თბილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები, ტ. I, 1937
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. I, 1937
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. I, 1927

ი. ვეკუა

ფენის რყევის სასაზღვრო ამოცანა

§ 1. ამოცანის დასმა. განვიხილოთ უსასრულო ფენა შემოსაზღვრული ორი პარალელური სიბრტყით. ერთ ერთი სიბრტყე ავიღოთ OXZ საკოორდინატო სიბრტყედ და ღერძი OY მივმართოთ ამ სიბრტყის მართობულად იმ მხარეს, სადაც მოთავსებულია ფენა. ფენის სისქე ავღნიშნოთ h-ით და ვთქვათ საზღვრებზე $y=0$ და $y=h$ შესაბამისად მოდებულია ძალები $\overrightarrow{R_0}$ და $\overrightarrow{R_1}$ პარალელური OXY სიბრტყის. გარდა ამისა დავუშვათ, რომ $\overrightarrow{R_0}$ და $\overrightarrow{R_1}$ ძალები დამოუკიდებელნი არიან z კოორდინატზე. ამ ძალთა მდგენელები X და Y ღერძებზე აღვნიშნოთ შესაბამისად X_0, Y_0 და X_1, Y_1-ით. ძალების მდგენელები Y ღერძზე ტოლი იქნება ნულის, ხოლო მდგენელები X_0, Y_0 და X_1, Y_1 იქნებიან მხოლოდ x და t-ს ფუნქციები. ფენის საზღვრებზე, ძალების ასეთი განაწილების შემთხვევაში, თუ ფენა თავისუფალია მასიურ ძალებისაგან, ძრაობის სურათი XY სიბრტყის პარალელურ ყველა სიბრტყეზე იქნება ერთიდაიგივე: ამიტომ საკმარისია შევისწავლოთ ერთი რომელიმე ასეთი სიბრტყის ძრაობა. ასეთად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ XY სიბრტყე.

ვთქვათ u და v გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია. როგორც ცნობილია

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{1, 1}$$

ფუნქციები φ და ψ აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{1}{a^2}\Delta\varphi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{1}{b^2}\Delta\varphi \tag{1, 2}$$

$$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

და მათ ეწოდებათ შესაბამისად სიგრძივი და განივი პოტენციალები. $\frac{1}{a}$ და $\frac{1}{b}$ შესაბამისად წარმოადგენენ სიგრძივი და განივი ტალღების სიჩქარეებს და Lamé-ს მუდმივების λ, μ და ფენის სიმკვრივის ρ-ს საშუალებით გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \qquad \frac{1}{b}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (b>a). \tag{1, 3}$$

რადგანაც გადაადგილების ვექტორი პარალელურია XY სიბრტყის და დამოუკიდებელია z კოორდინატზე, ამიტომ ძაბვის ტენზორის X_z და Y_z კომპონენტები იგივურად ტოლია ნულის, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები: X_x, X_y, Y_y და Z_z (1, 1) ფორმულის ძალით პოტენციალების საშუალებით გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned}
X_x&=\mu\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right],\\
Y_y&=\mu\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right],\\
X_y&=\mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right],\\
Z_z&=\mu\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{1, 4}$$

უკანასკნელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ Z_z განსხვავება ნულისაგან, რაც ნიშნავს იმას, რომ დეფორმაცია იყოს ბრტყელი ამისათვის საჭიროა XY სიბრტყის ყოველი წერტილზე მოდებული იქნას ამ სიბრტყის მართობული ძალა Z_z, გამოთვლილი (1, 4) ფორმულით.

ამოცანის სასაზღვრო პირობები იქნება შემდეგი:

$$\left.\begin{aligned}
D_1(\varphi,\psi)\Big|_{y=0}&=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{y=0}=\frac{1}{\mu}X_0(x,t),\\
D_2(\varphi,\psi)\Big|_{y=0}&=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{xy^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{1}{\mu}Y_0(x,t),
\end{aligned}\right\} \tag{1, 5}$$

$$\left.\begin{aligned}
D_1(\varphi,\psi)\Big|_{y=h}&=2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Big|_{y=h}=\frac{1}{\mu}X_1(x,t),\\
D_2(\varphi,\psi)\Big|_{y=h}&=\left(\frac{b^2}{a^2}-2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\Big|_{y=h}=\frac{1}{\mu}Y_1(x,t).
\end{aligned}\right\} \tag{1, 6}$$

ვთქვათ $t=0$ მომენტამდე ფენა იმყოფება უძრავ მდგომარეობაში და ამ მომენტიდან $\vec{R}_0$ და $\vec{R}_1$ ძალთა ზეგავლენით იწყებს ძრაობას. მაშინ ამოცანის საწყისი პირობები იქნება შემდეგი:

$$u(x, y, t)=v(x, y, t)=\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}=\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}=0, \quad \text{როცა } t=0 \qquad (1, 7)$$

ამგვარად უნდა ამოვხსნათ შემდეგი მათემატიკური ამოცანა: უნდა მოვნახოთ ისეთი სიგრძივი და განივი პოტენციალები φ და ψ, რომელნიც აკმაყოფილებენ (1, 5), (1, 6) სასაზღვრო და (1, 7) საწყის პირობებს.

