta}$, была бы вещественной, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_k(\zeta)$ и $\psi_k(\bar{\zeta})$ были бы взаимносопряженными с точностью до аддитивной вещественной постоянной, т. е. $\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})$ $= \psi_k(\bar{\zeta}) + c_k$, где c_k вещественные постоянные.

Следовательно, вещественная n-гармоническая функция может быть написана в виде

$$\Gamma_n(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta\bar{\zeta})^k [\varphi_k(\zeta) + \bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})], \tag{7.6a}$$

причем, очевидно, что мнимые части функции $\varphi_k(\zeta)$ могут быть взяты совершенно произвольно в какой-нибудь фиксированной точке. Беря начало координат внутри T, мы будем в дальнейшем полагать, что

$$J[\varphi_k(0)] = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1). \tag{7.7}$$

Внося теперь вместо $\Gamma_n(z, \bar{z})$ в (7·5) выражение (7.6а), получим

$$u(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[g_k(z, \bar{z}) \varphi_k(z) + \int_{z_0}^{z} G_k(z, \bar{z}; z_1) \varphi_k(z_1) dz_1 \right]$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{g}_k(\bar{z}, z) \bar{\varphi}_k(\bar{z}) + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{G}_k(\bar{z}, z; \bar{z}_1) \bar{\varphi}_k(\bar{z}_1) d\bar{z}_1 \right], \tag{7.8}$$

где $g_k(z, \bar{z})$, $\bar{g}_k(\bar{z}, z)$ и $G_k(z, \bar{z}; z_1)$, $\bar{G}_k(\bar{z}, z; \bar{z}_1)$ суть соответственно взаимносопряженные комплексные функции и определяются формулами

$$g_k(z, \bar{z}) = (z\bar{z})^k - z^k \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \bar{A}(\bar{z}, z; \bar{z}_1) \bar{z}_1^{\,k} \, d\bar{z}_1, \tag{7.9}$$

$$G_k(z, \bar{z}; z_1) = -z^k A(z, \bar{z}; z_1) z_1^{\,k} - \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} B(z, \bar{z}; z_1, \bar{z}_1) z_1^{\,k} \bar{z}_1^{\,k} d\bar{z}_1 \tag{7.10}$$

$$(k = 0, \ldots, n-1).$$

Резюмируя полученные результаты, можем высказать следующую теорему:

Теорема 7. *Пусть коэфициенты диференциального уравнения* (A_0) *суть вещественные аналитические функции в односвязной области T. Тогда всякое вещественное регулярное решение этого уравнения есть аналитическая функция в области T и все эти решения представляются формулой* (7.8), *где* $\varphi_k(z)$ ($k = 0, \ldots, n-1$)—*произвольные голоморфные функции в области T; причем, двум различным системам функции* $\varphi_k(z)$ ($k = 0, \ldots, n-1$), *удовлетворяющим условиям* (7·7), *соответствуют два различных решения уравнения* (A_0).

Выясним теперь характер поведения функций $\varphi_k(z)$, входящих в формулу (7.8), на границе области T, в зависимости от характера поведения соответствующего им решения диференциального уравнения (A_0).

Пусть S замкнутая кривая, заданная уравнением

$$x = x(s),\ y = y(s)\ [0 \leqq s \leqq l;\ x(s+l) = x(s),\ y(s+l) = y(s)],$$

где s—длина дуги кривой, а l—длина всей кривой S. Если $x(s)$, $x'(s)$, ..., $x^{(k)}(s)$, $y(s)$, $y'(s)$, ..., $y^{(k)}(s)$ существуют и непрерывны в промежутке $0 \leqq s \leqq l$, где k целое положительное число или нуль, то будем говорить, что кривая S есть класса C_k. Кроме того, если $x^{(j)}(s)$ и $y^{(j)}(s)$ ($j = 0, \ldots, k$)

удовлетворяют некоторому условию Hölder'a, то мы будем говорить, что кривая S есть класса $C_k h$. Если область T ограничена кривой класса C_k или $C_k h$, то мы будем говорить, что область T есть соответственно класса C_k или $C_k h$.

Если $f(x, y)$ есть функция непрерывная в $T+S$ вместе со своими производными до k-го порядка, то мы будем говорить, что функция $f(x, y)$ есть класса C_k в $T+S$.

Если функция $\varphi(s)$ непрерывна вместе со своими производными до k-го порядка на S, то мы скажем, что функция $\varphi(s)$ есть класса C_k на S. Если функция класса C_k в $T+S$ или на S удовлетворяет вместе со своими производными до k-го порядка условиям Hölder'a, то мы скажем, что эти функции суть класса $C_k h$, соответственно, в $T+S$ или на S. Мы будем говорить иногда, что кривая S регулярна, если $x(s)$, $y(s)$ и все их производные до некоторого конечного порядка непрерывны, не фиксируя при этом определенно класс кривой S, который может изменяться в зависимости от характера разбираемого вопроса.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть область T—класса $C_{2n-1}h$. Пусть коэфициенты диференциального уравнения* (A_0) *суть вещественные аналитические функции в $T+S$. Пусть $u(x, y)$—регулярное решение уравнения* (A_0) *класса $C_{2n-1}h$ в $T+S$. Тогда соответствующее этому решению голоморфные функции $\varphi_k(z)$ $(k=0, \ldots, n-1)$ будут класса $C_n h$ в $T+S$.*

Пусть $\Gamma_n(z, \bar{z})$—n-гармоническая функция, соответствующая функции $u(z, \bar{z})$. В силу формулы (4.3) эта n-гармоническая функция будет, очевидно, класса C_{2n-1} в $T+S$. Но, с другой стороны, мы имеем

$$\Gamma_n(z, \bar{z})=\sum_{k=0}^{n-1}(z\bar{z})^k[\varphi_k(z)+\bar{\varphi}_k(\bar{z})], \tag{7.6}$$

где $\varphi_k(z)$ $(k=0, \ldots, n-1)$—функции голоморфные в области T, соответствующие $u(z, \bar{z})$. Но из (7.6) получим

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{n-1}\varphi_{n-1}(z)]=\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\partial^{2n-1}\Gamma_n(z, \bar{z})}{\partial z^n\,\partial\bar{z}^{n-1}}.$$

Отсюда сразу получаем, что $\varphi_{n-1}(z)$ есть функция класса $C_n h$ в $T+S$. Этим теорема доказана.

8. Приближение решений диференциального уравнения (A_0) при помощи его частных решений. Общее представление решений диференциального уравнения (A_0) может быть использовано для решения различных вопросов, связанных с этим уравнением.

В частности, при помощи этого общего представления теперь докажем, что всякое регулярное решение диференциального уравнения (A_0) может быть равномерно приближено посредством определенного вида частных решений того же уравнения. Для определенности рассмотрим лишь диференциальное уравнение (A_0) с вещественными коэфициентами и вещественные решения этого уравнения.

Рассмотрим следующие частные решения диференциального уравнения (A_0):

$$u_{km}(z,\bar{z})=g_k(z,\bar{z})z^m+\int_{z_0}^{z}G_k(z,\bar{z};\ z_1)z_1^m dz_1 + \bar{g}_k(\bar{z},z)\bar{z}^m+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\bar{G}_k(\bar{z},z;\ \bar{z}_1)\bar{z}_1^m d\bar{z}_1, \tag{8.1}$$

$$v_{km}(z,\bar{z})=i\left[g_k(z,\bar{z})z^m+\int_{z_0}^{z}G_k(z,\bar{z};\ z_1)z_1^m dz_1 - \bar{g}_k(\bar{z},z)\bar{z}^m-\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}G_k(\bar{z},z;\ \bar{z}_1)\bar{z}_1^m d\bar{z}_1\right] \tag{8.2}$$

$$(k=0,\ \ldots,\ n-1;\ m=0,\ 1,\ \ldots),$$

которые, как нетрудно видеть, получаются из формулы (7.8), если положить в ней соответственно

$$\varphi_0=\cdots\ \varphi_{k-1}=\varphi_{k+1}=\cdots\varphi_{n-1}=0,\quad \varphi_k=z^m$$

и

$$\varphi_0=\cdots=\varphi_{k-1}=\varphi_{k+1}=\cdots\varphi_{n-1}=0,\quad \varphi_k=iz^m,$$

где $m\geqq 0$ есть целое число.

Рассмотрим линейные агрегаты вида

$$w_N=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{N}(a_{km}u_{km}+b_{km}v_{km})\quad (N=0,\ 1,\ \ldots), \tag{8.3}$$

где a_{km} и b_{km} вещественные постоянные. Очевидно w_N представляют также частные решения уравнения (A_0). Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть коэфициенты диференциального уравнения* (A_0) *суть аналитические функции в* $T+S$ *и* $u(x, y)$ *есть аналитическое решение этого уравнения в* $T+S$. *Тогда существует последовательность* w_N *линейных агрегатов вида* (8.3), *которая равномерно сходится к* $u(x, y)$ *в* $T+S$. *Другими словами: всякое регулярное решение диференциального уравнения* (A_0) *с аналитическими коэфициентами может быть равномерно приближено посредством решений того же уравнения.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi_{km}(z)$ $(k=0, \ldots, n-1;\ m=0, 1, \ldots)$ — *последовательности голоморфных функций, которые равномерно сходятся к функциям* $\varphi_k(z)$ *в области* T. *Тогда последовательность частных решений* w_m *уравнения* (A_0), *соответствующая функциям* $\varphi_{km}(z)$, *также равномерно сходится в области* T *к предельной функции* w, *которая является решением уравнения* (A_0) *и соответствует голоморфным функкиям* $\varphi_k(z)$.

Пусть $T'+S'$ целиком лежит внутри T и

$$|g_k(z, \bar{z})|<M, \quad |G_k(z, \bar{z}; z_1)|<M \tag{8.4}$$

$$(k=0, \ldots, n-1),$$

ткогда $z\subset T'+S'$. Пусть, далее, δ есть диаметр области T. Тогда, как нерудно видеть, из формулы (7.8) имеем

$$|w_m-w_l| \leqq 2M(1+\delta)\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Max}|\varphi_{km}(z)-\varphi_{kl}(z)|, \tag{8.5}$$

где

$$\begin{aligned} w_m = \sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[& g_k(z,\bar{z})\,\varphi_{km}(z)+\int_{z_0}^{z} G_k(\bar{z}, z;\ \bar{z}_1)\,\varphi_{km}(z_1)\,dz_1 \\ & +\bar{g}_k(\bar{z}, z)\,\bar{\varphi}_{km}(\bar{z})+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\bar{G}_k(\bar{z}, z;\ \bar{z}_1)\,\bar{\varphi}_{km}(\bar{z}_1)\,d\bar{z}_1\Bigg]. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Из неравенства (8.5) непосредственно вытекает наша лемма.

Переходим теперь к доказательству нашей теоремы.

Пусть $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)$ суть голоморфные функции, соответствующие $u(z, \bar{z})$. Очевидно эти функции будут регулярными в $T+S$.

Но, согласно классической теореме C. Runge[21], существует последовательность полиномов

$$P_{kN}=\sum_{m=0}^{N} c_{km}^{N}\zeta^{m},\quad c_{km}^{N}=a_{km}^{N}+ib_{km}^{N}$$

$$(k=0,\ \ldots,\ n-1;\ N=0,\ 1,\ \ldots),$$

которые равномерно апроксимируют функции $\varphi_k(\zeta)$ в $T+S$. Тогда, в силу предыдущей леммы, функции

$$w_N=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{N}\Big[\, c_{km}^{N} g_k(\zeta,\bar{\zeta})\,\zeta^{m}+c_{km}^{N}\int_{\zeta_0}^{\zeta} G_k(\zeta,\bar{\zeta};\ \zeta_1)\,\zeta_1^{m}\,d\zeta_1$$

$$+\bar{c}_{km}^{N}\bar{g}_k(\bar{\zeta},\zeta)\,\bar{\zeta}^{m}+\bar{c}_{km}^{N}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} \bar{G}_k(\bar{\zeta},\zeta;\ \bar{\zeta}_1)\,\bar{\zeta}_1^{m}\,d\bar{\zeta}_1\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{N}\left[a_{km}^{N}\,u_{km}+b_{km}^{N}\,v_{km}\right]$$

будут равномерно апроксимировать функцию u. Что и требовалось доказать[22].

Глава II

Приложение общего представления решений диференциального уравнения (A_0) к решению краевых задач.

Если математики 18-го и первой половины 19-го столетий (Эйлер, Даламбер, Лагранж, Коши и др.) придавали большое значение построению общих решений диференциальных уравнений и изобретали способы для нахождения таковых, то со второй половины 19-го столетия намечается значительное охлаждение интереса математиков к этим вопросам. Это объясняется тем, что в теории диференциальных уравнений в центре внимания

[21] См. C. Runge. Acta Math. 6 (1885), p. 229—244; см. также J. L. Walsh. Mém. Sc. Math., Fasc. LXXIII.

[22] Аналогичные теоремы для линейных уравнений второго порядка, исходя из своего представления решений, доказывает С. Б. Бергман. См. loc. cit. [6] б) и г).

становятся так называемые краевые задачи, которые выдвигаются математическим естествознанием, а общее представление решений диференциальных уравнений оказывалось почти бесполезным для решения этих краевых задач. Этот, почти всеобщий, скептицизм довольно ярко выражен в словах: «Граничные задачи теории потенциала особенно явно показывают, насколько мало полезно нахождение общего решения для глубокого рассмотрения краевых задач. Общее решение потенциального уравнения при $n=2$, как известно, дается в виде $u=f(x+iy)+g(x-iy)$, где f и g произвольные аналитические функции одной комплексной переменной. На самом деле эта форма решения является сравнительно бесполезной (relativ wertlos) для изучения краевых задач» (R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, s. 172, 1937). Такое скептическое отношение к «общим» решениям диференциальных уравнений нам кажется вообще преувеличенным, но оно совершенно несправедливо в случае эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными и, в частности, в случае потенциального уравнения. Работы академика Н. И. Мусхелишвили[23] показали, как широко могут быть использованы общие представления гармонических и бигармонических уравнений при помощи голоморфных функций одной комплексной переменной для решения и всестороннего исследования краевых задач, связанных с этими уравнениями, и тут, после этих работ и исследований Д. Шермана[24], Л. Г. Магнарадзе[25] и др., не остается место для какого бы то ни было скептицизма. Нам, наоборот, кажется, и это мы постараемся показать ниже, что в случае эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными общее представление решений при помощи голоморфных функций одной комплексной переменной дает весьма простой и естественный подход к решению граничных задач.

1. Постановка краевой задачи. Пусть T односвязная область, ограниченная простой замкнутой регулярной кривой S.

Рассмотрим следующую краевую задачу: *найти в области T такое регулярное решение уравнения* (A_0), *которое на границе этой области удовлетворяет условиям*

$$[u]_S=f_0(s),\quad \left[\frac{du}{d\nu}\right]_S=f_1(s),\quad \ldots,\left[\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right]_S=f_{n-1}(s), \tag{1.1}$$

[23] См. Н. И. Мусхелишвили. а) Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1935, б) ДАН СССР, III (1934) № 1 и 2, в) Тр. Тбил. Мат. Ин-та, VII (1940), стр. 1.

[24] См. Д. И. Шерман. а) Тр. Тбил. Мат. Ин-та II (1937), стр. 163—225, б) Труды Сейсм. Ин-та АН СССР, № 86 (1938).

[25] См. Л. Г. Магнарадзе. Тр. Тбил. Мат. Ин-та, IV (1938), стр. 43—76.

где $f_0(s)$, $f_1(s)$, ..., $f_{n-1}(s)$—заданные регулярные функции длины дуги s кривой S; ν—внутренняя нормаль, а $[\ \ ]_S$ обозначает предельные значения выражения, стоящего внутри скобки, когда точка изнутри области T стремиться к какой-нибудь точке границы S. Эту задачу мы назовем первой неоднородной краевой задачей диференциального уравнения (A_0) в области T и будем говорить краткости ради: краевая задача I уравнения (A_0). Если в условиях (1.1) $f_0(s)=f_1(s)=\cdots f_{n-1}(s)=0$, то краевую задачу назовем однородной.

Считая кривую S регулярной и условия (1.1) выполненными, мы можем вычислить на S значения всех производных функций u до $n-1$-го порядка и выразить их при помощи заданных функций $f_0(s)$, $f_1(s)$, ..., $f_{n-1}(s)$ и их производных.

Следовательно, обозначая через $D_j u$ производные функции u порядка j, мы можем на контуре S считать известными

$$[D_j u]_S \quad (j=0, \ldots, n-1).$$

Ниже для нас будет более удобным задавать на контуре S

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right), \ \ldots, \ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial z^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} u.$$

Очевидно, значения этих выражений нельзя брать совершенно произвольно. Как увидим ниже, произвольно можно задавать лишь вещественные или мнимые части этих выражений.

В самом деле, пусть

$$[u]_S = p_0(s), \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]_S=p_1(s)+iq_1(s), \ \ldots, \left[\frac{\partial^{n-1} u}{\partial z^{n-1}}\right]_S=p_{n-1}(s)+iq_{n-1}(s), \qquad (1.2)$$

$p_0(s)$, $p_1(s)$, $q_1(s)$, ..., $p_{n-1}(s)$, $q_{n-1}(s)$—вещественные регулярные функции длины дуги s кривой S. Допустим, что $p_0(s)$—какая-нибудь заданная регулярная функция. Тогда, как нетрудно видеть, $p_1(s)$ и $q_1(s)$ должны быть связаны между собой соотношением

$$p_1(s)\cos\vartheta - q_1(s)\sin\vartheta=\frac{1}{2}p'_0(s), \qquad (1.3)$$

где ϑ—угол между положительными направлениями касательной кривой S и оси ox. Пусть теперь $p_0(s)$, $p_1(s)$ и $q_1(s)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие (1.3). Тогда, как это легко видеть, $p_2(s)$ и $q_2(s)$ должны быть подобраны таким образом, чтобы

$$p_2(s)\sin 2\vartheta+q_2(s)\cos 2\vartheta=p_1'(s)\sin\vartheta+q_1'(s)\cos\vartheta. \qquad (1.4)$$

Предполагая теперь, что $p_0(s)$, $p_1(s)$, $q_1(s)$, $p_2(s)$ $q_2(s)$ удовлетворяют соотношениям (1.3) и (1.4), мы получим для $p_3(s)$ и $q_3(s)$ аналогичные соотношения и т. д. Соотношения (1.3), (1.4) и им аналогичные для $p_3(s)$, $q_3(s)$, ..., $p_{n-1}(s)$ и $q_{n-1}(s)$ мы назовем *условиями совместности.* Из условий совместности вытекает, что произвольно можно задавать лишь часть величин, входящих в выражения (1.2), а именно, мы можем, например, взять произвольно значения функций $p_0(s)$, $p_1(s)$, ..., $p_{n-1}(s)$, но тогда $q_1(s)$, ..., $q_{n-1}(s)$ будут определены из условий совместности.

Мы можем теперь нашу краевую задачу заменить эквивалентной ей краевой задачей: *найти в области T такое регулярное решение уравнения* (A_0), *которое на границе этой области удовлетворяет условиям* (1.2), *причем функции $p_0(s)$, $p_1(s)$, $q_1(s)$, ..., $p_{n-1}(s)$ и $q_{n-1}(s)$ связаны между собой условиями совместности.* Эту задачу мы назовем краевой задачей I′. Очевидно, легко доказать, что если задача I имеет решение, то имеет также решение задача I′ и обратно.

Этот последний вид нашей краевой задачи окажется для нас более удобным в дальнейшем.

Докажем теперь, *что правые части условий* (1.2), *т. е. функций $p_0(s)$, $p_1(s)+iq_1(s)$, ..., $p_{n-1}(s)+iq_{n-1}(s)$, не могут быть граничными значениями функций, голоморфных в области T и непрерывных в $T+S$, за исключением случая $p_0(s)=\text{const}$, $p_m(s)+iq_m(s)=0$ $(m=1, \ldots, n-1)$.*

Это обстоятельство мы используем ниже существенным образом. Докажем предварительно лемму.

Лемма. *Пусть $P(x, y)+iQ(x, y)$—функция, голоморфная в области T и непрерывная в $T+S$. Если на контуре S функции P и Q удовлетворяют одному из условий*

$$\left.\begin{aligned} P\cos m\vartheta - Q\sin m\vartheta = 0, \\ P\sin m\vartheta + Q\cos m\vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где $m>0$—целое число, то $P\equiv 0$, $Q\equiv 0$.

Пусть начало координат лежит внутри области T. Тогда условия (*) можем записать в виде

$$\begin{aligned} R\{z^m f(z)\, e^{im(\vartheta-\theta)}\} = 0, \\ J\{z^m f(z)\, e^{im(\vartheta-\theta)}\} = 0, \end{aligned} \qquad (**)$$

где $z=re^{i\theta}$, $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, причем $\vartheta-\theta$ есть однозначная функция на контуре S. Пусть $\chi(x, y)$—гармоническая функция в области T, удовлетворяющая условию

$$[\chi(x, y)]_S = \vartheta - \theta.$$

Пусть

$$F(z) = \chi(x, y) + i\chi^*(x, y),$$

где $\chi^*(x, y)$—гармоническая функция, сопряженная с $\chi(x, y)$. Тогда, как нетрудно видеть, (**) принимают вид

$$R\{\zeta^m f(\zeta)\, e^{iF(z)}\}=0,$$

$$J\{\zeta^m f(\zeta)\, e^{iF(z)}\}=0.$$

Отсюда

$$f(\zeta)=\frac{ic}{\zeta^m}\, e^{-iF(z)},$$

или

$$f(\zeta)=\frac{c_1}{\zeta^m}\, e^{-iF(z)},$$

где c и c_1—произвольные вещественные постоянные. Но так как по условию $f(\zeta)$ голоморфна внутри области T, то $c=0$, $c_1=0$ и следовательно, $f(\zeta)=0$, т. е. $P\equiv 0$, $Q\equiv 0$. Что и требовалось доказать.

Теперь, в силу этой леммы и условий совместности легко видеть, что за исключением случая $p_0(s)=\text{const}$ и $p_m(s)+iq_m(s)\equiv 0$ $(m=1, \ldots, n-1)$, правые части (1.2) не могут быть граничными значениями функции, голоморфных внутри T и регулярных в $T+S$.

2. Приведение краевой задачи I′ к интегральным уравнениям Фредгольма. Первый способ. В этом параграфе мы приведем нашу краевую задачу к интегральным уравнениям Фредгольма. Для этой цели мы используем общее представление решений уравнения (A_0), данное нами в предыдущей главе и метод акад. Н. И. Мусхелишвили[26], использованный им для приведения основных краевых задач плоской теории упругости к интегральным уравнениям.

Как мы видели в гл. I, искомое решение краевой задачи I, если оно существует, должно иметь вид

$$u(\zeta, \bar\zeta)=\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[g_k(\zeta, \bar\zeta)\,\varphi_k(\zeta)+\int_{\zeta_0}^{\zeta} G_k(\zeta, \bar\zeta;\ \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1$$

$$+\bar g_k(\bar\zeta, \zeta)\,\bar\varphi_k(\bar\zeta)+\int_{\bar\zeta_0}^{\bar\zeta}\overline{G}_k(\bar\zeta, \zeta;\ \bar\zeta_1)\,\bar\varphi_k(\bar\zeta_1)\,d\bar\zeta_1\Bigg],$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$, ..., $\varphi_{n-1}(\zeta)$ голоморфные функции в области T.

Предположим теперь, что наша краевая задача имеет регулярное решение в $T+S$. Тогда, согласно теореме 8, гл. I, § 7, соответствующая

---

[26] См. Н. И. Мусхелишвили. Loc. cit. [23] б) и в).

этому решению n-гармоническая функция будет регулярной в $T+S$ и, следовательно, соответствующие голоморфные функции $\varphi_k(\zeta)$ будут также регулярными в $T+S$.

Класс ниже встречающихся регулярных функций мы не будем уточнять, предполагая, что все операции, производимые над этими функциями, выполнимы. Этого всегда можно достигнуть, если взять кривую S, заданные функции $p_m(s)$, $q_m(s)$ и коэфициенты диференциального уравнения в достаточной степени регулярными в $T+S$.

Найдем теперь производные функции $u(\zeta, \bar\zeta)$. Имеем

$$\frac{\partial^m u}{\partial\zeta^m}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{m} c_{mkj}(\zeta)\,\varphi_k^{(j)}(\zeta)+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial^m G_k(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)}{\partial\zeta^m}\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^m \bar g_k(\bar\zeta,\zeta)}{\partial\zeta^m}\bar\varphi_k(\bar\zeta)+\int_{\bar\zeta_0}^{\bar\zeta}\frac{\partial^m \bar G_k(\bar\zeta,\zeta;\bar\zeta_1)}{\partial\zeta^m}\bar\varphi_k(\bar\zeta_1)\,d\bar\zeta_1\right\} \tag{2.1}$$
$$(m=0,\ \ldots,\ n-1),$$

где

$$c_{mkj}(\zeta)=\binom{m}{j}\frac{\partial^{m-j}g_k(\zeta,\bar\zeta)}{\partial\zeta^{m-j}}+\binom{m-1}{j}\frac{\partial^{m-j-1}}{\partial\zeta^{m-j-1}}\left\{\left[G_k(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)\right]_{\zeta_1=\zeta}\right\}$$
$$+\binom{m-2}{j}\frac{\partial^{m-j-2}}{\partial\zeta^{m-j-2}}\left\{\left[\frac{\partial G_k(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)}{\partial\zeta}\right]_{\zeta_1=\zeta}\right\}+\cdots+\left[\frac{\partial^{m-j-1}G_k(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)}{\partial\zeta^{m-j-1}}\right]_{\zeta_1=\zeta}$$
$$(k=0,\ \ldots,\ n-1;\ m=0,\ \ldots,\ n-1;\ j=0,\ \ldots\ m).$$

Краткости ради введем обозначения

$$\alpha_{mk}(\zeta)=\frac{\partial^m \bar g_k(\bar\zeta,\zeta)}{\partial\zeta^m},\qquad \beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)=\frac{\partial^m G_k(\zeta,\bar\zeta;\zeta_1)}{\partial\zeta^m}, \tag{2.2}$$
$$\beta'_{mk}(\bar\zeta,\bar\zeta_1)=\frac{\partial^m \bar G_k(\bar\zeta,\zeta;\bar\zeta_1)}{\partial\zeta^m}.$$

Тогда (2.1) перепишется так

$$\frac{\partial^m u}{\partial\zeta^m}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{m} c_{mkj}(\zeta)\,\varphi_k^{(j)}(\zeta)+\alpha_{mk}(\zeta)\,\bar\varphi_k(\bar\zeta)\right. \tag{2.3}$$
$$\left.+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\int_{\bar\zeta_0}^{\bar\zeta}\beta'_{mk}(\bar\zeta,\bar\zeta_1)\,\bar\varphi_k(\bar\zeta_1)\,d\bar\zeta_1\right\}$$
$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

До сих пор z_0 была произвольно выбранной точкой в области T. В частности, ее можно взять на границе этой области. В дальнейшем условимся, что точка $z_0 \subset S$ и примем ее за начало отсчета длины дуги. Кроме того, попрежнему будем считать, что начало координат лежит внутри области T.

Уравнение кривой S в комплексной форме мы можем записать так

$$z = z(s) = x(s) + iy(s) \quad [0 \leqq s \leqq l,\ z(s) = z(s+l)].$$

Будем считать $z(s)$ достаточно регулярной функцией.

Предположим теперь, что в формуле (2.3) z находится на S. Тогда по условию задачи I' имеют место равенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m} c_{mkj}(z)\,\varphi_k^{(j)}(z) + \alpha_{mk}(z)\,\bar{\varphi}_k(\bar{z}) \right.$$

$$\left. + \int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(z, z_1)\,\varphi_k(z_1)\,dz_1 + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \beta'_{mk}(\bar{z}, \bar{z}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{z}_1)\,d\bar{z}_1 \right\} = p_m(s) + iq_m(s) \qquad (2.4)$$

$$(m = 0, \ldots, n-1;\ q_0(s) = 0).$$

Таким образом, задача I' свелась к следующей задаче теории функции одной комплексной переменной: *Найти в области T голоморфные и в $T+S$ регулярные функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, ..., $\varphi_{n-1}(z)$, которые удовлетворяют функциональным уравнениям* (2.4). Эту задачу назовем краевой задачей теории функции, соответствующей задаче I' и обозначим через I*. Очевидно, эти две краевые задачи, т. е. краевые задачи I' и I*, эквиваленты между собой. Поэтому ниже мы будем заниматься решением лишь задачи I*. Если мы положим $p_m(s) \equiv 0$, $q_m(s) \equiv 0$ $(m = 0, \ldots, n-1)$, то получим однородную краевую задачу, которую в отличие от неоднородной будем обозначать через I_0^*.

Так как, по предположению, краевая задача I' имеет решение, то, очевидно, и краевая задача I* также имеет решение.

Функциональные уравнения (2.4), как увидим ниже, легко сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма.

Пусть t—какая-нибудь точка, лежащая вне области T. Умножим обе части уравнений (2.4) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z-t}$ и затем проинтегрируем по S. Тогда будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\alpha_{mk}(\zeta)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})}{\zeta-t}\,d\zeta+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{c_{kmj}(\zeta)\,\bar{\varphi}_k^{(j)}(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta\right. \tag{2.5}$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{d\zeta}{\zeta-t}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{d\zeta}{\zeta-t}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1\right\}=Y_m(t)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1),$$

где

$$Y_m(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{p_m(s)+iq_m(s)}{\zeta-t}\,d\zeta$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Напомним теперь некоторые свойства интеграла типа Коши. Пусть $\varphi(\zeta)$—какая-нибудь регулярная функция на S. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta. \tag{2.6}$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что

$$\psi_i(t_0)=\ \frac{1}{2}\,\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t_0}\,d\zeta, \tag{2.7}$$

$$\psi_a(t_0)=-\frac{1}{2}\,\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t_0}\,d\zeta, \tag{2.8}$$

где t_0—какая-нибудь точка на контуре S; причем интегралы правой части берутся в смысле главного значения по Коши, а $\psi_i(t_0)$ и $\psi_a(t_0)$ обозначают предельные значения интеграла (2.6), когда точка t стремится к граничной точке t_0 соответственно изнутри или извне области T.

Переходя к пределу в уравнениях (2.5), когда точка t стремится извне области T к граничной точке t_0, в силу (2.8), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{-\frac{1}{2}\alpha_{mk}(t_0)\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\alpha_{mk}(\zeta)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})}{\zeta-t_0}d\zeta\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\left[-\frac{1}{2}c_{mkj}(t_0)\varphi_k^{(j)}(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{c_{mkj}(\zeta)\varphi_k^{(j)}(\zeta)}{\zeta-t_0}d\zeta\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{t_0}\beta_{mk}(t_0,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{z_0}^{\zeta}\beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)d\zeta_1 \tag{2.9}$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)d\bar{\zeta}_1\right\}=Y_{am}(t_0)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Принимая во внимание, что функции $\varphi_k(z)$ голоморфны в области T и регулярны в $T+S$, мы можем написать тождества

$$-\frac{1}{2}\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}d\bar{\zeta}=0, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2}\varphi_k^{(j)}(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\varphi_k^{(j)}(\zeta)}{\zeta-t_0}d\zeta=0 \tag{2.11}$$

$$(k=0,\ \ldots,\ n-1;\ j=0,\ 1,\ \ldots).$$

Умножая равенства (2.10) и (2.11) соответственно на $\alpha_{mk}(t_0)$ и $c_{mkj}(t_0)$ и затем суммируя их, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{2}\alpha_{mk}(t_0)\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\alpha_{mk}(t_0)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}d\bar{\zeta}\right]\equiv 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{1}{2}c_{mkj}(t_0)\varphi_k^{(j)}(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{c_{mkj}(t_0)\varphi_k^{(j)}(\zeta)}{\zeta-t_0}d\zeta\right]\equiv 0$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Прибавляя почленно эти тождества к уравнениям (2.9), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{-\alpha_{mk}(t_0)\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\left[\frac{\alpha_{mk}(\zeta)}{\zeta-t_0}\,d\zeta-\frac{\alpha_{mk}(t_0)}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}\,d\bar{\zeta}\right]\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{c_{mkj}(\zeta)-c_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\,\varphi_k^{(j)}(\zeta)\,d\zeta-\frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{t_0}\beta_{mk}(t_0,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1-\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1\Bigg\}=Y_{am}(t_0)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Эти уравнения после простых преобразований принимают вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{-\alpha_{mk}(t_0)\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0)+\alpha_{mk}(t_0)\frac{1}{\pi}\int\limits_S\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\vartheta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\alpha_{mk}(\zeta)-\alpha_{mk}(t_0)}{\zeta-t_0}\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\zeta$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-)^j\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d^j}{d\zeta^j}\left[\frac{c_{mkj}(\zeta)-c_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\right]\varphi_k(\zeta)\,d\zeta \tag{2.12}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{t_0}\beta_{mk}(t_0,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\beta_{mk}(\zeta,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1\Bigg\}=Y_{am}(t_0)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1),$$

где ϑ обозначает угол между положительным направлением оси ox и вектором $\overrightarrow{t_0 z}$.