შენიშვნა: ყოველ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს ტალღის განტოლებას

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\Delta\chi$$

ჩვენ ვუწოდებთ პოტენციალს. განტოლებაში შემავალ სიდიდეს, $\frac{1}{c}$-ს ეწოდება პოტენციალის ან შესაბამისი ტალღის სიჩქარე. თუ $c=a$, მაშინ პოტენციალს და მის შესაბამის ტალღას ეწოდება სიგრძივი პოტენციალი ან სიგრძივი ტალღა, ხოლო თუ $c=b$ მაშინ პოტენციალს ან მის შესაბამის ტალღას ეწოდება განივი. ყველგან ქვემოთ, სადაც აშკარად არ იქნება საწინააღმდეგო თქმული, სიგრძივი და განივ პოტენციალებს ჩვენ აღვნიშნავთ შესაბამისად φ და ψ ასოებით.

პოტენციალები φ და ψ, რომელნიც აკმაყოფილებენ (1, 5), (1, 6) სასაზღვრო და (1, 7) საწყის პირობებს, ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ჯამი ორი პოტენციალის

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2, \qquad \psi=\psi_1+\psi_2,$$

სადაც პოტენციალები φ_1 და ψ_1 აკმაყოფილებენ (1, 5), (1, 6) სასაზღვრო და (1, 7) საწყის პირობებს იმ დაშვებით, რომ $X_1=Y_1=0$, ხოლო φ_2 და ψ_2 იგივე სასაზღვრო და საწყის პირობებს, როცა $X_0=Y_0=0$.

ამიტომ ფენის რყევის ამოცანას ჩვენ ჯერ ამოვხსნით იმ შემთხვევაში, როცა ფენის ერთი საზღვარი თავისუფალია გარე ძალებისაგან. ზოგად შემთხვევაში კი, როდესაც ფენის ორივე საზღვარი დატვირთულია გარე ძალებით, ამოცანის ამონახსნი ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ჯამი ზემოთაღნიშნული კერძო შემთხვევების ამოხსნების.

§ 2. ტალღის განტოლების ფუნქციონალურ-ინვარიანტული ამოხსნები. განვიხილოთ ტალღის განტოლება:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right). \qquad (2, 1)$$

ვეძიოთ ამ განტოლების ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$\chi=R\,\Phi(\theta), \qquad (2, 2)$$

სადაც R ნამდვილი ნაწილის ნიშანია, ხოლო $\Phi(\theta)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციაა $\theta(x, y, t)$ კომპლექსური არგუმენტის.

С. Л. Соболев-მა[1] დაამტკიცა შემდეგი თეორემა: იმისათვის, რომ ფუნქცია $\varphi = R\Phi(\theta)$, სადაც Φ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციაა, აკმაყოფილებდეს (2, 1) ტალღის განტოლებას, აუცილებელი და საკმარისია, რომ θ იყოს ამონახსნი განტოლების:

$$\omega(\theta) \equiv l(\theta)\,t + m(\theta)\,x + n(\theta)\,y + p(\theta) = 0. \tag{2, 3}$$

სადაც $l(\theta)$, $m(\theta)$, $n(\theta)$ და $p(\theta)$ ანალიზური ფუნქციებია θ კომპლექსურ ცვლადის რაიმე არეში და, გარდა ამისა, l, m და n დაკავშირებულნი არიან ერთმანეთთან ტოლობით:

$$c^2 l^2(\theta) = m^2(\theta) + n^2(\theta). \tag{2, 4}$$

ტალღის განტოლების ასეთ ამოხსნებს Соболев-ის ტერმინოლოგიით ვუწოდოთ ფუნქციონალურ-ინვარიანტული პოტენციალები; $\Phi(\theta)$ ფუნქციას კი— კომპლექსური პოტენციალი.

ამ დებულების საკმარისობა მტკიცდება უბრალო შემოწმებით. ამისათვის საჭიროა გამოვთვალოთ $\theta(x, y, t)$ და $\Phi(\theta)$-ს ნაწილობითი წარმოებულები x, y, t-ს მიმართ.

(2, 3) განტოლების ძალით დავწეროთ:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{m(\theta)}{\omega'(\theta)}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{n(\theta)}{\omega'(\theta)}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{l(\theta)}{\omega'(\theta)}, \tag{2, 5}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{m^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{n^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right],$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{l^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \tag{2, 6}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{m(\theta)\,n(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{l(\theta)\,m(\theta)}{\omega'(\theta)}\right],$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial t} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{n(\theta)\,l(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \tag{2, 7}$$

$$\frac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{m^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \qquad \frac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial y^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{n^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right],$$
$$\frac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial t^2} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{l^2(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \tag{2, 8}$$

$$\frac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{m(\theta)\,n(\theta)}{\omega'(\theta)}\right], \qquad \frac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial y\,\partial t} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{n(\theta)\,l(\theta)}{\omega'(\theta)}\right]$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t} = \frac{1}{\omega'(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Phi'(\theta)\frac{m(\theta)\,l(\theta)}{\omega'(\theta)}\right]. \tag{2, 9}$$

[1] იხ. Труды Физико-Математического Института Академии Наук СССР, т. V, 1934 стр. 259.

ამ ფორმულებში $\omega'(\theta)$-თი აღნიშნული გვაქვს (2, 3) განტოლების მარცხენა მხარის ნაწილობითი წარმოებული θ-ს მიმართ.

თუ მივიღებთ მხედველობაში (2, 4) ტოლობას, (2, 8) ფორმულების ჩასმა (2,1) განტოლებაში მოგვცემს, რომ ნებისმიერი $\Phi(\theta)$ ანალიზური ფუნქციის როგორც ნამდვილი ისე ვითარსი ნაწილი აკმაყოფილებს (2, 1) განტოლებას, თუ არგუმენტი θ არის (2, 3) განტოლების ამონახსნი. ამით თეორემის საკმარისობა, დამტკიცებულია. თეორემის აუცილებლობის დამტკიცების შესახებ მკითხველს შეუძლია მიმართოს Соболев-ის ზემოთაღნიშნულ შრომას.

თუ $l(\theta)\neq 0$, ჩვენ შეგვიძლია ზოგადობის დაურღვევლად (2, 3) განტოლებას მივცეთ უფრო მარტივი სახე. მართლაც, ვთქვათ $l(\theta)=1$ და $m(\theta)=-\theta$, მაშინ (2, 4) ტოლობის ძალით განტოლება (2, 3) მიიღებს სახეს:

$$\omega(\theta)\equiv t-\theta x+\sqrt{c^2-\theta^2}\,y+p(\theta)=0. \tag{2, 3'}$$

ჩვენ შემდეგში ყოველთვის გვექნება საქმე ასეთი სახის განტოლებებთან.

(2, 3') განტოლებაში შემავალი რადიკალი მრავალსახა ფუნქციაა, ამიტომ საჭიროა შევთანხმდეთ, თუ რომელი მის შტოზე შევჩერდეთ. ქვემოდ ყოველთვის გვექნება ჩვენ მხედველობაში ამ რადიკალის ის შტო, რომელიც დადებითია, როცა θ არის დადებითი ვითარსი რიცხვი, ან რაც იგივეა, $\sqrt{a^2-\theta^2}$ უარყოფითი ვითარსი სიდიდეა, როდესაც $\theta>a$ და დადებითი ვითარსი როცა $\theta<-a$.

ნამდვილი ღერძის $(-c, c)$ შუალედში ჩვენ უნდა გავარჩიოთ ორი ნაპირი. ვუწოდოთ „დადებითი“ იმ ნაპირს, რომელიც ეკვრის $J\theta>0$ ნახევარ სიბრტყეს ხოლო „უარყოფითი“ იმ ნაპირს, რომელიც ესაზღვრება $J\theta<0$ ნახევარ სიბრტყეს (აქ და ყველგან ქვევით J-ით აღნიშნული გვექნება კომპლექსური გამოსახვის ვითარსი ნაწილი). ცხადია, $\sqrt{c^2-\theta^2}$-ის შტო, რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ, იქნება დადებით $(-c, c)$ შუალედის „დადებით“ ნაპირზე და უარყოფითი ამ შუალედის „უარყოფით ნაპირზე.

ფუნქციონალური-ინვარიანტული ამოხსნების ერთ ძირითადი თვისებათაგანი ის არის, რომ ისინი ინარჩუნებენ მუდმივი მნიშვნელობას $x, y, t\,(t>0)$ ნახევარ სივრცის გარკვეულ სხივებზე. მართლაც, როგორც (2, 3) ან (2, 3') განტოლება გვიჩვენებს, θ-ს ყოველი მნიშვნელობას შეესაბამება საზოგადოდ გარკვეული სხივი $x, y, t(t>0)$ ნახევარ სივრცეში და მაშასადამე ასეთი სხივების გასწვრივ (2, 2) ფორმულის ძალით ფუნქციონალურ-ინვარიანტული ამოხსნები ინარჩუნებენ მუდმივი მნიშვნელობას.

ტალღის განტოლების ფუნქციონალურ-ინვარიანტული ამოხსნები პირველად განხილული იქნა პროფესორების В. И. Смирнов და С. Л. Соболев-ის მიერ შრომაში: „Sur une méthode nouvelle dans le probléme plan des vibrations élastiques“[1]. ამ ამოხსნების საშუალებით მათ მიერ დაწვრილებით იქნა შესწავლილი Lamb-ის ამოცანა ნახევარი სიბრტყის რყევის შესახებ, როდესაც ნახევარი სიბრტყის საზღვრის გასწვრივ მოდებულია ვერტიკალური ძალები დამოკიდე-

[1] იხ. Труды Сейсм. Ин-та АН СССР № 20, 1932 г.

ბული დროისაგან. იმავე შრომაში ავტორების მიერ შესწავლილია, ტალღის განტოლების ფუნქციონალურ-ინვარიანტული ამოხსნების გამოყენებით, ნახევარ სიბრტყის რყევა, გამოწვეული მისი შიგნით მოთავსებულ სპეციალური ტიპის შეყურსული წყაროებით და ბოლოს იქვე არის დასმული საკითხი ფენის რყევის შესახებ მის რომელიმე წერტილზე შეყურსული ძალის გავლენით. წინამდებარე შრომაში მე ვიკვლევ ამოცანას ფენის რყევის შესახებ ტალღის განტოლების ფუნქციონალურ-ინვარიანტულ ამოხსნების საშუალებით, როდესაც მის ზედაპირზე მოდებულია ნებისმიერი ძალები, ხოლო როცა ის თავისუფალია მასიურ ძალებისაგან. ფენის რყევის ზოგადი შემთხვევა ყოველთვის შეიძლება დაყვანილ იქნას ამ სახის ამოცანაზე. მაგრამ ფენის რყევის ამოცანის ამოსახსნელად, როდესაც ფენის ზედაპირზე ნებისმიერი ძალებია განაწილებული—საჭიროა ვიცოდეთ ამ ამოცანის ერთი სინგულარული ამოხსნა, რომელიც შეესაბამება ფენის ერთ-ერთ ზედაპირზე შეყურსულ მყისა ძალას. ამ ამოხსნას ჩვენ შემდეგში ვუწოდებთ ელემენტალურ ამოხსნას, რადგანაც მისი საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ამოცანის ზოგადი ამოხსნა. შემდეგ პარაგრაფში მე განვიხილავ საკითხს ფენი რყევის შესახებ მის ზედაპირზე შეყურსული მყისა ძალის გავლენით.