Займемся теперь двойными интегралами, входящими в (2.12). Мы можем написать

$$\beta_{mk}(z, z_1) = \beta_{mk}(t_0, z_1) + (z - t_0)\, \beta^*_{mk}(t_0, z, z_1), \tag{2.13}$$

$$\beta'_{mk}(\bar{z}, \bar{z}_1) = \beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{z}_1) + (z - t_0)\, \beta'^*_{mk}(\bar{t}_0, \bar{z}, \bar{z}_1), \tag{2.14}$$

где β^*_{mk} и β'^*_{mk}, очевидно,—регулярные функции своих аргументов. Предполагая, что t_0 есть фиксированная точка на S, в силу (2.2), нетрудно заключить, что $\beta_{mk}(t_0, z_1)$ и $\bar{\beta}'_{mk}(t_0, z_1)$ суть граничные значения функций, голоморфных внутри T. В силу (2.13) и (2.14) можем написать

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{dz}{z - t_0}\int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(z, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{dz}{z - t_0}\int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(t_0, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_S dz\int_{z_0}^{z} \beta^*_{mk}(t_0, z, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{dz}{z - t_0}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \beta'_{mk}(\bar{z}, \bar{z}_1)\, \bar{\varphi}_k(\bar{z}_1)\, d\bar{z}_1 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{dz}{z - t_0}\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{z}_1)\, \bar{\varphi}_k(\bar{z}_1)\, d\bar{z}_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_S dz\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \beta'^*_{mk}(\bar{t}_0, \bar{z}, \bar{z}_1)\, \bar{\varphi}_k(\bar{z}_1)\, d\bar{z}_1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$(m = 0, \ldots, n-1).$$

В силу голоморфности функций $\int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(t_0, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1$ и $\int_{z_0}^{z} \bar{\beta}'_{mk}(t_0, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1$ в области T, мы найдем

$$\frac{1}{2}\int_{z_0}^{t_0} \beta_{mk}(t_0, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{dz}{z - t_0}\int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(t_0, z_1)\, \varphi_k(z_1)\, dz_1$$

и

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1.$$

В силу этих равенств (2.15) и (2.16) принимают вид

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\zeta_0}^{t_0}\beta_{mk}(t_0, \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\beta^*_{mk}(t_0, \zeta, \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1,$$

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_S d\vartheta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'^*_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1.$$

В силу этих формул уравнения (2.12) можно переписать так

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{-\alpha_{mk}(t_0)\,\bar{\varphi}_k(\bar{t}_0) + \alpha_{mk}(t_0)\frac{1}{\pi}\int\limits_S\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{\alpha_{mk}(\zeta)-\alpha_{mk}(t_0)}{\zeta-t_0}\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\zeta$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d^j}{d\zeta^j}\left[\frac{c_{mkj}(\zeta)-c_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\right]\varphi_k(\zeta)\,d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\beta^*_{mk}(t_0, \zeta, \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1 - \int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 \tag{2.17}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_S d\vartheta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\beta'^*_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1\Bigg\} = Y_{0m}(t_0)$$

$$(m = 0, \ldots, n-1).$$

Пусть s, σ и τ—дуги, соответствующие точкам t_0, ζ и ζ_1. Тогда, после перестановки порядка интегрирования в двойных интегралах, мы можем уравнения (2.17) переписать так

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{-\alpha_{mk}(s)\,\overline{\varphi}_k(s)+\alpha_{mk}(s)\frac{1}{\pi}\int_0^l\overline{\varphi}_k(\sigma)\,\frac{d\vartheta}{d\sigma}\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\frac{\alpha_{mk}(\sigma)-\alpha_{mk}(s)}{\zeta-t_0}\,\overline{\varphi}_k(\sigma)\,\zeta'(\sigma)\,d\sigma$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\frac{d^j}{d\zeta^j}\left[\frac{c_{mkj}(\sigma)-c_{mkj}(s)}{\zeta-t_0}\right]\varphi_k(\sigma)\,\zeta'(\sigma)\,d\sigma$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\varphi_k(\sigma)\,d\sigma\int_\sigma^l\beta^*_{mk}(s,\tau,\sigma)\,\zeta'(\sigma)\,\zeta'_1(\tau)\,d\tau \tag{2.18}$$

$$-\int_0^s\beta'_{mk}(s,\sigma)\,\overline{\varphi}_k(\sigma)\,\overline{\zeta}'(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{\pi}\int_0^l\overline{\varphi}_k(\sigma)\,d\sigma\int_\sigma^l\beta'_{mk}(s,\sigma)\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\,\overline{\zeta}'(\sigma)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^l\overline{\varphi}_k(\sigma)\,d\sigma\int_\sigma^l\beta'^*_{mk}(s,\tau,\sigma)\,\zeta'_1(\tau)\,\overline{\zeta}'(\sigma)\,d\tau\Bigg\}=Y_{am}(s)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1),$$

где обозначения очевидны; например, $\varphi_k(s)$ обозначает значение функции φ_k в точке кривой S, соответствующей дуге s.

Примем теперь следующие обозначения:

$$N_{mk}(s,\sigma)=\sum_{j=0}^{m}(-)^j\frac{1}{2\pi i}\frac{d^j}{d\zeta^j}\left[\frac{c_{mkj}(\sigma)-c_{mkj}(s)}{\zeta-t_0}\right]\zeta'(\sigma)$$

$$+\zeta'(\sigma)\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma^l\beta^*_{mk}(s,\tau,\sigma)\,\zeta'_1(\tau)\,d\tau,$$

$$0\leqq s\leqq l,$$

$$N'_{mk}(s,\sigma)=\frac{1}{\pi}\,\alpha_{mk}(s)\,\frac{d\vartheta(s,\sigma)}{d\sigma}+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\alpha_{mk}(\sigma)-\alpha_{mk}(s)}{\zeta-t_0}\,\zeta'(\sigma)$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\beta'_{mk}(s,\sigma)\,[\vartheta(s,\sigma)-\vartheta(s,0)]\,\bar{\zeta}'(\sigma)$$

$$+\bar{\zeta}'(\sigma)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}^{l}\beta'^{*}_{mk}(s,\tau,\sigma)\,\bar{\zeta}'_1(\tau)\,d\tau$$

$$-\beta'_{mk}(s,\sigma)\,\bar{\zeta}'(\sigma),\quad \text{при } 0\leqq\sigma\leqq s,$$

$$N'_{mk}(s,\sigma)=\frac{1}{\pi}\,\alpha_{mk}(s)\,\frac{d\vartheta(s,\sigma)}{d\sigma}+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\alpha_{mk}(\sigma)-\alpha_{mk}(s)}{\zeta-t_0}\,\zeta'(\sigma)$$

$$+\frac{1}{\pi}\,\beta'_{mk}(s,\sigma)\,[\vartheta(s,\sigma)-\vartheta(s,0)]\,\bar{\zeta}'(\sigma)$$

$$+\bar{\zeta}'(\sigma)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}^{l}\beta'^{*}_{mk}(s,\tau,\sigma)\,\bar{\zeta}'_1(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } s\leqq\sigma\leqq l.$$

Тогда уравнения (2.18) примут вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\alpha_{mk}(s)\,\overline{\varphi}_k(s)+\int\limits_0^l N_{mk}(s,\sigma)\,\varphi_k(\sigma)\,d\sigma+\int\limits_0^l N'_{mk}(s,\sigma)\,\overline{\varphi}_k(\sigma)\,d\sigma\right]$$

$$=Y_{am}(s)\quad(m=0,\ \ldots,\ n-1). \tag{2.19}$$

Докажем теперь, что детерминант

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix}\alpha_{00}(s), & \alpha_{01}(s), & \ldots, & \alpha_{0\,n-1}(s)\\ \alpha_{10}(s), & \alpha_{11}(s), & \ldots, & \alpha_{1\,n-1}(s)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \alpha_{n-1\,0}(s), & \alpha_{n-1\,1}(s), & \ldots, & \alpha_{n-1\,n-1}(s)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.20}$$

для всех значений s в промежутке $0\leqq s\leqq l$.

В случае уравнения

$$\Delta^n u+a_1(x, y)\Delta^{n-1} u + \cdots + a_n(x, y) u=0, \qquad (A_0^*)$$

согласно формулам (2.2) и (7.9), гл. I, имеем, что

$$\alpha_{mk}=\frac{\partial^m}{\partial z^m}(z\bar{z})^k.$$

Так как, по предположению, начало координат лежит внутри области, то очевидно, что детерминант (2.20) в этом случае всегда будет отличным от нуля.

В общем случае предложение можно доказать следующим образом.

Из формулы (7.9), гл. I, имеем

$$\frac{\bar{g}_k(\bar{z}, z)}{\bar{z}^k}=z^k-\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} A(z, \bar{z};\ z_1)\, z_1{}^k\, dz_1$$

$$(k=0, \ldots, n-1).$$

Но ввиду того, что $A(z, \bar{z};\ z_1)$ есть резольвента $a(z, \bar{z};\ z_1)$, будем иметь

$$\bar{z}^k z^k=\bar{g}_k(\bar{z}, z)+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} a(z, \bar{z};\ z_1)\, g_k(\bar{z}, z_1)\, dz_1$$

$$(k=0, \ldots, n-1).$$

Диференцируя обе части этого уравнения n раз по z, легко увидим, что функции $\bar{g}_k(\bar{z}, z)$ удовлетворяют следующему обыкновенному диференциальному уравнению относительно переменной z:

$$\frac{d^n \bar{g}_k(\bar{z}, z)}{dz^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}\left\{\left[\frac{d^{k-1} a(z, \bar{z};\ z_1)}{dz^{k-1}}\right]_{z_1=z}\bar{g}_k(\bar{z}, z)\right\}=0 \qquad (2.21)$$

$$(k=0, \ldots, n-1).$$

Рассматривая здесь $\bar{z}$ как параметр мы увидим, что функции $\bar{g}_k(\bar{z}, z)$ представляют полную систему линейно-независимых решений этого уравнения. Но ввиду того, что коэфициенты уравнения (2.21) являются, по предположению, регулярными функциями в $T+S$ и тат как детерминант (2.20) есть граничное значение Вронскиана для функций $\bar{g}_k(\bar{z}, z)$, то, очевидно, доказано наше предложение.

Таким образом, (2.19) представляет систему регулярных интегральных уравнений Фредгольма с неизвестными функциями $\varphi_k(s)$. Следовательно, мы имеем, что граничные значения функций $\varphi_k(s)$, голоморфных внутри T и удовлетворяющих краевым условиям (2.4), удовлетворяют также интегральным уравнениям (2.19), т. е. все решения краевой задачи I^* являются также решениями интегральных уравнений (2.19). Отсюда вытекает теорема:

Теорема 1. *Число линейно-независимых решений однородной краевой задачи I_0^* ограничено.*

Обозначим через H семейство регулярных функций на S, являющихся граничными значениями функции голоморфных в области T.

Докажем теперь теорему:

Теорема 2. *Все решения системы (2.19), принадлежащие классу H, удовлетворяют также всем краевым условиям (2.4), за исключением условия, соответствующего $m=0$, которое удовлетворяется, вообще говоря, лишь с точностью до вещественной аддитивной постоянной.*

Пусть $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_{n-1}(s)$ суть решения системы (2.19), принадлежащие классу H. Тогда система (2.19), как это легко видеть, эквивалентна системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{ c_{mkj}(z)\varphi_k^{(j)}(z) + \alpha_{mk}(z)\overline{\varphi_k}(\bar z) + \int_{z_0}^{z}\beta_{mk}(z, z_1)\varphi_k(z_1)\,dz_1 \tag{2.22}$$

$$+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\beta'_{mk}(\bar z, \bar z_1)\overline{\varphi}_k(\bar z_1)\,d\bar z_1\Bigg\} = p_m(s)+iq_m(s)+\psi_m(z)$$

$$(m=0, \ldots, n-1),$$

где z—точка на S, а $\psi_m(z)$ $(m=0, \ldots, n-1)$—определенные функции класса H. Остается доказать, что $\psi_0(z) = \text{const}$ и $\psi_m(z) = 0$, при $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Вводя попрежнему обозначение

$$u=\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg[g_k(z, \bar z)\varphi_k(z) + \int_{z_0}^{z} G_k(z, \bar z; z_1)\varphi_k(z_1)\,dz_1$$

$$+\bar g_k(\bar z, z)\overline{\varphi}_k(\bar z)+\int_{\bar z_0}^{\bar z} G_k(\bar z, z_1; \bar z_1)\,\overline{\varphi}_k(\bar z_1)\,d\bar z_1\Bigg],$$

мы можем (2.22) переписать так

$$\left[\frac{\partial^m u}{\partial z^m}\right]_S = p_m(s)+iq_m(s)+\psi_m(z) \tag{2.23}$$

$$(m=0, \ldots, n-1).$$

Пусть $\psi_m(z)=P_m+iQ_m$. Тогда, в силу того, что $q_0\equiv 0$ и левая часть (2.23) при $m=0$ есть вещественная функкия, будем иметь, что $Q_0\equiv 0$, и, следовательно, $P_0=\text{const}$. Далее, в силу условий совместности (1.3), нетрудно видеть, что P_1 и Q_1 на S будут удовлетворять уравнению

$$P_1 \cos\vartheta - Q_1 \sin\vartheta = 0.$$

Отсюда, в силу леммы § 1, получим $P_1\equiv 0$ и $Q_1\equiv 0$. Совершенно аналогично доказывается, что $P_2\equiv 0$, $Q_2\equiv 0$ и т. д. Так что окончательно мы будем иметь

$$P_0=\text{const},\quad Q_0\equiv 0,\ P_1\equiv 0,\ Q_1\equiv 0,\ \ldots,\ P_{n-1}\equiv 0,\ Q_{n-1}\equiv 0.$$

Таким образом, наша теорема доказана.

Пусть теперь $\varphi'_k(z)$ и $\varphi''_k(z)$ $(k=0,\ \ldots,\ n-1)$ — две системы решений уравнений (2.19), принадлежащие к H. Тогда их разности

$$\varphi^0_k(z)=\varphi'_k(z)-\varphi''_k(z)\quad (k=0,\ \ldots,\ n-1)$$

будет решением однородных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{-\alpha_{mk}(s)\,\overline{\varphi^0_k}(s)+\int_0^l N_{mk}(s,\sigma)\,\varphi^0_k(\sigma)\,d\sigma+\int_0^l N'_{mk}(s,\sigma)\,\overline{\varphi^0_k}(\sigma)\,d\sigma\right\}=0 \tag{2.24}$$

$$(m=0,\ldots,\ n-1),$$

и, в силу предыдущей теоремы, эти разности будут удовлетворять краевым условиям вида

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-k}\Big\{c_{0k0}(z)\,\varphi^0_k(z)+\alpha_{0k}(z)\,\overline{\varphi^0_k}(\bar z)+\int_{z_0}^{z}\beta_{0k}(z,z_1)\,\varphi^0_k(z_1)\,dz_1\\
&\qquad+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\beta'_{0k}(\bar z,\bar z_1)\,\overline{\varphi^0_k}(\bar z_1)\,d\bar z_1\Big\}=C,\\
&\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{c_{mkj}\,\varphi^{0(j)}_k(z)+\alpha_{mk}(z)\,\overline{\varphi^0_k}(\bar z)+\int_{z_0}^{z}\beta_{mk}(z,z_1)\,\varphi^0_k(z_1)\,dz_1\\
&\qquad+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\beta'_{mk}(\bar z,\bar z_1)\,\overline{\varphi^0_k}(\bar z_1)\,d\bar z_1=0\\
&\qquad(m=1,\ \ldots,\ n-1),
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где C—вещественная постоянная. Таким образом мы имеем, что всякая система функции $\varphi_k^0(z)$ класса H, удовлетворяющая краевым условиям (2.25), удовлетворяет также однородным интегральным уравнениям (2.24) и обратно, все решения класса H уравнения (2.24) удовлетворяют краевым условиям вида (2.25).