§ 3. ელემენტარული ამოხსნები. ვთქვათ $\vec{R}_1=0$, ხოლო $\vec{R}_0=0$, როცა $-\infty<x<-\varepsilon$, $+\varepsilon<x<+\infty$ და $\varepsilon<t<\infty$, ხოლო ის განსხვავდება ნულისაგან არეში: $-\varepsilon\leq x\leq\varepsilon$, $0\leq t\leq\varepsilon$. განვიხილოთ ვექტორ ფუნქცია $\vec{P}\,(x,t)$, რომელიც განუწყვეტელია და ნულისაგან განსხვავებული არეში: $-1\leq x\leq 1$ და $0\leq t\leq 1$, ხოლო ამ არეს გარეთ კი იგივურად ტოლია ნულის. ვთქვათ ε მცირე დადებითი რიცხვია და, დაუშვათ, რომ

$$\vec{R}_0(x,\,t)=\frac{1}{\varepsilon^2}\vec{P}\left(\frac{x}{\varepsilon},\;\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{3, 1}$$

როცა ε უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, ეს ძალები შეიძლება შევცვალოთ მათი მთავარი ვექტორით, რომელიც მოდებულია კოორდინატთა სათავეში, რადგანაც, როგორც ქვემოდ დავინახავთ, მთავარი მომენტი ამ ძალებისა ნულის ტოლია, როცა $\varepsilon\to 0$. აღვნიშნოთ $\vec{Q}$-თი ამ ძალების მთავარი ვექტორი როცა $\varepsilon\to 0$. გვექნება:

$$\vec{Q}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}dt\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\vec{P}\left(\frac{x}{\varepsilon},\;\frac{t}{\varepsilon}\right)dx=\int_0^1 dt\int_{-1}^{1}\vec{P}\,(x,\,t)\,dx.$$

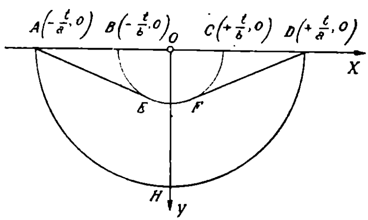
$\vec{Q}$-ს ეწოდება $(0,\,0)$ წერტილზე $t=0$ მომენტში შეყურსული მყისა ძალა. აღვნიშნოთ $\vec{L}$-ით, $\vec{R}_0\,(x,\,t)$ ძალების მთავარი მომენტი, როცა $\varepsilon\to 0$. გვექნება:

$$L_x=L_y=0,$$

$$L_z=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}dt\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}x\,P_y\left(\frac{x}{\varepsilon},\;\frac{t}{\varepsilon}\right)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^1 dt\int_{-1}^1 x\,P_y(x,t)\,dx=0.$$

ვთქვათ $t=0$ მომენტში $(0, 0)$ წერტილზე შეყურსულია მყისა ძალა $\vec{Q}$, ხოლო $y=0$ საზღვრის დანარჩენ წერტილზე დროის ყოველ მომენტში ძაბვა ნულის ტოლია. რადგანაც $t=0$ მომენტამდე ფენა უძრავ მდგომარეობაში იმყოფებოდა, ამიტომ $\vec{Q}$ მყისა ძალით გამოწვეული სიგრძივი და განივი ტალღები პოტენციალებით φ_{00} და ψ_{00} t მომენტისათვის $(t>0)$ მოიყვანენ ძრაობაში ფენის იმ ნაწილს, რომელიც კოორდინატთა სათავის მახლობლადაა მოთავსებული და სანამდე $t<ah$-ის (h ფენის სისქეა), ძრაობაში მოსული არე ვერ მიაღწევს ფენის $y=h$ საზღვარს. ამიტომ დროის $0\le t\le ah$ შუალედში ფენის ძრაობაზე არავითარ ზეგავლენას არ ახდენს $y=h$ საზღვრის არსებობა და ამიტომ ამ დროის განმავლობაში ფენის ძრაობა დახასიათდება იმავე პოტენციალებით, რომელნიც განსაზღვრავენ ნახევარ სიბრტყის ძრაობას კოორდინატთა სათავეში შეყურსული მყისა ძალის გავლენით.



ნახ. 1.

ფერმას (Fermat) პრინციპის გამოყენებით ადვილად დავამტკიცებთ, რომ φ_{00} და ψ_{00} ტალღების გავრცელების ფრონტი შესაბამისად იქნებიან ნახევარ წრე AHD და მრუდი $AEFD$ (იხ. ნახ. 1).

ამ ფრონტთა განტოლებანი შესაბამისად იქნებიან შემდეგი:

$$x^2+y^2=\frac{t^2}{a^2}\quad (y>0) \tag{3, 2}$$

და

$$\left.\begin{aligned} -ax+\sqrt{b^2-a^2}\,y&=t, && \text{როცა}\quad x>0,\ a^2(a^2+y^2)<b^2x^2\\ ax+\sqrt{b^2-a^2}\,y&=t, && \text{როცა}\quad x<0,\ a^2(a^2+y^2)<b^2x^2\\ x^2+y^2&=\frac{t^2}{b^2}, && \text{როცა}\quad a^2(x^2+y^2)\ge b^2x^2 \end{aligned}\right\} \tag{3, 3}$$

სამგანზომილებიან x, y, t სივრცეში (3, 2) განტოლებას შეესაბამება კონუსი, რომლის წვერო მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ხოლო ღერძი ემთხვევა t ღერძს. (3, 3) განტოლებას შეესაბამება წრფოვანი ფართეული. აღვნიშნოთ T_{00} და T'_{00}-ით შესაბამისად (3, 2) და (3, 3) წრფოვანი ფართეულების ის შტო, რომელთა გასწვრივ $t\geqq 0$ და $y\geqq 0$. T_{00} და T'_{00} ფართეულების გადა-

კვეთა სიბრტყეებით $t=\text{const}$ მოგვცემს შესაბამისად φ_{00} და ψ_{00} ტალღათა გავრცელების ფრონტებს, რომელნიც შეესაბამება დროის t მომენტს XY სიბრტყეზე.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნები, რომელნიც დაგვჭირდება შემდეგში. აღვნიშნოთ S-ით ნახევარი სივრცე $x, y, t\,(t>0)$. S_0 იყოს S-ის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია $y=0$ და $y=h$ სიბრტყეებს შორის. ნახევარი სიბრტყეები $y=0$, $t \geqq 0$ და $y=h$, $t \geqq 0$ აღვნიშნოთ შესაბამისად Π_0 და Π_1-ით.

პოტენციალები φ_{00} და ψ_{00} ისე უნდა იქნან მონახული, რომ Π_0 სიბრტყეზე აკმაყოფილებდენ სასაზღვრო პირობებს:

$$D_1(\varphi_{00}, \psi_{00})\Big|_{y=0}=0, \qquad D_2(\varphi_{00}, \psi_{00})\Big|_{y=0}=0 \tag{3, 4}$$

და გარდა ამისა

$$\varphi_{00}(x, y\, t)\equiv 0, \quad \text{როცა} \quad t \leqq T_{00}(x, y) \tag{3, 5}$$

$$\psi_{00}(x, y, t)\equiv 0, \quad \text{როცა} \quad t \leqq T'_{00}(x, y) \tag{3, 6}$$

სადაც

$$t=T_{00}(x, y,) \quad \text{და} \quad t=T'_{00}(x, y) \tag{3, 7}$$

არიან შესაბამისად T_{00} და T'_{00} ფართეულების განტოლებანი. პირობები (3, 5) და (3, 6) გამომდინარეობენ იქიდან, რომ დროის t მომენტში ნახევარ სიბრტყის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია AHD ნახევარ წრის გარეთ, იმყოფება უძრავ მდგომარეობაში და მაშასადამე იქ $\varphi_{00}\equiv\psi_{00}\equiv 0$. ხოლო იმ არეში, რომელიც მოთავსებულია $AEFD$ და AHD მრუდეებს შორის, ძრაობა გამოწვეულია მხოლოდ სიგრძივი ტალღის გავრცელებით და ამიტომ იქ $\psi_{00}\equiv 0$.

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციონალურ-ინვარიანტული სიგრძივი და განივი პოტენციალები:

$$\varphi_{00}=R\,\Phi_{00}(\theta_{00}), \quad \psi_{00}=R\,\Psi_{00}(\varkappa_{00}) \tag{3, 8}$$

სადაც θ_{00} და $\varkappa_{00}$ არიან ამოხსნები განტოლებების:

$$\omega_{00}\equiv t-\theta_{00}\,x-\sqrt{a^2-\theta^2_{00}}\;y=0, \tag{3, 9}$$

$$\tilde{\omega}_{00}\equiv t-\varkappa_{00}x-\sqrt{b^2-\varkappa^2_{00}}\;y=0 \tag{3, 10}$$

ხოლო Φ_{00} და Ψ_{00} ნებისმიერი კომპლექსური ანალიზიური ფუნქციებია. (3, 9) და (3, 10) განტოლების საშუალებით ნახევარი სივრცე გადაისახება θ_{00} და $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეებზე. შევისწავლოთ ეს განტოლებანი უფრო დაწვრილებით. ამისათვის პირველად შევჩერდეთ (3, 9) განტოლებაზე. ამ განტოლების ძალით θ_{00} კომპლექსური ცვლადის ყოველ წერტილს, რომელიც ნამდვილ ღერძის $(-a, a)$ შუალედში არ არის მოთავსებული, შეესაბამება გარკვეული სხივი S ნახევარ სივრცეში, რომელნიც გადიან კოორდინატთა სათავეში და მოთავსებულნი არიან $t^2=a^2(x^2+y^2)$ კონუსის შიგნით. ამ სხივებიდან ჩვენთვის მხოლოდ ის სხივებია საინტერესო, რომელნიც გადიან T_{00} ფართეულის ზევით S_0 არეში. ასეთ სხივებს, როგორც ეს ადვილად დამტკიცდება, შეესაბამება θ_{00} კომპლექსურ ცვლადის $J\theta_{00}\geqq 0$ ნახევარ სიბრტყე, ნამდვილ ღერძის $(-a, a)$ შუალედის გამოკლებით. ამასთან აქვე აღვნიშნოთ, რომ სხივებს, რომელნიც Π_0 სიბრტყეზეა მოთავსებული და რომელთა გასწვრივ $x>0$, შეესაბამება ნამდვილ ღერძზე შუალედი $(a, +\infty)$, ხოლო სხივებს მოთავსებულთ Π_0 სი-

ბრტყეზე და რომელთა გასწვრივ $x<0$ ეთანადება ნამდვილ ღერძზე შუალედი $(-a, -\infty)$. თუ θ_{00} იცვლება $(-a, a)$ შუალედის „დადებით“ ნაპირზე, მაშინ (3, 9) წარმოადგენს T_{00} ფართეულის შემხებ ნახევარ სიბრტყეთა ოჯახს. ეს სიბრტყეები შეეხებიან T_{00} ფართეულს მქნელის გასწვრივ და ამგვარად ჩვენ გვაქვს, რომ T_{00} ფართეულის და S ნახევარ სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც ამ ფართეულის გარეთ მდებარეობს, შეესაბამება $(-a, a)$ შუალედის „დადებითი“ ნაპირი. Π_0 ნახევარ სიბრტყეს შეესაბამება θ_{00} კომპლექსური ცვლადის სიბრტყის ნამდვილი ღერძი.