Нетрудно видеть, что однородные интегральные уравнения (2.24) имеют нетривиальные решения вида

$$\varphi_k(z)=i\,C_k \quad (k=0,\ \ldots,\ n-1), \tag{2.26}$$

где C_k—произвольные вещественные постоянные. В самом деле, выражения вида (2.26), очевидно, удовлетворяют краевым условиям (2.25) при $C=0$, в силу того, что им соответствует тривиальное решение уравнения (A_0).

Не ограничивая общности, мы можем положить в (2.25) $C=1$, так как, если для этого случая известно решение системы уравнений (2.25), то, умножая его (решение) на вещественную постоянную C, получим решение для любого C.

Предположим, теперь, что краевая задача Γ' имеет единственное решение при любых значениях функций $p_0(s)$, $p_1(s)$, $q_1(s), \ldots, p_{n-1}(s)$, $q_{n-1}(s)$, удовлетворяющих условиям совместности. Тогда существует единственная система функций $\varphi_k^0(z)$ $(k=0, \ldots, n-1)$, голоморфных внутри области T и регулярных в $T+S$, которые удовлетворяют краевым условиям (2.25) при $C=1$ и для которых выполняются условия

$$J\{\varphi_k^0(0)\}=0 \quad (k=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Соответствующее этой системе голоморфных функций $\varphi_k^0(z)$ решение уравнения (A_0) обозначим через u^0.

Пусть $\varphi_{k1}^0(z)$, $\varphi_{k2}^0(z)$, ..., $\varphi_{k\rho}^0(z)$ $(\rho \geqq 1,\ k=0, \ldots, n-1)$—полная система линейно-независимых функций класса H, удовлетворяющих уравнениям (2.24) и отличных от решений вида (2.26).

Пусть u_ν^0 $(\nu=1, \ldots, \rho)$—решения уравнения (A_0), соответствующие функциям $\varphi_{k\nu}^0(z)$. Тогда, очевидно, должны иметь

$$u^0=\alpha_1 u_1^0+\alpha_2 u_2^0+\cdots+\alpha_\rho u_\rho^0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ — вещественные постоянные. Удовлетворяя теперь граничным условиям

$$[u^0]_S=1, \quad \left[\frac{\partial u^0}{\partial z}\right]_S=0, \ \ldots, \quad \left[\frac{\partial^{n-1}u^0}{\partial z^{n-1}}\right]_S=0,$$

получим систему уравнений

$$\alpha_1\gamma_{1\nu}(s)+\alpha_2\gamma_{2\nu}(s)+\cdots+\alpha_p\gamma_{p\nu}(s)=\begin{cases}1, & \text{при } \nu=0\\ 0, & \text{при } \nu\neq 0,\end{cases} \tag{2.27}$$

$$(\nu=0, \ldots, n-1)$$

где приняты обозначения

$$\gamma_{k\nu}(s)=\left[\frac{\partial^\nu u_k^0}{\partial z^\nu}\right]_S .$$

Эта система должна иметь единственное, вполне определенное решение для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, так как, согласно допущению, u^0—единственная функция, удовлетворяющая краевым условиям (2.25) при $C=1$.

Но так как всякая система решений уравнений (2.24), класса H, удовлетворяет краевым условиям вида (2.25), то мы будем иметь

и

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_{10}(s)=C_1,\ \gamma_{20}(s)=C_2,\ \ldots,\ \gamma_{p0}(s)=C_p\\ \gamma_{1\nu}(s)=0,\ \gamma_{2\nu}(s)=0,\ \ldots,\ \gamma_{p\nu}(s)=0, \text{ при } \nu>0,\end{array}\right\} \tag{2.28}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — определенные вещественные постоянные. Тогда все уравнения (2.27), кроме первого, в силу (2.28), удовлетворяются тождественно, а первое принимает вид

$$\alpha_1 C_1+\alpha_2 C_2+\cdots+\alpha_p C_p=1.$$

Но отсюда постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, однозначно определяются лишь тогда, когда все постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_p$, кроме одной, обращаются в нуль. Не ограничивая общности, мы можем положить $C_1\neq 0$, а $C_2=C_3=\cdots=C_p=0$. Следовательно, имеем

$$[u_1^0]_S=C_1,\ \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial z}\right]_S=0,\ \ldots,\ \left[\frac{\partial^{n-1}u_1^0}{\partial z^{n-1}}\right]_S=0,$$

$$[u_\nu^0]_S=0,\ \left[\frac{\partial u_\nu^0}{\partial z}\right]=0,\ \ldots,\ \left[\frac{\partial^{n-1}u_\nu^0}{\partial z^{n-1}}\right]_S=0$$

$$(\nu=2, 3, \ldots, p).$$

Но по предположению, однородная краевая задача Γ_0 имеет лишь нулевое решение, и следовательно, получим, что

$$u_2^0\equiv 0,\quad u_3^0\equiv 0,\ \ldots,\ u_p^0\equiv 0.$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\varphi_{k\nu}^0(z)\equiv 0\quad (\nu=2, \ldots, p;\ k=0, \ldots, n-1).$$

Таким образом, все решения класса H системы однородных уравнений (2.24) имеют вид

$$C\varphi_k^0(z)+iC_k\quad (k=0, \ldots, n-1),$$

где C, C_0, ..., C_{n-1}—произвольные вещественные постоянные. Этим функциям, очевидно, соответствует решение диференциального уравнения (A_0), удовлетворяющее краевым условиям

$$[u]_S = C, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right] = 0, \; \ldots, \; \left[\frac{\partial^{n-1} u}{\partial \zeta^{n-1}}\right]_S = 0.$$

Все решения неоднородной системы (2.19), принадлежащие к функциям класса H, очевидно, представляются в виде

$$\varphi_k(\zeta) = C\varphi_k^0(\zeta) + iC_k + \varphi'_k(\zeta) \quad (k=0, \ldots, n-1), \tag{2.29}$$

где $\varphi'_0(\zeta)$, $\varphi_1'(\zeta)$, ..., $\varphi'_{n-1}(\zeta)$ суть какие-нибудь частные решения системы (2.19). Как нетрудно видеть, всегда можно теперь подобрать произвольную постоянную C так, чтобы функции (2.29) удовлетворяли бы краевым условиям (2.4).

Таким образом, *если краевая задача* I *имеет единственное решение, то соответствующая ей система интегральных уравнений* (2.19) *имеет также решения среди функции класса H и все эти решения имеют вид* (2.29); *причем из этих функций, соответствующим подбором постоянной C, можно получить решение краевой задачи* I.

Так как искомые функции $\varphi_m(\zeta)$ определены лишь с точностью до аддитивной мнимой постоянной, то мы можем эти функции искать в виде [27]

$$\varphi_m(\zeta) = \frac{1}{\pi i}\int \frac{\nu_m(t)}{t-\zeta}\,dt \quad (m=0, \ldots, n-1), \tag{2.30}$$

где $\nu_m(t)$—вещественные функции точки t кривой S.

Определяя из левой части системы (2.19) функции $\varphi_m(\zeta)$ по формуле Крамера и подставляя затем вместо этих функций интегралы (2.30), получим новые интегральные уравнения с неизвестными функциями $\nu_m(t)$. Приравнивая друг к другу вещественные части этих уравнений, приходим к системе уравнений Фредгольма вида

$$\nu_m(t) = h_m(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\int_0^l M_{mj}(t,\tau)\,\nu_j(\tau)\,d\tau \tag{2.31}$$

$$(m=0, \ldots, n-1),$$

[27] См. нашу статью в Сообщениях Грузинского Филиала АН СССР, т. I, № 1 (1940), стр. 29—34.

где $M_{mj}(t, \tau)$—заданные регулярные функции. Так как, по допущению, наша краевая задача имеет решение, то очевидно система (2.31) всегда разрешима. Найдя отсюда функции $\nu_m(t)$, интегралы (2.30) дадут все решения класса H, системы (2.19).

3. Второй способ приведения краевой задачи Γ' к интегральным уравнениям. Указанный выше способ не единственный для приведения краевой задачи Γ' к интегральным уравнениям Фредгольма. Из возможных других способов я укажу здесь еще один, который в некоторых случаях может иметь определенные преимущества перед остальными.

Перепишем уравнения (2.4) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{mk}(z)\overline{\varphi_k(\bar{z})} = p_m(s) + iq_m(s) - \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\sum_{j=0}^{m} c_{mkj}(z)\varphi_k^{(j)}(z)$$

$$+\int_{z_0}^{z}\beta_{mk}(z, z_1)\varphi_k(z_1)\,dz_1 + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\beta'_{mk}(\bar{z}, \bar{z}_1)\overline{\varphi_k}(\bar{z}_1)\,d\bar{z}_1\Big\}$$

$$(m = 0, \ldots, n-1).$$

Согласно (2.20), по формуле Крамера получим

$$\overline{\varphi_m}(\bar{z}) = Z_m(z) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\sum_{j=0}^{n-1} c'_{mkj}(z)\varphi_k^{(j)}(z) \tag{3.1}$$

$$+\int_{z_0}^{z}\omega_{mk}(z, z_1)\varphi_k(z_1)\,dz_1 + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\omega'_{mk}(\bar{z}, \bar{z}_1)\overline{\varphi_k}(\bar{z}_1)\,d\bar{z}_1\Big\}$$

$$(m = 0, \ldots, n-1),$$

где

$$Z_m(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha'_{mk}(z)[p_k(s) + iq_k(s)],$$

$$c'_{mkj}(z) = -\sum_{\rho=0}^{n-1}\alpha'_{m\rho}(s)\,c_{\rho kj}(z),$$

$$\omega_{mk}(\zeta, \zeta_1) = -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha'_{mj}(\zeta)\,\beta_{kj}(\zeta, \zeta_1),$$

$$\omega'_{mk}(\bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1) = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha'_{mj}(\zeta)\,\beta'_{kj}(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_1);$$

причем α'_{mk} обозначает алгебраическое дополнение элемента α_{mk} детерминанта Δ деланное на Δ.

Рассмотрим теперь уравнения, сопряженные с (3.1)

$$\varphi_m(\zeta) = \overline{Z}_m(\bar{\zeta}) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}'_{mkj}(\bar{\zeta})\,\overline{\varphi}_k^{(j)}(\bar{\zeta}) \right.$$

$$\left. + \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} \overline{\omega}_{mk}(\bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1)\,\overline{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \overline{\omega}'_{mk}(\zeta, \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1 \right\} \tag{3.2}$$

$$(m = 0, \ldots, n-1).$$

Пусть теперь ζ лежит на S и t—какая-нибудь произвольная точка области T. Умножим обе части уравнений (3.1) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta - t}$ и проинтегрируем затем по S. Тогда, в силу предположенной выше голоморфности функции $\varphi_k(\zeta)$ в области T, будем иметь

$$\varphi_m(t) = Z^*_m(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\bar{c}'_{mkj}(\bar{\zeta})\,\overline{\varphi}_k^{(j)}(\bar{\zeta})}{\zeta - t}\,d\zeta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\zeta}{\zeta - t} \int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}} \overline{\omega}_{mk}(\bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1)\,\overline{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{d\zeta}{\zeta - t} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \overline{\omega}'_{mk}(\zeta, \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1 \right\}$$

где

$$Z^*_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\overline{Z}_m}{\zeta - t}\,d\zeta.$$

Пусть теперь точка t стремится изнутри области T к некоторой точке t_0 кривой S. Тогда в силу (2.11) получим

$$\varphi_m(t_0)=Z_m^*(t_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\bar{c}'_{mkj}(\bar{t}_0)\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{t}_0)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\bar{c}'_{mkj}(\bar{\zeta})\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{\zeta})}{\zeta-t_0}d\zeta\right]+\frac{1}{2}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\bar{\omega}_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)d\bar{\zeta}_1$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\bar{\omega}_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{t_0}\bar{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)d\zeta_1 \tag{3.3}$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\bar{\omega}'_{mk}(\zeta,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)d\zeta_1\right\}$$

$$(m=0,\ \dots,\ n-1).$$

В силу голоморфности функций $\varphi_k(\zeta)$ в области T получим

$$\frac{1}{2}\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{t}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}d\bar{\zeta}=0$$

$$(k=0,\ \dots,\ n-1;\quad j=0,\ 1,\ \dots\ ),$$

Помножим обе части этих равенств на $\bar{c}_{mkj}(\bar{t}_0)$ и затем просуммируем по k и j. Будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\bar{c}'_{mkj}(\bar{\zeta}_0)\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{t}_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\bar{c}'_{mkj}(t_0)\bar{\varphi}_k^{(j)}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}-\bar{t}_0}d\bar{\zeta}\right]\equiv 0.$$

Вычитывая теперь эти равенства почленно из (3.3), легко получим

$$\varphi_m(t_0) = Z_m^*(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\left(\frac{c'_{mkj}(z)}{z-t_0}\,dz - \frac{\overline{c}'_{mkj}(t_0)}{\overline{z}-\overline{t}_0}\,d\overline{z}\right)\overline{\varphi}_k^{(j)}(\overline{z})\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{z}_0}^{\overline{t}_0}\overline{\omega}_{mk}(\overline{t}_0, \overline{z}_1)\,\overline{\varphi}_k(\overline{z}_1)\,d\overline{z}_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{dz}{z-t_0}\int\limits_{\overline{z}_0}^{\overline{z}}\overline{\omega}_{mk}(\overline{z}, \overline{z}_1)\,\overline{\varphi}_k(\overline{z}_1)\,d\overline{z}_1 \tag{3.5}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{t_0}\overline{\omega}'_{mk}(t_0, z_1)\,\varphi_k(z_1)\,dz_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{dz}{z-t_0}\int\limits_{z_0}^{z}\overline{\omega}'_{mk}(z, z_1)\,\varphi_k(z_1)\,dz_1\right\}$$

$$(m=0, \ldots, n-1).$$

Принимая во внимание очевидные равенства

$$\frac{c'_{mkj}(z)}{z-t_0}\,dz - \frac{\overline{c}'_{mkj}(t_0)}{\overline{z}-\overline{t}_0}\,d\overline{z} = \frac{c'_{mkj}(z)-c'_{mkj}(t_0)}{z-t_0}\,dz$$

$$+c'_{mkj}(t_0)\,d\lg\frac{z-t_0}{\overline{z}-\overline{t}_0} = \frac{c'_{mkj}(z)-c'_{mkj}(t_0)}{z-t_0}\,dz + 2i\,c'_{mkj}(t_0)\,d\vartheta,$$

где ϑ, попрежнему, обозначает угол между вектором $\overrightarrow{t_0 z}$ и осью ox, (3.5) можно переписать еще в следующем виде:

$$\varphi_m(t_0) = Z_m^*(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left[c'_{mkj}(t_0)\,\frac{1}{\pi}\int\limits_S\overline{\varphi}_k^{(j)}(\overline{z})\,d\vartheta\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{c'_{mkj}(z)-c'_{mkj}(t_0)}{z-t_0}\,\overline{\varphi}_k^{(j)}(\overline{z})\,dz\right]$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\overline{z}_0}^{\overline{t}_0}\overline{\omega}_{mk}(\overline{t}_0, \overline{z}_1)\,\overline{\varphi}_k(\overline{z}_1)\,d\overline{z}_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{dz}{z-t_0}\int\limits_{\overline{z}_0}^{\overline{z}}\overline{\omega}_{mk}(\overline{z}, \overline{z}_1)\,\overline{\varphi}_k(\overline{z}_1)\,d\overline{z}_1 \tag{3.6}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{t_0}\overline{\omega}'_{mk}(t_0, z_1)\,\varphi_k(z_1)\,dz_1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S\frac{dz}{z-t_0}\int\limits_{z_0}^{z}\overline{\omega}'_{mk}(z, z_1)\,\varphi_k(z_1)\,dz_1\right\}$$

$$(m=0, \ldots, n-1).$$

Интегрированием по частям мы можем освободиться от производных искомых функций под знаком интеграла и (3.6) переписать так

$$\varphi_m(t_0)=Z_m^*(t_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left[\bar{c}'_{mkj}(t_0)\frac{(-1)^j}{\pi}\int_S\frac{d^{j+1}\vartheta}{d\bar{\zeta}^{j+1}}\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_S\frac{d^j}{d\bar{\zeta}^j}\left(\frac{\bar{c}'_{mkj}(\zeta)-\bar{c}'_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}}\right)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\bar{\omega}_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\bar{\omega}_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1 \tag{3.7}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{t_0}\bar{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\zeta_0}^{\bar{t}_0}\bar{\omega}'_{mk}(\zeta,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1\right\}$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Займемся теперь двойными интегралами, входящими в (3.7). Рассмотрим сперва функции $\bar{\omega}_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)$ и $\bar{\omega}'_{mk}(\zeta,\zeta_1)$. Их можем написать очевидно так

$$\bar{\omega}_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)=\bar{\omega}_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)+(\zeta-t_0)\,\omega^*_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1),$$

$$\bar{\omega}'_{mk}(\zeta,\zeta_1)=\bar{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta_1)+(\zeta-t_0)\,\omega'^*_{mk}(t_0,\zeta,\zeta_1),$$