განვიხილოთ ახლა განტოლება (3, 10). აქაც ისევ, როგორც ზემოთ, ადვილად დავინახავთ, რომ $\varkappa_{00}$ კომპლექსური ცვლადის $J\varkappa_{00} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყის წერტილებს, რომელნიც ნამდვილი ღერძის $(-b, b)$ შუალედში არ არიან მოთავსებულნი, შეესაბამება ნახევარ სივრცეში სხივები, რომელნიც კოორდინატთა სათავეში გადიან, მდებარეობენ $t^2=b^2(x^2+y^3)$ კონუსის შიგნით და გადიან S_0 არეში. სხივებს, რომელნიც მოთავსებულია აღნიშნული კონუსის შიგნით და მდებარეობენ Π_0 სიბრტყეზე და რომელთა გასწვრივ $x>0$, შეესაბამებათ $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე ნამდვილი ღერძის (b, ∞) შუალედი, ხოლო ასეთივე სხივებს, რომელთა გასწვრივ $x<0$, შეესაბამებათ $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე ნამდვილი ღერძის $(-b, -\infty)$ შუალედი. ვთქვათ ახლა, რომ $\varkappa_{00}$ იცვლება $(-b, b)$ შუალედში. მაშინ განტოლება (3,10) გამოსახავს $t^2=b^2(x^2+y^2)$ $(y>0)$ კონუსის მხებ ნახევარ სიბრტყეთა ოჯახს. ამ ოჯახიდან, იმ ნახევარ სიბრტყეებს, რომელნიც ჰკვეთენ $y=0$ საზღვარს $\left(\frac{t}{b}, \frac{t}{a}\right)$ და $\left(-\frac{t}{a}, -\frac{t}{b}\right)$ მონაკვეთების შიგნით შეესაბამათ $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე ნამდვილი ღერძის (a, b) და $(-b, -a)$ შუალედები, ხოლო დანარჩენ ნახევარ სიბრტყეებს, რომელნიც ავსებენ არეს, მოთავსებულს T'_{00} ფართელის გარეთ, შეესაბამება $(-a, +a)$ შუალედი $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყის ნამდვილ ღერძზე. ამგვარად, განტოლება (3, 10) გადასახავს S ნახევარ სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც T'_{00} ფართეულის ზევითაა მოთავსებული და რომლისთვისაც $y \geqq 0$, ნამდვილი ღერძის $(-a, a)$ შუალედის გამოკლებით $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის $J\varkappa_{00} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყეზე; ხოლო S ნახევარ სივრცის იმ ნაწილს, რომელიც T'_{00} ფართეულის გარეთაა მოთავსებული და სადაც $y \geqq 0$, შეესაბამება $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე ნამდვილ ღერძის $(-a, a)$ შუალედის „დადებითი“ ნაპირი.

თუ (3, 7) განტოლებებს მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ ის შესაბამისობა, რომელსაც ამყარებს (3, 9) და (3, 10) განტოლებანი θ_{00} და $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადების $J\theta_{00} \geqq 0$ და $J\varkappa_{00} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყეების წერტილებსა და S ნახევარ სივრცეს შორის, ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ ასე: x, y, t წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$t > T_{00}(x, y) \geqq 0$$

შეესაბამება θ_{00} კომპლექსურ ცვლადის $J\theta_{00} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყის წერტილები,

ნამდვილი ღერძის $(-a, a)$ შუალედის გამოკლებით, ხოლო იმ წერტილებს, რომელნიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$0 \leqq t \leqq T_{00}(x, y)$$

შეესაბამებათ $(-a, a)$ შუალედის „დადებითი" ნაპირი. ამგვარადვე გვაქვს, რომ თუ $t > T'_{00}(x, y) \geqq 0$, მაშინ ასეთ წერტილთა სიმრავლეს შეესაბამება $\varkappa_{00}$ კომპლექსურ ცვლადის $J\varkappa_{00} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყე, $(-a, a)$ კუპიურის გამოკლებით ნამდვილ ღერძზე. ამ უკანასკნელს კი შეესაბამება x, y, t წერტილთა ის სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$0 \leqq t \leqq T'_{00}(x, y).$$

ეხლა გადავიდეთ Φ_{00} და Ψ'_{00} კომპლექსურ პოტენციალების მონახვაზე, რომელნიც უნდა აკმაყოფილებდენ (3, 4), (3, 5) და (3, 6) პირობებს. უპირველესად შევნიშნოთ, რომ (3, 5) და (3, 6) პირობები დაკმაყოფილებული იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Φ_{00} და Ψ_{00} ფუნქციები ისე იქნება შერჩეული, რომ მათი ნამდვილი ნაწილები იგიურად ნულის ტოლი გახდებიან, როცა არგუმენტები იცვლებიან $(-a, a)$ შუალედში ნამდვილ ღერძზე. გარდა ამისა, თუ შევიტანთ (3, 5) სასაზღვრო პირობებში φ_{00} და ψ_{00} ნაცვლად მათ გამოსახვებს (3, 8) ფორმულებიდან და თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\theta_{00} = \varkappa_{00} = \theta = \frac{t}{x}, \tag{3, 11}$$

როცა $y = 0$, მაშინ გვექნება, რომ

$$R\frac{d}{d\theta}\left[2\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'_{00}(\theta) + \theta\,(b^2 - 2\theta^2)\,\Psi'_{00}(\theta)\right]_{J\theta=0} = 0,$$

$$R\frac{d}{d\theta}\left[\theta\,(b^2-2\theta^2)\,\Phi'_{00}(\theta) - 2\theta^2\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi'_{00}(\theta)\right]_{J\theta=0} = 0.$$

აქედან მივიღებთ:

$$2\,\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\Phi'_{00}(\theta) + \theta\,(b^2-\theta^2)\,\Psi'_{00}(\theta) = i\,\alpha\,\theta + c_1,$$

$$\theta\,(b^2-2\theta^2)\,\Phi'_{00}(\theta) - 2\theta^2\sqrt{b^2-\theta^2}\,\Psi'_{00}(\theta) = i\,\beta\,\theta + c_2,$$

სადაც α, β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო c_1 და c_2 ნებისმიერი კომპლექსური სიდიდეები და ამ უკანასკნელ ტოლობებს ადგილი უნდა ჰქონდეს θ-ს ყოველ ნამდვილ მნიშვნელობებისათვის და კერძოდ მაშინაც, როცა $\theta = 0$, საიდანაც გვექნება, რომ $c_1 = c_2 = 0$. მიღებული განტოლებები გვაძლევს, რომ

$$\Phi'_{00}(\theta) = i\,\frac{2\alpha\theta\sqrt{b^2-\theta^2} + \beta\,(b^2 - 2\theta^2)}{F(\theta)}, \tag{3, 12}$$

$$\Psi'_{00}(\theta) = i\,\frac{\alpha\,(b^2-2\theta^2) - 2\,\beta\,\theta\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}, \tag{3, 13}$$

სადაც

$$F(\theta)=(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}. \tag{3, 14}$$

(3, 12) და (3, 13) ფორმულებში შემავალი ნამდვილი მუდმივები α და β ცხადია დამოკიდებული არიან $\vec{Q}$ შეყურსული მყისა ძალაზე. აღვნიშნოთ ამ ძალის კომპონენტები Q_x და Q_y-ით. დაუშვათ პირველად, რომ $Q_x=0$, ხოლო $Q_y=1$ ე. ი. გვაქვს ვერტიკალური შეყურსული მყისა ძალა, რომლის სიდიდე ტოლია ერთის. ამ შემთხვევაში ბუნებრივია, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტი Y ღერძის გასწვრივ ტოლი უნდა იყოს ნულის. (1, 1) ფორმულებში თუ φ და ψ-ის შევცვლით φ_{00} ψ_{00}-ით, (3, 8) ფორმულების ძალით, დავწერთ:

$$u=R\left[\Phi'_{00}(\theta_{00})\frac{\partial\theta_{00}}{\partial x}+\Psi'_{00}(\varkappa_{00})\frac{\partial\varkappa_{00}}{\partial y}\right], \tag{3, 15}$$

$$v=R\left[\Phi'_{00}(\theta_{00})\frac{\partial\theta_{00}}{\partial y}-\Psi'_{00}(\varkappa_{00})\frac{\partial\varkappa_{00}}{\partial x}\right]. \tag{3, 16}$$

თუ ახლა (3, 15) ფორმულაში შევიტანთ (3, 12) და (3, 13) ფორმულებიდან Φ'_{00} Ψ'_{00} გამოსახვებს და მივიღებთ მხედველობაში იმას, რომ (3, 9) და (3, 10) განტოლებისა და (2, 5) ფორმულების ძალით θ_{00}, $\varkappa_{00}$ და $\dfrac{\partial\theta_{00}}{\partial x}$ არიან ვითარსი და $\dfrac{\partial\theta_{00}}{\partial y}$ ნამდვილი სიდიდეები, როცა $x=0$, ჩვენ დავინახავთ, რომ $u(0, y, t)\equiv 0$ ტოლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი α იყოს ტოლი ნულის. გარდა ამისა β შევცვალოთ (3, 12) და (3, 13) ფორმულებში—β-თი და ის შევარჩიოთ ისე, რომ ვერტიკალური მყისა ძალა ტოლი იყოს ერთის. აღვნიშნოთ ერთის ტოლი ვერტიკალური მყისა ძალის შესაბამისი კომპლექსური პოტენციალები $\breve{\Phi}_{00}$ და $\breve{\Psi}_{00}$, მაშინ მათი წარმოებულებისათვის (3, 12) და (3, 14) ფორმულების ძალით გვექნება:

$$\breve{\Phi}'_{00} = i\beta\frac{2\theta^2-b^2}{F(\theta)}, \tag{3, 17}$$

$$\breve{\Psi}'_{00} = i\beta\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}}{F(\theta)}. \tag{3, 18}$$

დაუშვათ ახლა რომ $Q_x=1$ და $Q_y=0$ ე. ი. (0, 0) წერტილზე $t=0$ მომენტში შეყურსულია ჰორიზონტალური მყისა ძალა ტოლი ერთის. ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია a priori მივიღოთ, რომ $y=0$ საზღვრის გასწვრივ $v=0$. ისეთივე მსჯელობით, როგორც ზევით, ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ ამ შემთხვევაში $\beta=0$, ხოლო α ისე შევარჩიოთ, რომ $Q_x=1$. აღვნიშნოთ ამ შემთხვევაში კომპლექსური პოტენციალები $\breve{\breve{\Phi}}_{00}$ და $\breve{\breve{\Psi}}_{00}$-ით. ფორმულები (3, 12) და (3, 13) გვაძლევს:

$$\breve{\breve{\Phi}}'_{00}=i\alpha\frac{2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}}{F(\theta)}, \tag{3, 19}$$

$$\breve{\breve{\Psi}}'_{00}=-i\,\alpha\frac{2\theta-b^2}{F(\theta)}. \tag{3, 20}$$