где $\omega^*_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)$ и $\omega'^*_{mk}(t_0,\zeta,\zeta_1)$ суть регулярные функции. В силу этих формул мы будем иметь

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\bar{\omega}_{mk}(\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\bar{\omega}_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\int_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\omega^*_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1, \tag{3.8}$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\bar{\omega}'_{mk}(\zeta,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{d\zeta}{\zeta-t_0}\int_{\zeta_0}^{t_0}\bar{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\int_{\zeta_0}^{\zeta}\omega'^*_{mk}(t_0,\zeta,\zeta_1)\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1. \tag{3.9}$$

Пусть t_0 фиксирована и введем обозначения

$$\psi_{mk}(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\omega_{mk}(t_0,\ \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1, \tag{3.10}$$

$$\psi'_{mk}(\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\overline{\omega}'_{mk}(t_0,\ \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1. \tag{3.11}$$

Так как $\omega(t_0,\ \zeta_1)$ и $\overline{\omega}'(t_0,\ \zeta_1)$, при фиксированном t_0, суть голоморфные функции от ζ_1 в области T, то функции $\psi_{mk}(\zeta$ и $\psi'_{mk}(\zeta)$ являются также голоморфными функциями в области T и, следовательно, удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2}\ \overline{\psi}_{mk}(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\psi}_{mk}(\overline{\zeta})}{\overline{\zeta}-\overline{t}_0}\ d\overline{\zeta}=0, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{2}\,\psi'_{mk}(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\psi'_{mk}(\zeta)}{\zeta-t_0}\ d\zeta=0. \tag{3.13}$$

Если вычесть почленно (3.12) из (3.8) и прибавить (3.13) к (3.9), в силу (3.10) и (3.11), легко получим

$$J_1=-\frac{1}{2}\int_{\overline{\zeta}_0}^{\overline{t}_0}\overline{\omega}_{mk}(\overline{t}_0,\ \overline{\zeta}_1)\,\overline{\varphi}_k\,(\overline{\zeta}_1)\,d\overline{\zeta}_1+\frac{1}{\pi}\int_S d\vartheta\int_{\overline{\zeta}_0}^{\overline{\zeta}}\overline{\omega}_{mk}(\overline{t}_0,\ \overline{\zeta}_1)\,\overline{\varphi}_k\,(\overline{\zeta}_1)\,d\overline{\zeta}_1$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\int_{\overline{\zeta}_0}^{\overline{\zeta}}\omega^*_{mk}\,(\overline{t}_0,\ \overline{\zeta},\ \overline{\zeta}_1)\,\overline{\varphi}_k(\overline{\zeta}_1)\,d\overline{\zeta}_1, \tag{3.14}$$

$$J_2=\frac{1}{2}\int_{\zeta_0}^{t_0}\overline{\omega}'_{mk}(t_0,\ \zeta_1)\,\varphi_k\,(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\int_{\zeta_0}^{\zeta}\omega'^{*}_{mk}(t_0,\ \zeta,\ \zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1. \tag{3.15}$$

Теперь, в силу (3.14) и (3.15), как нетрудно видеть, уравнения (3.7) примут вид

$$\varphi_m(t_0)=Z_m^*(t_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left[\bar{c}'_{mkj}(t_0)\frac{(-1)^j}{\pi}\int\limits_S\frac{d^{j+1}\vartheta}{d\bar{\zeta}^{j+1}}\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^j}{2\pi i}\int\limits_S\frac{d^j}{d\bar{\zeta}^j}\left(\frac{\bar{c}'_{mkj}(\zeta)-\bar{c}'_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}}\right)\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta})\,d\bar{\zeta}\right]$$

$$+\int\limits_S d\vartheta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\overline{\omega}_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{\zeta}}\omega^*_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta},\bar{\zeta}_1)\,\bar{\varphi}_k(\bar{\zeta}_1)\,d\bar{\zeta}_1$$

$$\left.+\int\limits_{\zeta_0}^{t_0}\overline{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S d\zeta\int\limits_{\bar{\zeta}_0}^{\bar{t}_0}\omega'^*_{mk}(t_0,\zeta,\zeta_1)\,\varphi_k(\zeta_1)\,d\zeta_1\right\} \quad (3.16)$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Пусть s, σ и τ—дуги, соответствующие точкам t_0, ζ и ζ_1. Тогда, после перестановки интегралов в двойных интегралах, уравнения (3.16), очевидно, примут следующий вид:

$$\varphi_m(s)=Z_m^*(s)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left[\bar{c}'_{mkj}(t_0)\frac{(-1)^j}{\pi}\int\limits_0^l\frac{d^{j+1}\vartheta}{d\bar{\zeta}^{j+1}}\bar{\varphi}_k(\sigma)\,\bar{\zeta}'(\sigma)\,d\sigma\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(-)^j}{2\pi i}\int\limits_0^l\frac{d^j}{d\bar{\zeta}^j}\left(\frac{\bar{c}'_{mkj}(\zeta)-\bar{c}'_{mkj}(t_0)}{\zeta-t_0}\frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}}\right)\bar{\varphi}_k(\sigma)\,\bar{\zeta}'(\sigma)\,d\sigma\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^l\bar{\varphi}_k(\sigma)\,\bar{\zeta}'(\sigma)\,d\sigma\int\limits_\sigma^l\overline{\omega}'_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta})\,\frac{d\vartheta}{d\tau}\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^l\varphi_k(\sigma)\,\bar{\zeta}'(\sigma)\,d\sigma\int\limits_\sigma^l\omega^*_{mk}(\bar{t}_0,\bar{\zeta}_1,\bar{\zeta})\,\zeta'_1(\tau)\,d\tau \qquad (3.17)$$

$$\left.+\int\limits_0^s\overline{\omega}'_{mk}(t_0,\zeta)\,\varphi_k(\sigma)\,\zeta'(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^l\varphi_k(\sigma)\,\zeta'(\sigma)\,d\sigma\int\limits_\sigma^l\omega'^*_{mk}(t_0,\zeta_1,\zeta)\,\zeta'_1(\tau)\,d\tau\right\}$$

$$(m=0,\ \ldots,\ n-1).$$

Это есть искомая система интегральных уравнений Фредгольма, которой должны удовлетворять граничные значения функций $\varphi_k(\zeta)$, голоморфных внутри T и удовлетворяющих краевым условиям (2.4). Но, как нами было установлено в гл. I, § 6, искомые голоморфные функции $\varphi_k(\zeta)$ заданием решения диференциального уравнения (A_0) определяются лишь с точностью до аддитивных мнимых постоянных, поэтому однородные уравнения, получающиеся из (3.17) при $Z_m^* \equiv 0$, будут иметь нетривиальное решение вида

$$\varphi_k(\zeta) = iC_k \qquad (k = 0, \ldots, n-1),$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$—произвольные вещественные постоянные.

Введем теперь обозначения

$$K_{mk}(s, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{(-)^j}{\pi} \bar{c}'_{mkj}(t_0) \frac{d^{j+1}\vartheta(\zeta, t_0)}{d\bar{\zeta}^{j+1}} \bar{\zeta}'(\sigma) \right.$$

$$\left. + \frac{(-)^j}{2\pi i} \frac{d^j}{d\bar{\zeta}^j} \left(\frac{\bar{c}'_{mkj}(\zeta) - \bar{c}'_{mkj}(t_0)}{\zeta - t_0} \frac{d\zeta}{d\bar{\zeta}} \right) \zeta'(\sigma) \right]$$

$$+ \frac{1}{\pi} \bar{\zeta}'(\sigma) \int_\sigma^l \bar{\omega}_{mk}(\bar{t}_0, \bar{\zeta}) \frac{d\vartheta(\zeta_1, t_0)}{d\tau} d\tau$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \bar{\zeta}'(\sigma) \int_\sigma^l \omega_{mk}^*(\bar{t}_0, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}) \zeta'_1(\tau) d\tau,$$

$$K'_{mk}(s, \sigma) = \bar{\omega}'_{mk}(t_0, \zeta) \zeta'(\sigma) + \frac{1}{2\pi i} \zeta'(\sigma) \int_\sigma^l \omega'^*_{mk}(t_0, \zeta_1, \zeta) \zeta'_1(\tau) d\tau,$$

$$\text{при } \sigma \leqq s \leqq l,$$

$$K'_{mk}(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \zeta'(\sigma) \int_\sigma^l \omega'^*_{mk}(t_0, \zeta_1, \zeta) \zeta'_1(\tau) d\tau,$$

$$\text{при } 0 \leqq s \leqq \sigma.$$

Тогда уравнения (3.17) принимают вид

$$\varphi_m(s) = Z_m^*(s) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_0^l K_{mk}(s, \sigma)\, \varphi_k(\sigma)\, d\sigma + \int_0^l K'_{mk}(s, \sigma)\, \bar{\varphi}_k(\sigma)\, d\sigma \right] \tag{3.18}$$

$$(m = 0, \ldots, n-1),$$

где через $\varphi_k(s)$ и $Z^*_m(s)$ обозначаются граничные значения этих функций в точке, соответствующей дуге s.

Так же как в предыдущем параграфе, решения этой системы мы можем искать в виде

$$\varphi_m(z)=\frac{1}{\pi i}\int_S \frac{\nu_m(t)}{t-z}\,dt,$$

где $\nu_m(t)$—вещественные функции, для определения которых из (3.18) получим n уравнений Фредгольма.

4. Уравнения второго порядка. В этом параграфе мы укажем еще на одно применение наших формул к краевым задачам уравнений второго порядка.

Если в уравнениях (A_0) и (A'_0) положить $n=1$, то получим уравнение второго порядка

$$\Delta u+A_{10}\frac{\partial u}{\partial x}+A_{01}\frac{\partial u}{\partial y}+A_{00}u=0 \tag{4.1}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial\bar z}+B_{10}\frac{\partial u}{\partial z}+B_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar z}+B_{00}u=0,$$

которые эквивалентны между собой. Пусть $A_{10}(x, y)$, $A_{01}(x, y)$ и $A_{00}(x, y)$ суть вещественные аналитические функции в области T. Тогда, согласно общей формуле (4.22) гл. I, всякое регулярное решение уравнения (4.1) имеет вид

$$u=\Gamma_1(z,\bar z')-\int_{z_0}^{z} A(z,\bar z';z_1)\Gamma_1(z_1,\bar z')\,dz_1-\int_{\bar z_0}^{\bar z}\bar A(\bar z,z;\bar z_1)\Gamma_1(z,\bar z_1)\,d\bar z_1$$

$$-\int_{z_0}^{z} dz_1\int_{\bar z_0}^{\bar z} B(z,\bar z;z,\bar z_1)\Gamma_1(z_1,z_1)\,d\bar z_1, \tag{4.2}$$

где $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$ и $\Gamma_1(z,\bar z)$ есть произвольная гармоническая функция в области T.

При этом, как нетрудно видеть,

$$A(z,\bar z;z_1)=B_{01}(z_1,\bar z)\,e^{\int_{\bar z}^{z_1} B_{01}(z_1,\bar z)\,dz_1},\quad \bar A_0(\bar z,z;\bar z_1)=B_{10}(z,z_1)\,e^{\int_{\bar z}^{\bar z_1} B_{10}(z,\bar z_1)\,d\bar z_1}.$$

Подставляя теперь в формулу (4.2) вместо $\Gamma_1(z,\bar z)$ выражение

$$\Gamma_1(z,\bar z)=\varphi(z)+\bar\varphi(\bar z),$$

получим

$$u=A_0(z,\bar z)\,\varphi(z)+\bar A_0(\bar z,z)\,\bar\varphi(\bar z)+\int\limits_{z_0}^{z}B_0(z,\bar z;z_1)\,\varphi(z_1)\,dz_1+$$
$$\int\limits_{\bar z_0}^{\bar z}\bar B_0(\bar z,z;\bar z_1)\,\bar\varphi(\bar z_1)\,d\bar z_1, \tag{4.3}$$

где

$$A_0(z,\bar z)=e^{-\int\limits_{\bar z_0}^{\bar z}B_{10}(z,\bar z_1)\,d\bar z_1},\qquad A_0(\bar z,z)=e^{-\int\limits_{z_0}^{z}B_{01}(z_1,\bar z)\,dz_1} \tag{4.4}$$

а $B_0(z,\bar z,z_1)$ и $B_0(z,\bar z,\bar z_1)$—взаимносопряженные функции, аналитические в области T относительно каждой из точек z и z_1 и непрерывные в $T+S$; причем относительно z_1, при фиксированном z, эти функции являются голоморфными в области T.

Рассмотрим задачу Дирихле: *Найти в области T регулярное решение уравнения* (4.1), *принимающее на границе этой области наперед заданный непрерывный ряд значений.*

Для решения этой задачи мы дадим новый способ, отличный от вышеприведенных. Мы можем ограничиться рассмотрением круговой области, так как путем конформного преобразования всегда можно задачу привести к этому случаю. Итак, пусть T есть единичный круг K с окружностью C с центром в начале. Точки окружности C, которые соответствуют центральным углам ϑ и θ, будем обозначать через σ и τ, т. е.

$$\sigma=e^{i\vartheta},\quad \tau=e^{i\theta}.$$

Предположим, что $z_0=1$ и примем эту точку за начало отсчета дуги на окружности C. Предполагая, что $z=\sigma=e^{i\theta}$, формулу (4.3) можно записать так

$$u(\vartheta)=A_0(\vartheta)\,\varphi(\sigma)+\bar A_0(\vartheta)\,\overline{\varphi(\sigma)}+\int\limits_0^{\vartheta}B_0^*(\vartheta,\theta)\,\varphi(\tau)\,d\theta+\int\limits_0^{\vartheta}\bar B_0^*(\vartheta,\theta)\,\overline{\varphi(\tau)}\,d\theta, \tag{4.5}$$

где $u(\vartheta)$, $A_0(\vartheta)$, $\bar A_0(\vartheta)$, $B_0^*(\vartheta,\theta)$ и $\bar B_0^*(\vartheta,\theta)$ обозначают граничные значения функций u, A_0, $\bar A_0$, $B_0\dfrac{d\tau}{d\theta}$, $\bar B_0\dfrac{d\bar\tau}{d\theta}$ соответственно. Пусть теперь $u(\vartheta)$ есть заданная непрерывная и периодическая функция дуги ϑ, с периодом 2π. Тогда наша задача сводится к следующей задаче: *найти внутри круга K голоморфную функцию $\varphi(z)$, непрерывную в $K+C$ и удовлетворяющую функциональному уравнению* (4.8) *на окружности C.*

где $k(\vartheta, \theta)$—заданная функция, обладающая лагарифмической особенностью при $\theta=\vartheta$, т. е.

$$k(\vartheta, \theta)=k_0(\vartheta, \theta)\lg|\sigma-\tau|+k^*(\vartheta, \theta),$$

причем $k_0(\vartheta, \theta)$ и $k^*(\vartheta, \theta)$—непрерывные функции. Следовательно, к интегральному уравненню (4.14) применима теория Фредгольма. Найдя из этого уравнения $\rho(\vartheta)$, мы получим с помощью формулы (4.11) искомую голоморфную функцию, дающую решение поставленной задачи.

Если интегральное уравнение (4.14) имеет решение при любом $u(\vartheta)$, т. е. однородное уравнение

$$\rho_0(\vartheta)-\int_0^{2\pi}k(\vartheta, \theta)\rho_0(\theta)\,d\theta=0 \qquad (4.15)$$

не имеет решения, то, очевидно, поставленная краевая задача всегда имеет решение и притом единственное. Если однородное интегральное уравнение имеет n линейно-независимых решений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, то, в силу (4.11), получим n линейно-независимых голоморфных функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ и соответствующие этим голоморфным функциям решения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ уравнения (4.1) будут n линейно-независимыми решениями нашей краевой задачи при $u(\vartheta)=0$. Общее решение однородной краевой задачи, очевидно, будет

$$c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_nu_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$—произвольные вещественные числа. Неоднородная краевая задача будет иметь решение лишь в том случае, когда $u(\vartheta)$ будет ортогональна ко всем решениям однородного интегрального уравнения союзного с (4.15), т. е.

$$\int_0^{2\pi}\nu_k(\vartheta)\,u(\vartheta)\,d\vartheta=0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

где $\nu_k(\vartheta)$—линейно-независимые решения уравнения

$$\nu(\vartheta)-\int_0^{2\pi}k(\theta, \vartheta)\,\nu(\theta)\,d\theta=0.$$

В частности, из вышесказанного вытекает, что *если для краевой задачи установлена теорема единственности, то задача всегда имеет решение.*

Таким образом наша краевая задача окончательно решена.

Вернемся теперь к формуле (4.3) и положим в ней

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2}\lg(z-z_0).$$

Тогда, после простых выкладок, получим решение уравнения (4.1) вида

$$\Omega(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=u_0(x,\ y;\ x_0,\ y_0)\lg\frac{1}{r}+v_0(x,\ y;\ x_0,\ y_0),$$

которое мы назвали выше элементарным решением. Нетрудно видеть, что $u_0(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ есть частное решение уравнения (4.1), соответствующее функции $\varphi(z)=-\frac{1}{2}$ и что

$$u(x_0,\ y_0;\ x_0,\ y_0)=1.$$

Рассмотрим интеграл

$$V(x,\ y)=\int\limits_S \rho(s)\,\Omega(x,\ y;\ s)\,ds,$$

где $\rho(s)$—произвольная непрерывная функция, а $\Omega(x,\ y;\ s)$ обозначает предельное значение $\Omega(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$, когда точка $(x_0,\ y_0)$ стремится к границе области T. Функцию $V(x,\ y)$ мы назовем обобщенным потенциалом простого слоя соответствующим уравнению (4.1). Она, очевидно, непрерывна в области T вплоть до контура S.

Рассмотрим также интеграл

$$W(x,\ y)=\int\limits_S \mu(s)\,\frac{d\Omega(x,\ y;\ s)}{dn_s}\,ds, \tag{4.16}$$

где $\mu(s)$—непрерывная функция, а n_s—нормаль кривой S в точке s. Функцию $W(x,\ y)$ мы назовем обобщенным потенциалом двойного слоя.

При помощи этих потенциалов можно составить интегральные уравнения Фредгольма, соответствующие различным краевым задачам для диференциального уравнения (4.1). Например, если на контуре S известно $u(s)$, то при помощи потенциала (4.16) мы сразу приходим к интегральному уравнению

$$\mu(s)-\int\limits_S \mu(\sigma)\,K(s,\ \sigma)\,d\sigma=u(s),$$

где $K(s,\ \sigma)$—непрерывное ядро. Недостатком этого пути является то, что исследование полученного интегрального уравнения в общем случае затруднительно, так как трудно доказать представимость всех решений дифференциального уравнения в виде обобщенных потенциалов простого или двойного слоев.

Глава III

Теоремы существования решений краевых задач

Во второй главе мы пользовались допущением, что рассмотренная там краевая задача I при $n > 1$ имеет решение. В этой главе мы покажем справедливость этого допущения. Начнем с n-гармонического уравнения.

1. Краевая задача I для n-гармонического уравнения. Рассмотрим n-гармоническое уравнение

$$\Delta^n u = 0.$$

Всякое вещественное решение этого уравнения, как это вытекает из формулы (7.6a) гл. I, имеет вид

$$u = r^{2n-2}\,\omega_{n-1} + r^{2n-4}\,\omega_{n-2} + \ldots + r^2\omega_1 + \omega_0,$$

где $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ суть произвольные гармонические функции, а r—расстояние от переменной точки до какой-нибудь фиксированной точки.

Пусть T—конечная односвязная область, ограниченная простой замкнутой регулярной кривой S длины l.

Краевая задача I, рассмотренная нами в гл. II, в случае n-гармонического уравнения примет вид: *найти в области T такую регулярную n-гармоническую функцию, которая на границе этой области удовлетворяет условиям*

$$[u]_S = f_0(s),\quad \left[\frac{du}{d\nu}\right]_S = f_1(s),\quad \ldots,\quad \left[\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right]_S = f_{n-1}(s),$$

где $f_0(s), f_1(s), \ldots, f_{n-1}(s)$—заданные регулярные функции длины дуги s, а ν внутренняя нормаль. Если $f_0(s) = 0$, $f_1(s) = 0 \ldots$, $f_{n-1} = 0$, то мы будем иметь однородную краевую задачу.

Пусть u и v—две какие-нибудь регулярные функции в $T+S$. Тогда имеем (гл. I, (5.10))

$$\iint\limits_T (u\Delta^n v - v\Delta^n u)\,dT = -\int\limits_S \sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta^k u\,\frac{d\Delta^{n-k-1}v}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu}\,\Delta^{n-k-1}v\right)ds. \quad (1.1)$$

Пусть теперь u—регулярная n-гармоническая функция в $T+S$, а

$$v = R^{2(n-1)} \lg \frac{1}{R} + v^*(x, y; \xi, \eta),$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

где v^*—какая-нибудь регулярная n-гармоническая функция в $T+S$.

Отсюда получим

$$\Delta^{n-1} v = (n-1)!\, \lg \frac{1}{R} + \text{гармоническая функция}. \tag{1.2}$$

В силу (1.2), из (1.1) получаем формулу

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi (n-1)!^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \left(\Delta^k u \frac{d\Delta^{n-k-1} v}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu} \Delta^{n-k-1} v \right) ds. \tag{1.3}$$

Отсюда вытекает лемма:

Лемма 1. *Если u есть регулярное решение n-гармонического уравнения в области T, которое на границе этой области обращается в нуль вместе со своими частными производными до $2n-1$-го порядка, то $u \equiv 0$.*

Пусть опять u и v—две произвольные регулярные функции в $T+S$. Тогда имеют место тождества:

1°. $n = 2m$ ($m > 0$ целое число)

$$\iint_T u\, \Delta^{2m} v\, dT = -\sum_{k=0}^{m-1} \int_S \left(\Delta^k u \frac{d\Delta^{2m-k-1} v}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu} \Delta^{2m-k-1} v \right) ds + \iint_T \Delta^m u \Delta^m v\, dT \tag{1.4}$$

и

2°. $n = 2m+1$ ($m \geqq 0$ целое число)

$$\iint_T u \Delta^{2m+1} v\, dT = -\sum_{k=0}^{m-1} \int_S \left(\Delta^k u \frac{d\Delta^{2m-k} v}{d\nu} - \frac{d\Delta^k u}{d\nu} \Delta^{2m-k} v \right) ds - \int_S \Delta^m u \frac{d\Delta^m v}{d\nu} ds - \iint_T \left(\frac{\partial \Delta^m u}{\partial x} \frac{\partial \Delta^m v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta^m u}{\partial y} \frac{\partial \Delta^m v}{\partial y} \right) dT. \tag{1.5}$$

Положим, что $u=v$ и пусть u—регулярная n—гармоническая функция в области T, обращающаяся в нуль вместе со своими производными до $n-1$-го порядка на S. Тогда формулы (1.4) и (1.5), как нетрудно видеть, дадут

$$\Delta^m u = 0, \text{ при } n=2m \text{ в области } T$$

и

$$\Delta^m u = \text{const}, \text{ при } n=2m+1 \text{ в области } T.$$

Но отсюда, в силу леммы 1, легко вытекает, что $u\equiv 0$ в области T. Таким образом мы нашли:

Теорема 1. *Однородная краевая задача* I_0, *связанная с n-гармоническим уравнением, не имеет регулярного решения, отличного от нулевого.*

Следствие. *Неоднородная краевая задача* I, *связанная с n-гармоническим уравнением может иметь лишь единственное решение.*

2. Функция Грина. Построение функции Грина для круговой области. Пусть T—конечная область, ограниченная кривой S и $\zeta_1=\xi+i\eta$—какая-нибудь фиксированная точка в этой области. Рассмотрим функцию $G_n(\zeta, \zeta_1)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta^n G_n = 0$ для всех $\zeta \neq \zeta_1$ в области T,

2) $G_n(\zeta, \zeta_1) = R^{2(n-1)} \lg \frac{1}{R} + G_n^*(\zeta, \zeta_1)$, где $G_n^*(\zeta, \zeta_1)$ регулярная n-гармоническая функция в области T; причем $R=|\zeta-\zeta_1| = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$,

3) $G_n(\zeta, \zeta_1)$ и все ее производные до $n-1$-го порядка обращаются в нуль, когда $\zeta \subset S$(*.

Эта функция называется n-гармонической функцией Грина области T, соответствующей точке ζ_1. Если эта функция существует, то при помощи нее легко решается краевая задача I.

В самом деле, если в формулу (1.3) вместо v внести $G_n(\zeta, \zeta_1)$, то, в силу вышеуказанных свойств этой функции, получим

(* Достаточно требовать обращения в нуль на S функции $G_n(\zeta, \zeta_1)$ и всех ее производных до n—1-го порядка по какому-нибудь направлению, не касательному кривой S. Легко установить, что эти требования совершенно эквивалентны между собой, если кривая S достаточно регулярна.

1°. Когда n—четное целое положительное число

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi (n-1)!^2} \int\limits_S \Big\{ u \frac{d\Delta^{n-1} G_n(\zeta, \zeta_1)}{d\nu} - \frac{du}{d\nu} \Delta^{n-1} G_n(\zeta, \zeta_1)$$

$$+ \Delta u \frac{d\Delta^{n-2} G_n(\zeta, \zeta_1)}{d\nu} - \ldots - \frac{d\Delta^{\frac{n-2}{2}} u}{d\nu} \Delta^{\frac{n}{2}} G_n(\zeta, \zeta_1) \Big\} ds.$$

2°. Когда n—нечетное целое положительное число

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi (n-1)!^2} \int\limits_S \Big\{ u \frac{d\Delta^{n-1} G_n(\zeta, \zeta_1)}{d\nu}$$

$$- \frac{du}{d\nu} \Delta^{n-1} G_n(\zeta, \zeta_1) + \ldots + \Delta^{\frac{n-1}{2}} u \frac{d\Delta^{\frac{n-1}{2}} G_n(\zeta, \zeta_1)}{d\nu} \Big\} ds.$$

Допустим, что $G_{k-1}(\zeta, \zeta_1)$—$k-1$-гармоническая функция Грина области T. Тогда, как нетрудно видеть, k-гармоническую функцию Грина можно представить в виде

$$G_k(\zeta, \zeta_1) = R^2 G_{k-1}(\zeta, \zeta_1) + G_k^{**}(\zeta, \zeta_1), \tag{2.1}$$

где $G_k^{**}(\zeta, \zeta_1)$—регулярная k-гармоническая функция в области T, удовлетворяющая условиям

$$[G_k^{**}(\zeta, \zeta_1)]_S \equiv 0, \quad [D_j G_k^{**}(\zeta, \zeta_1)]_S \equiv 0$$
$$(j = 1, \ldots, k-2) \tag{2.2}$$

и

$$[D_{k-1} G_k^{**}(\zeta, \zeta_1)]_S = -[R^2]_S [D_{k-1} G_{k-1}(\zeta, \zeta_1)]_S. \tag{2.3}$$

Очевидно, выполнение условий (2.3), после того, как имеют место условия (2.2), достаточно лишь для одной какой-нибудь частной производной порядка $k-1$.

Мы теперь перейдем к доказательству существования функции Грина. Рассмотрим сначала круговую область. В этом случае не только можно доказать существование n-гармонической функции Грина, но можно также построить ее для любого n в явном виде.

Не уменьшая общности мы можем ограничиться рассмотрением единичного круга с центром в начале. Пусть C—окружность этого круга, а K—внутренность ее. Пусть $\zeta_1 = \xi + i\eta$ — какая-нибудь фиксированная точка внутри K. Через $\zeta = x + iy$ мы будем все время обозначать переменную точку.

Функция Грина $G_1(\zeta, \zeta_1)$ для круга, как известно, имеет вид

$$G_1(\zeta, \zeta_1) = 2\lg \frac{\rho R_1}{R} = 2\lg \left| \frac{\bar{\zeta}_1 \zeta - 1}{\zeta - \zeta_1} \right|$$

где

$$R = |\zeta - \zeta_1|, \quad R_1 = \left| \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_1} \right|, \quad \rho = |\zeta_1|.$$

Или эту формулу еще можно записать так (*

$$G_1(\zeta, \zeta_1) = -\lg(\zeta - \zeta_1) + \lg(\bar{\zeta}_1 \zeta - 1) - \lg(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) + \lg(\zeta_1 \bar{\zeta} - 1).$$

Отсюда легко получаем

$$\frac{\partial^m G_1}{\partial \zeta^m} = (-)^m (m-1)! \left\{ \frac{1}{(\zeta - \zeta_1)^m} - \frac{1}{(\zeta - \zeta'_1)^m} \right\}, \quad \left(\zeta'_1 = \frac{1}{\bar{\zeta}_1} \right) \tag{2.4}$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Этой формулой мы воспользуемся ниже.

Перейдем теперь к построению функции $G_2(\zeta, \zeta_1)$. В силу (2.1)

$$G_2(\zeta, \zeta_1) = (\zeta - \zeta_1)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) G_1(\zeta, \zeta) + G_2^{**}(\zeta, \zeta_1), \tag{2.5}$$

где $G_2^{**}(\zeta, \zeta_1)$—бигармоническая функция в области T, которая на C, в силу (2.2) и (2.3), должна удовлетворять условиям

$$[G_2^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = 0, \quad [D_1 G_2^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = -[(\zeta - \zeta_1)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1) D_1 G_1(\zeta, \zeta_1)]_C \, .$$

Эти условия, очевидно, будут выполняться, если удовлетворены условия

$$[G_2^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = 0, \quad \left[\frac{\partial G_2^{**}(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta} \right]_C = -(\sigma - \zeta_1)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_1) \left[\frac{\partial G_1(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta} \right]_C, \tag{2.6}$$

где $\sigma = e^{i\psi}$ обозначает точку на C, $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma}$. При $m = 1$ из (2.4) получим

$$\frac{\partial G_1}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta - \zeta'_1}.$$

Отсюда следует, что

$$(\sigma - \zeta_1)(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_1) \left[\frac{\partial G_1}{\partial \zeta} \right]_C = \bar{\sigma}(\zeta_1 \bar{\zeta}_1 - 1). \tag{2.7}$$

Предположим теперь, что

$$G_2^{**}(\zeta, \zeta_1) = (\zeta \bar{\zeta} - 1)\, \omega_1,$$

(* В дальнейшем все время будем предполагать, что мнимые части логарифмов от взаимносопряженных величин равны по абсолютной величине и отличаются по знаку.

где ω_1—гармоническая функция в области K. Тогда, очевидно, первое из условий (2.6) автоматически выполняется. Чтобы удовлетворить также второму из этих условий должны иметь

$$[\omega_1]_C = -\sigma(\sigma-\zeta_1)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_1)\left[\frac{\partial G_1}{\partial \zeta}\right]_C.$$

Но, в силу (2.7), это условие примет вид

$$[\omega_1]_C = 1-\zeta_1\bar{\zeta}_1.$$

Так как ζ_1—фиксированная точка внутри K, то имеем, что гармоническая функция ω_1 на окружности C принимает постоянное значение $1-\zeta_1\bar{\zeta}_1$. Следовательно, она везде равна этой постоянной. Итак

$$\omega_1 = 1-\zeta_1\bar{\zeta}_1. \tag{2.8}$$

Тогда бигармоническая функция

$$G_2^{**}(\zeta, \zeta_1) = -(\zeta\bar{\zeta}-1)(\zeta_1\bar{\zeta}_1-1) = -(1-r^2)(1-\rho^2),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, удовлетворяет всем условиям (2.6).

Таким образом, в силу (2.8), функция Грина $G_2(\zeta, \zeta_1)$ для круговой области K имеет вид

$$G_2(\zeta, \zeta_1) = 2(\zeta-\zeta_1)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_1)\lg\left|\frac{\bar{\zeta}_1\zeta-1}{\zeta-\zeta_1}\right| - (1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)(1-\zeta\bar{\zeta}) \tag{2.9}$$

или, переходя к вещественным переменным, получим

$$G_2(x, y;\ \xi, \eta) = 2R^2\lg\frac{\rho R_1}{R} - (1-r^2)(1-\rho^2). \tag{2.10}$$

Из (2.9) легко получим

$$\frac{\partial^m G_2(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta^m} = (\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_1)(-1)^m m!\left[\frac{1}{m(m-1)(\zeta-\zeta_1)^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)(\zeta-\zeta'_1)^{m-1}} + \frac{\zeta-\zeta_1}{m(\zeta-\bar{\zeta}_1)^{m-1}}\right] \tag{2.11}$$

$$(m=2,\ 3,\ \ldots).$$

Переходим теперь к построению $G_3(\zeta, \zeta_1)$. В силу (2.1)

$$G_3(\zeta, \zeta_1) = (\zeta-\zeta_1)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_1)\,G_2(\zeta, \zeta_1) + G_3^{**}(\zeta, \zeta_1),$$

где $G_3^{**}(\zeta, \zeta_1)$—3-гармоническая функция в области K, удовлетворяющая следующим условиям на C:

$$[G_3^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = 0 \quad [D_1\,G_3^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = 0,$$
$$[D_2\,G_3^{**}(\zeta, \zeta_1)]_C = -(\sigma-\zeta_1)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_1)[D_2\,G_2(\zeta, \zeta_1)]_C. \tag{2.12}$$

Предположим, что

$$G_3^{**}(\zeta, \zeta_1) = (\zeta\bar{\zeta}-1)^2\,\omega_2, \tag{2.13}$$

где ω_2—гармоническая функция в области K. Тогда, очевидно, первые два условия (2.12) автоматически будут удовлетворены при всяком ω_2. Если в качестве D_2 возьмем производную $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$, то для ω_2 на C получаем условие

$$[\omega_2]_C = -\frac{\sigma^2}{2}(\sigma-\zeta_1)(\bar\sigma-\bar\zeta_1)\left[\frac{\partial^2 G_2(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta^2}\right]_C.$$

При $m=2$ из (2.11) имеем

$$\left[\frac{\partial^2 G_2(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta^2}\right]_C = -(\bar\sigma-\bar\zeta)\left[\frac{1}{\sigma-\zeta_1}+\frac{2\bar\sigma\bar\zeta}{\bar\sigma-\bar\zeta_1}+\frac{(\sigma-\zeta_1)\bar\sigma^2\bar\zeta^2}{(\bar\sigma-\bar\zeta)^2}\right].$$

Отсюда следует, что

$$[\omega_2]_C = \frac{1}{2}\sigma^2(\bar\sigma-\bar\zeta_1)^2+\sigma\bar\zeta_1(\sigma-\zeta_1)(\bar\sigma-\bar\zeta_1)+\frac{1}{2}(\sigma-\zeta_1)^2\bar\zeta_1^2$$

$$=\frac{1}{2}[\sigma(\bar\sigma-\bar\zeta_1)+(\sigma-\zeta_1)\bar\zeta_1]^2=\frac{1}{2}[1-\sigma\bar\zeta_1+\sigma\bar\zeta_1-\zeta_1\bar\zeta_1]^2=\frac{1}{2}(1-\bar\zeta_1\zeta_1)^2.$$

Так как гармоническая функция ω_2 на C равняется постоянной $\frac{1}{2}(1-\bar\zeta_1\zeta_1)^2$, то, очевидно, она везде будет равняться этой постоянной, и мы имеем

$$\omega_2=\frac{1}{2}(1-\zeta_1\bar\zeta_1)^2=\frac{1}{2}(1-\rho^2)^2.$$

Тогда, в силу (2.13),

$$G_3(\zeta, \zeta_1)=(\zeta-\zeta_1)(\bar\zeta-\bar\zeta_1)\, G_2(\zeta, \zeta_1)+\frac{1}{2}(1-\zeta\bar\zeta)^2(1-\zeta_1\bar\zeta_1)^2.$$

Вносяа теперь сюда вместо G_2 выражение (2.9), получим

$$G_3(\zeta,\zeta_1)=2(\zeta-\zeta_1)^2(\bar\zeta-\bar\zeta_1)^2\lg\left|\frac{\bar\zeta_1\zeta-1}{\zeta-\zeta_1}\right|-(\zeta-\zeta_1)(\bar\zeta-\bar\zeta_1)(1-\zeta\bar\zeta)(1-\zeta_1\bar\zeta_1)$$

$$+\frac{1}{2}(1-\zeta\bar\zeta)^2(1-\zeta_1\bar\zeta_1)^2,$$

или, переходя к вещественным переменным, будем иметь

$$G_3(x, y;\ \xi, \eta)=2R^4\lg\frac{\rho R_1}{R}-R^2(1-r^2)(1-\rho^2)+\frac{1}{2}(1-r^2)^2(1-\rho^2)^2.$$

Теперь легко угадать общий вид k-гармонической функции Грина для любого целого положительного k. Мы докажем, что она имеет вид

$$G_k(z, z_1)=(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)G_{k-1}(z, z_1)+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}(1-z\bar{z})^{k-1}(1-z_1\bar{z}_1)^{k-1} \quad (2.14)$$

$$(k=2, 3, \ldots),$$

или в вещественных переменных в явном виде

$$G_k(x, y; \xi, \eta)=2R^{2(k-1)}\lg\frac{\rho R_1}{R}-R^{2(k-2)}(1-r^2)(1-\rho^2)$$
$$+\frac{1}{2}R^{2(k-3)}(1-r^2)^2(1-\rho^2)^2+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}(1-r^2)^{k-1}(1-\rho^2)^{k-1}. \quad (2.15)$$

Предположим, что эта формула верна для $k=2, \ldots, l$ ($l>1$) и докажем, что она сохраняет свой вид и для $k=l+1$. Для тех k, для которых по предположению верна формула (2.15), будем иметь

$$\frac{\partial^m G_k(z, z_1)}{\partial z^m}=(\bar{z}-\bar{z}_1)^{k-1}(-1)^{m+k-1}m!\left[\frac{(k-1)!}{m(m-1)\ldots(m-k-1)(z-z_1)^{m-k-1}}\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{(z-z_1)^j}{(m-k+j+1)(z-z'_1)^{m-k+j+1}}\right] \quad (2.16)$$
$$\left(m\geqq k,\ z'_1=\frac{1}{\bar{z}}\right).$$

В самом деле, для $k=2$ эта формула совпадает с (2.10). Пусть она верна для $k=\nu$ ($\nu<l$) и докажем, что она имеет место и для $\nu+1$.

Так как

$$G_{\nu+1}(z, z_1)=(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)G_\nu(z, z_1)+\frac{(-)^\nu}{\nu}(1-z_1\bar{z}_1)^\nu(1-z\bar{z})^\nu$$

при $m\geqq\nu+1$ имеем

$$\frac{\partial^m G_{\nu+1}(z, z_1)}{\partial z^m}=(\bar{z}-\bar{z}_1)\left[m\frac{\partial^{m-1}G_\nu}{\partial z^{m-1}}+(z-z_1)\frac{\partial^m G_\nu}{\partial z^m}\right]$$
$$=(-1)^{m+\nu-2}m!(\bar{z}-\bar{z}_1)^\nu\left[\frac{(\nu-1)!}{(m-1)\ldots(m-\nu)(z-z_1)^{m-\nu}}\right.$$
$$\left.-\sum_{j=0}^{\nu-1}(-1)^j\binom{\nu-1}{j}\frac{(z-z_1)^j}{(m-\nu+j)(z-z'_1)^{m-\nu+j}}\right]$$

$$+(z-z_1)(\bar z-\bar z_1)^{\nu}(-)^{m+\nu-1}m!\left[\frac{(\nu-1)!}{m\ldots(m-\nu+1)(z-z_1)^{m-\nu+1}}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{\nu-1}(-)^j\binom{\nu-1}{j}\frac{(z-z_1)^j}{(m-\nu+j+1)(z-z'_1)^{m-\nu+j+1}}\right]$$

$$=(\bar z-\bar z_1)^{\nu}(-)^{m+\nu}m!\left[\frac{(\nu-1)!}{(m-1)\ldots(m-\nu)(z-z_1)^{m-\nu}}\right.$$

$$-\sum_{j=0}^{\nu-1}(-)^t\binom{\nu-1}{j}\frac{(z-z_1)^j}{(m-\nu+j)(z-z'_1)^{m-\nu+j}}-\frac{(\nu-1)!}{m\ldots(m-\nu)(z-z_1)^{m-\nu}}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{\nu-1}(-)^j\binom{\nu-1}{j}\frac{(z-z_1)^{j+1}}{(m-\nu+j+1)(z-z'_1)^{m-\nu+j+1}}\right]$$

$$=(-)^{m+\nu}m!(\bar z-\bar z_1)^{\nu}\left\{\frac{\nu!}{m(m-1)\ldots(m-\nu)(z-z_1)^{m-\nu}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j\left[\binom{\nu-1}{j}+\binom{\nu-1}{j-1}\right]\frac{(z-z_1)^j}{(m-\nu+j)(z-z'_1)^{m-\nu+j}}\right\}$$

$$=(\bar z-\bar z_1)^{\nu}(-1)^{m+\nu}m!\left[\frac{\nu!}{m(m-1)\ldots(m-\nu)(z-z_1)^{m-\nu}}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{\nu}(-)^j\binom{\nu}{j}\frac{(z-z_1)^j}{(m-\nu+j)(z-z'_1)^{m-\gamma+j}}\right].$$

Таким образом мы видим, что формула (2.16) верна и при $k=\nu+1$. Следовательно, формула (2.16) имеет место для всех $k=2, \ldots, l$.

Ищем теперь $G_{l+1}(z, z_1)$ в виде

$$G_{l+1}(z, z_1)=(z-z_1)(\bar z-\bar z_1)G_l(z, z_1)+(z\bar z-1)^l\omega_l,$$

где ω_l—гармоническая функция в области K. В силу того, что

$$[G_l(z, z_1)]_C=0,\ [D_j G_l(z, z_1)]_C=0\ (j=1, \ldots, l-1),$$

из условия $[D_l G_{l+1}(z, z_1)]_C=0$ получим легко, что

$$[\omega_l]_C=-\frac{1}{l!}\sigma^l(\sigma-z_1)(\bar\sigma-\bar z_1)\left[\frac{\partial^l G_l}{\partial z^l}\right]_C. \tag{2.17}$$

Из (2.16) при $k=l$ и $m=l$, получим

$$\left[\frac{\partial^l G_l}{\partial \zeta^l}\right]_C = -(\bar{\sigma}-\bar{\zeta})^{l-1}\, l!\left[\frac{(l-1)!}{l!\,(\sigma-\zeta_1)}\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{l-1}(-)^j\binom{l-1}{j}\frac{(\sigma-\zeta_1)^j}{(j+1)\left(\sigma-\dfrac{1}{\bar{\zeta}_1}\right)^{j+1}}\right]$$

$$=-(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_1)^{l-1}\, l!\left[\frac{1}{l(\sigma-\zeta_1)}+\sum_{j=0}^{l-1}\binom{l-1}{j}\frac{(\sigma-\zeta_1)^j\,\bar{\zeta}_1^{j+1}\,\bar{\sigma}^{j+1}}{(j+1)(\bar{\sigma}-\bar{\zeta}_1)^{j+1}}\right].$$

В силу этого, (2.17) дает

$$[\omega_l]_C = \frac{\sigma^l(\bar{\sigma}-\bar{\zeta})^l}{l}+\sum_{j=0}^{l-1}\binom{l-1}{j}\frac{(\sigma\bar{\zeta}_1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{j+1}(1-\sigma\bar{\zeta}_1)^{l-j-1}}{j+1}$$

$$=\frac{1}{l}\left[(1-\sigma\bar{\zeta}_1)^l+\sum_{j=0}^{l-1}\binom{l}{j-1}(\sigma\bar{\zeta}_1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{j+1}(1-\sigma\bar{\zeta}_1)^{l-j-1}\right]$$

$$=\frac{1}{l}[1-\sigma\bar{\zeta}_1+\sigma\bar{\zeta}_1-\zeta_1\bar{\zeta}_1]^l=\frac{1}{l}(1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)^l.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_l=\frac{1}{l}(1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)^l=\frac{1}{l}(1-\rho^2)^l.$$

В силу этого, G_{l+1} принимает вид

$$G_{l+1}(\zeta,\ \zeta_1)=(\zeta-\zeta_1)(\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_1)\,G_l(\zeta,\ \zeta_1)+\frac{(-)^l}{l}(1-\zeta\bar{\zeta})^l(1-\zeta_1\bar{\zeta}_1)^l.$$

Следовательно, доказана справедливость формулы (2.14).

Таким образом, для круговой области n-гармоническая функция Грина при любом n имеет вид

$$G_n(\zeta,\ \zeta_1)=G_n(x,y;\ \xi,\ \eta)$$

$$=2R^{2(n-1)}\lg\frac{\rho R_1}{R}-\sum_{l=1}^{n-1}(-)^{l-1}\frac{1}{l}R^{2(n-l-1)}(1-r^2)^l(1-\rho^2)^l \qquad (2.18)$$

$$(n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Нетрудно теперь увидеть, что эта функция непрерывна и имеет непрерывные производные до $2n-3$-го порядка для всех значений x и y. Производная $2n-2$-го порядка имеет особенность логарифмического типа, а производная $2n-1$-го порядка обращается в бесконечность как $\frac{1}{R}$ в точке $x=\xi$, $y=\eta$.

Применим теперь функцию Грина, соответствующую круговой области, к решению краевой задачи линейных уравнений в случае произвольной конечной односвязной области.

3. Решение краевой задачи для диференциального уравнения вида:

$$\Delta^n u = L_{2n-1}(u) + f(x, y), \tag{3.1}$$

где

$$L_{2n-1} = \sum_{p+q \leqq 2n-1} A_{pq}(x, y) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q};$$

причем $A_{pq}(x, y)$ и $f(x, y)$—заданные регулярные функции. Мы рассмотрим следующую краевую задачу:

Найти в области T такое регулярное решение уравнения (3.1), *которое на границе этой области обращается в нуль вместе со своими производными до $n-1$-го порядка, т. е.*

$$[D_j u]_S = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.2}$$

Эту краевую задачу мы назовем задачей I. Если $f(x, y) \neq 0$, то задача I называется неоднородной, а в случае $f(x, y) = 0$—однородной.

Пусть

$$z = \omega(z') \quad (z' = x' + iy')$$

функция, отображающая конформно область T на внутренность единичного круга $K(|z'| \leqq 1)$.

Если взять границу области T достаточно регулярной, то можем положить, что $\omega(z')$, $\omega'(z')$, ..., $\omega^{(n)}(z')$ существуют и непрерывны в $K+C$. Кроме того, $\omega'(z') \neq 0$ в $K+C$, а $\omega^{(n)}(z')$ удовлетворяет условию Hölder'a.

Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\Delta^n u' = L'_{2n-1}(u') + f(x', y'), \tag{3.3}$$

где Δ^n теперь n-гармонический оператор в области K,

$$L'_{2n-1} = \sum A'_{pq}(x', y') \frac{\partial^{p+q}}{\partial x'^p \partial y'^q},$$

$$u'(x', y') = u[x(x', y'), y(x', y')];$$

причем $A'_{pq}(x', y')$ и $f'(x', y')$, очевидно, будут также регулярными функциями, удовлетворяющими условию Hölder'а в $K+C$.

Краевые условия (3.3), очевидно, принимают аналогичный вид

$$[D'_j u']_C = 0 \quad (j=0, 1, ..., n-1), \tag{3.4}$$

где D'_j обозначает производные порядка j по новым переменным x' и y'.

Таким образом, наша краевая задача I переходит в аналогичную же краевую задачу для круговой области K, а именно: *найти в области K такое регулярное решение диференциального уравнения* (3.3), *которое на C удовлетворяет условиям* (3.4). Очевидно, если эта краевая задача имеет решение, то имеет решение также краевая задача, поставленная выше для области T и наоборот. Перейдем теперь к решению этой краевой задачи.

Пусть

$$u(x', y') = \frac{1}{2\pi(n-1)!^2} \iint_K G_n(x', y'; \xi', \eta') w(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \tag{3.5}$$

где $G_n(x', y'; \xi', \eta')$—n-гармоническая функция Грина для круговой области K, определенная формулой (2.18), а w—пока неопределенная функция. Предположим, что функция w удовлетворяет в $K+C$ условию Hölder'а. Тогда, как нетрудно видеть, выражение (3.5) удовлетворяет всем условиям (3.4) и представляет решение уравнения

$$\Delta^n u' = w(x', y'). \tag{3.6}$$

Определим теперь w так, чтобы выражение (3.5) удовлетворяло бы также уравнению (3.3). Для этого, как нетрудно видеть в силу (3.6) и (3.5), $w(x, y)$ должна быть решением интегрального уравнения

$$w(x', y') = \frac{1}{2\pi(n-1)!^2} \iint_K L'_{2n-1}[G_n(x', y'; \xi, \eta')] w(\xi', \eta') d\xi' d\eta' + f(x', y'). \tag{3.7}$$

Рассмотрим также однородное уравнение

$$w'_0(x', y') = \frac{1}{2\pi(n-1)!^2} \iint_K L'_{2n-1}[G_n(x', y'; \xi', \eta')] w_0(\xi', \eta') d\xi' d\eta'. \tag{3.8}$$

Так как ядро уравнения (3.7), $L'_{2n-1}[G_n(x', y'; \xi', \eta')]$, имеет особенность порядка не больше $\frac{1}{R}$ и коэфициенты диференциального оператора L'_{2n-1} суть регулярные функции в $K+C$, удовлетворяющие условиям Hölder'a, то очевидно, что к этому уравнению можно применить теорию Фредгольма.

Ввиду того, что $f'(x', y')$, по предположению, удовлетворяет условию Hölder'a, то решение уравнения (3.7) также будет удовлетворять условию Holder'a. Тогда, как нетрудно видеть, выражение (3.5), образованное при помощи решения уравнения (3.7), действительно удовлетворяет уравнению (3.3) и краевым условиям (3.4). Таким образом оно решает краевую задачу I. При этом, если предположить, что однородная краевая задача I имеет лишь нулевое решение, то, очевидно, интегральное уравнение (3.8) имеет также лишь нулевое решение, и следовательно, неоднородное уравнение (3.7) имеет всегда решение и соответствующее этому решению выражение (3.5) дает единственное решение не однородной краевой задачи I. Если же однородная краевая задача I имеет решения, отличные от нулевого, то и однородное интегральное уравнение (3.8) имеет также решения, и если $w_0^1, \ldots, w_0^r$ есть полная система линейно-независимых решений этого уравнения, то соответствующие им выражения (3.5) дадут также полную систему линейно-независимых решений однородной краевой задачи I; при этом неоднородная задача I имеет решение лишь в том случае, когда $f'(x', y')$ ортогональна ко всем решениям уравнения, союзного (3.8).

На основании полученных результатов мы можем высказать теорему:

Теорема 1. *Если T есть конечная односвязная область, ограниченная простой замкнутой регулярной кривой S, то неоднородная краевая задача I всегда имеет решение, если соответствующая однородная задача имеет лишь нулевое (тривиальное) решение.*

Из этой теоремы, в частности, получаем теорему существования решения краевой задачи I, поставленной нами в § 1 для n-гармонического уравнения.

Пусть $F(x, y)$—какая-нибудь функция, непрерывная вместе со своими производными до $2n$-го порядка в $T+S$ и удовлетворяющая условиям

$$[F(x, y)]_S = -f_0(s), \quad \left[\frac{dF}{d\nu}\right]_S = -f_1(s), \ldots, \quad \left[\frac{d^{n-1}F}{d\nu^{n-1}}\right]_S = -f_{n-1}(s).$$

Кроме того предположим, что $\Delta^n F(x, y)$ удовлетворяет условию Hölder'a в $T+S$.

Пусть

$$v = u + F(x, y),$$

где u есть искомая n-гармоническая функция, которая должна на границе области T удовлетворять условиям

$$[u]_S = f_0(s), \quad \left[\frac{du}{d\nu}\right]_S = f_1(s), \ \ldots, \ \left[\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right]_S = f_{n-1}(s). \tag{3.9}$$

Тогда, очевидно, в области T

$$\Delta^n v = \Delta^n F(x, y) \tag{3.10}$$

и

$$[v]_S = 0, \quad \left[\frac{dv}{d\nu}\right]_S = 0, \ \ldots, \ \left[\frac{d^{n-1}v}{d\nu^{n-1}}\right]_S = 0. \tag{3.11}$$

Предполагая кривую S достаточно регулярной, отсюда сразу получим, что

$$[D_j v]_S = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Легко видеть, в силу теоремы единственности § 1, что всякое регулярное решение уравнения (3.10), удовлетворяющее условиям (3.11), единственно, или, что тоже самое, решение уравнения (3.10) при $\Delta^n F = 0$, удовлетворяющее условиям (3.11), есть тождественный нуль.

В силу этого, согласно предыдущей теоремы, получаем:

Если T есть конечная односвязная область, ограниченная простой замкнутой регулярной кривой S и $f_0(s), f_1(s), \ldots, f_{n-1}(s)$ суть заданные регулярные функции длины дуги s кривой S, то существует единственная регулярная n-гармоническая функция в области T, которая на границе этой области удовлетворяет краевым условиям (3.9). Что требовалось доказать.

KOMPLEXE DARSTELLUNG DER LÖSUNGEN ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT ANWENDUNGEN AUF RANDWERTPROBLEME

Von ELIAS VECOUA

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Differentialgleichung der Gestalt

$$\mathfrak{L}_n(u) \equiv \Delta^n u + \sum_{k=1}^{n} L_k(\Delta^{n-k} u) = \begin{cases} f(x, y) & \text{(A)} \\ 0 & \text{(A}_0\text{)} \end{cases}$$

untersucht, wobei Δ^m der m mal wiederholte Laplacesche Operator ist, L_k— der allgemeine lineare Differentialoperator k-ter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen, mit analytischen Koeffizienten, $f(x, y)$—eine analytische Funktion.

Da nach einem Satze E. Picards *jede reguläre Lösung der Gleichung* (A) *eine analytische Funktion ist*, so können x und y als komplexe Veränderliche betrachtet werden. Geht man daher zu den Veränderlichen

$$z=x+iy, \quad z'=x-iy$$

über, so nimmt Gleichung (A) die Gestalt an:

$$\frac{\partial^{2n}u}{\partial z^n \partial z'^n}+\sum_{k=1}^{n} L_k\left(\frac{\partial^{2n-2k}u}{\partial z^{n-k}\,\partial z'^{n-k}}\right)=F(z,\ z'). \tag{A'}$$

Man beweist leicht, dass Gleichung (A') der Volterraschen Integralgleichung im komplexen Gebiet

$$u(z, z')+\int_{z_0}^{z} a(z,\ z';\ z_1)\,u(z_1,\ z')\,dz_1+\int_{z'_0}^{z'} a'(z,\ z';\ z_1')\,u(z,\ z_1')\,dz_1'+$$

$$+\int_{z_0}^{z} dz_1\int_{z'_0}^{z'} b(z,\ z';\ z_1,\ z_1')\,u(z_1,\ z_1')\,dz_1'=\Gamma_n(z,\ z')+F_1(z,\ z') \tag{1}$$

äquivalent ist, worin a, a' und b gewisse analytische Funktionen bedeuten, die sich mit Hilfe der Koeffizienten der Gleichung (A) ausdrücken lassen (vgl. Formeln (4.4), (4.5) und (4.6) des I Kap.), z_0 und z'_0 feste Punkte bedeuten, $\Gamma_n(z,\ z')$ eine willkürliche n-harmonische Funktion ist, d. h. eine Funktion, die der Gleichung

$$\Delta^n\Gamma_n=0 \tag{2}$$

genügt, und mithin die Gestalt

$$\Gamma_n(z,\ z')=\sum_{k=0}^{n-1}\left[z^k\,\psi_k(z')+z'^k\,\varphi_k(z)\right] \tag{3}$$

hat, unter den $\varphi_k(z)$ und $\psi_k(z')$ beliebige analytische Funktionen verstanden. Schliesslich ist

$$F_1(z,\ z')=\int_{z_0}^{z} dz_1\int_{z'_0}^{z'}\frac{(z-z_1)^{n-1}\,(z'-z'_1)^{n-1}}{(n-1)!^2}\,F(z_1,\ z'_1)\,dz'_1.$$

Setzt man zunächst $F=0$ und löst die Gleichung (1), so findet man

$$u(\zeta, \zeta')=\Gamma_n(\zeta, \zeta')-\int_{\zeta_0}^{\zeta} A(\zeta, \zeta'; \zeta_1)\Gamma_n(\zeta_1, \zeta')\,d\zeta_1$$

$$-\int_{\zeta'_0}^{\zeta'} A'(\zeta, \zeta'; \zeta'_1)\Gamma_n(\zeta, \zeta'_1)d\zeta'_1+\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} B(\zeta, \zeta; \zeta_1, \zeta'_1)\Gamma_n(\zeta_1, \zeta'_1)\,d\zeta'_1, \qquad (4)$$

wobei A, A' und B mit Hilfe, von a, a' und b ausgedrückt werden (vgl. die Formeln (4.11), (4.12), (4.22'), Kap. I).

Diese Formel liefert *die Darstellung aller Lösungen der Gleichung* (A_0) *mit Hilfe der Lösungen der n-harmonischen Gleichung* (2). Setzt man für $\Gamma_n(\zeta, \zeta')$ den Ausdruck (3) in (4) ein, so werden *alle Lösungen der Gleichung* (A_0) *durch* $2n$ *willkürliche analytische Funktionen* $\varphi_k(\zeta)$, $\psi_k(\zeta')$ $(k=0, \dots, n-1)$, *ausgedrückt*.

Nimmt man $\zeta'=\bar\zeta$ und $\psi_k(\zeta')=\bar\varphi_k(\bar\zeta)$, wobei der Querstrich den Übergang zu den konjugiert komplexen Werten bedeutet, so folgt, dass Formel (4) alle reellen Lösungen der Gleichung (A_0) liefert, wenn die Koeffizienten dieser Gleichung reellwertige analytische Funktionen sind.

Um alle Lösungen der inhomogenen Gleichung (A) zu erhalten, wird rechts in (4) statt $\Gamma_n(\zeta, \zeta')$ die Funktion $\Gamma_n(\zeta, \zeta')+F_1(\zeta, \zeta')$ eingesetzt.

Insbesondere kommt man zu einem ziemlich übersichtlichen Ergebnis, im Falle der Gleichung

$$\Delta^n u+a_1\Delta^{n-1}u+\cdots+a_n u=0 \qquad (5)$$

mit konstanten Koeffizienten a_k, $a_n\neq 0$.

Betrachten wir zwei Fälle: 1°. Die Gleichung

$$\chi^{2n}-a_1\chi^{2n-2}+\cdots+(-)^n a_n=0 \qquad (6)$$

hat nur einfache Wurzeln und 2°. Diese Gleichung hat auch mehrfache Wurzeln.

Im Falle 1° hat jede Lösung der Glechung (5) die Gestalt

$$u(\zeta, \zeta')=\Gamma_n(\zeta, \zeta')+\sum_{j=1}^{n} d_j \int_{\zeta_0}^{\zeta} d\zeta_1 \int_{\zeta'_0}^{\zeta'} J_0\left(\lambda_j \sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta'_1)}\right)\Gamma_n(\zeta_1, \zeta'_1)\,d\zeta'_1,$$

wo die d_j bestimmte Konstanten bedeuten (vgl. (6.11), Kap. I) und die λ_j Wurzeln der Gleichung (6) sind, deren absolute Beträge nicht übereinstimmen. Im Falle 2° besteht eine analoge Formel.

Setzt man nunmehr

$$\Gamma_n(z, \bar{z}) = (z - z_0)^{n-1} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1} \lg [(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)],$$

so ergibt (4) eine *elementare Lösung* der Gleichung (A) in der Gestalt

$$V_n(x, y; x_0, y_0) \lg \frac{1}{R} + W_n(x, y; x_0, y_0), \quad R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Mit Hilfe dieser elementaren Lösung wird der oben erwähnte Picardsche Satz über den analytischen Charakter der Lösungen von Gleichung (A) bewiesen.

Setzt man jetzt in (4) n-harmonische Funktionen der Gestalt

$$r^{2k+m} \cos m\vartheta, \quad r^{2k+m} \sin m\vartheta$$

ein, so bekommt man eine Folge von Partikularlösungen u_{km}, v_{km} ($k = 0, \ldots, n-1$; $m = 0, 1, \ldots$) der Gleichung (A).

Betrachtet man sodann lineare Aggregate der Form

$$w_N = \sum_{k=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{N} a_{km} u_{km} + b_{km} v_{km}$$

mit konstanten Koeffizienten a_{km} und b_{km}, so zeigt man, dass sich eine beliebige reguläre Lösung der Gleichung (A) gleichmässig durch die Funktionen w_N approximieren lässt.

Weiterhin wird die dergestalt konstruierte allgemeine Lösung der Gleichung (A) zur Lösung des folgenden Randwertproblems benutzt:

Es sei T ein endliches, einfach zusammenhängendes, durch eine Kurve S begrenztes Gebiet. Es wird eine Lösung der Gleichung (A) *gesucht, die auf S den Bedingungen*

$$[u]_S = f(s), \quad \left[\frac{du}{d\nu}\right]_S = f_1(s), \quad \ldots, \quad \left[\frac{d^{n-1}u}{d\nu^{n-1}}\right]_S = f_{n-1}(s)$$

genügt, wobei ν die Normale, s der Bogen und f_k vorgegebene Funktionen sind. Die Randkurve S und die Funktionen f_k werden hinreichend regulär vorausgesetzt.

Dies Randwertproblem kann mit Hilfe der von uns gegebenen allgemeinen Darstellung auf das folgende System von Funktionalgleichungen zurückgeführt werden:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m} c_{mkj}(t) \varphi_k^{(j)}(t) + \alpha_{mk}(t) \overline{\varphi}_k(\bar{t}) + \int_{z_0}^{z} \beta_{mk}(t, z) \varphi_k(z) dz + \right.$$
$$\left. + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \beta'_{mk}(\bar{t}, \bar{z}) \overline{\varphi}_k(\bar{z}) d\bar{z} \right\} = p_m(s) + i q_m(s) \qquad (7)$$
$$(m = 0, \ldots, n-1),$$

wo die $\varphi_k(t)$ Randwerte von in T holomorphen Funktionen sind, $c_{mkj}(t)$, $\alpha_{mk}(t)$, $\beta_{mk}(t, \tau)$ und $\beta'_{mk}(\bar{t}, \bar{\tau})$ auf dem Rande vorgegebene reguläre Funktionen bedeuten, die ausschliesslich von den Koeffizienten der Gleichung (A) abhängen, und p_m sowie q_m ebenfalls reellwertige vorgegebene Funktionen sind, die mit den Funktionen f_k zusammenhängen.

Mit Hilfe einer Methode des Akademikers N. Muschelisvili, die von ihm zur Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der ebenen Elastizitätstheorie benutzt worden ist, werden diese Funktionalgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art zurückgeführt und die Lösungen dieser Gleichungen unter der Annahme untersucht, dass Lösungen des erwähnten Randwertproblems existieren. Hierbei erweist sich die Zurückführung der Funktionalgleichungen (7) auf Fredholmsche Integralgleichungen auf mehrfache Art möglich.

Im Falle einer Gleichung zweiter Ordnung kann die Integralgleichung untersucht werden, ohne dass die Existenz der Lösungen des Randwertproblems angenommen wird.

Zuletzt wird für das Randwertproblem der Existenzsatz bewiesen. Zu diesem Zweck wird die Greensche Funktion der n-harmonischen Gleichung

$$\Delta^n u = 0$$

für das Kreisgebiet benutzt, die in expliziter Form konstruiert wird. Sie hat die Gestalt

$$G_n(x, y; \xi, \eta) = 2R^{2n-2} \lg \frac{\rho R_1}{R} + \sum_{l=1}^{n-1} (-)^{l-1} \frac{1}{l} R^{2(n-l-1)} (1-r^2)^l (1-\rho^2)^l,$$

wobei r und ρ die Entfernungen der Punkte (x, y) und (ξ, η) bis zum Mittelpunkt des Einheitskreises sind, R—die Entfernung zwischen (x, y) und (ξ, η), R_1—die Entfernung vom Punkt (x, y) bis zu dem mit (ξ, η) konjugierten Punkt.