თუ (0, 0) წერტილზე $t=0$ მომენტში შეყურსულია ნებისმიერი $\vec{Q}$ (Q_x, Q_y) მყისა ძალა, მაშინ მისი შესაბამისი კომპლექსური პოტენციალების წაომოებულები გამოისახებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\Phi'_{00}=Q_y\breve{\Phi}'_{00}+Q_x\breve{\breve{\Phi}}'_{00}, \tag{3, 21}$$

$$\Psi'_{00}=Q_y\breve{\Psi}'_{00}+Q_x\breve{\breve{\Psi}}'_{00}. \tag{3, 22}$$

ფორმულები (3, 12) და (3, 13) გვიჩვენებენ, რომ Φ'_{00} და Ψ'_{00} არიან ანალიზური ფუნქციები θ კომპლექსურ ცვლადის სიბრტყეზე, ნამდვილ ღერძის გასწვრივ $(-b, b)$ კუპიურით, რომელთაც აქვთ ნამდვილი ღერძის $\theta=\pm c$ წერტილებზე პოლიუსები პირველი რიგის, სადაც c წარმოადგენს ფესვს განტოლების:

$$F(\theta)=(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\sqrt{b^2-\theta^2}=0. \tag{3, 23}$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ განტოლებას აქვს მხოლოდ ორი ნამდვილი, კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული, მარტივი ფესვი, რომელნიც თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით მეტია b-ზე. გარდა ამისა Φ'_{00} და Ψ'_{00} ფუნქციებს აქვთ უსასრულობაში მეორე რიგის პოლუსები. ფორმულები (3, 15) და (3, 16) გვიჩვენებენ, რომ u და v უსასრულო დიდი ხდებიან, როცა $\theta_{00}=\varkappa_{00}=\pm c$. მაგრამ, როგორც (3, 9) და (3, 10) განტოლებებიდან სჩანს, $\theta_{00}=\varkappa_{00}=\pm c$, მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა $y=0$ და $t=\pm cx$. ამგვარად ჩვენ ვხედავთ, რომ $y=0$ საზღვარზე კოორდინატთა სათავის ორივე მიმართულებით სიგრძივი და განივი ტალღების შემდეგ ვრცელდება ახალი სახის ტალღათა ფრონტი $\frac{1}{c}$ სიჩქარით, რომელზედაც უსასრულო დიდი ხდებიან გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები u და v. ეს ტალღები ვრცელდება მხოლოდ ზედაპირზე და ამიტომ მას უწოდებენ ზედაპირულ ან Rayleigh-ის ტალღებს.

გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები u და v უსასრულოდ დიდი ხდებიან აგრეთვე სიგრძივი და განივი პოტენციალების ფრონტებზე, რომელნიც ვრცელდებიან არა მარტო $y=0$ საზღვარზე. არამედ $y>0$ არეშიც. მართლაც, თუ (3, 15) და (3, 16) ფორმულებში შევიტანთ $\frac{\partial\theta_{00}}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta_{00}}{\partial y}$, $\frac{\partial\varkappa_{00}}{\partial x}$ და $\frac{\partial\varkappa_{00}}{\partial y}$ მნიშვნელობებს, (2, 5) ფორმულებისა და (3, 9), (3, 10) განტოლებების ძალით გვექნება:

$$u = R\left[\Phi'_{00}(\theta_{00})\frac{\theta_{00}}{\omega'_{00}} + \Psi'_{00}(\varkappa_{00})\frac{\sqrt{b^2-\varkappa^2_{00}}}{\delta'_{00}}\right], \tag{3, 24}$$

$$v = R\left[\Phi'_{00}(\theta_{00})\frac{\sqrt{a^2-\theta^2_{00}}}{\omega'_{00}} - \Psi'_{00}(\varkappa_{00})\frac{\varkappa_{00}}{\delta'_{00}}\right], \tag{3, 25}$$

მაგრამ, რადგანაც ω'_{00} და δ'_{00} არიან ნულის ტოლი კონუსებზე:

$$t^2 = a^2(x^2+y^2), \qquad t^2 = b^2(x^2+y^2),$$

ამიტომ u და v ხდებიან უსასრულო დიდი ამ კონუსების გასწვრივ. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ u და v ისე მიისწრაფიან ამ კონუსების მახლობლად უსასრულობისაკენ, როგორც სიდიდეები

$$\frac{1}{\sqrt{t-ar}} \text{ და } \frac{1}{\sqrt{t-br}}, \text{ როცა } t\to ar \text{ და } t\to br.$$

§ 4. არეკლილი ტალღები. პოტენციალები φ_{00} და ψ_{00}, რომელნიც წინა პარაგრაფში იყო განხილული, ფენის ძრაობას განსაზღვრავენ დროის $t=ah$ მომენტამდე, რადგანაც ამ მომენტში პოტენციალი φ_{00} მიაღწევს პირველად $y=h$ საზღვარს და პირველ საწყის ტალღებს დაემატება არეკლილი ტალღები. ამ მომენტიდან ფენის ძრაობა განისაზღვრება პოტენციალებით:

$$\varphi_{00}+\varphi_{10} \text{ და } \psi_{00}+\psi_{10}, \tag{4, 1}$$

სადაც φ_{10} და ψ_{10} არეკლილი პოტენციალებია, რომელთაც მივიღებთ $t=ah$ მომენტში $y=h$ საზღვრიდან φ_{00} პოტენციალის არეკლით. მაგრამ (4, 1) პოტენციალებით ფენის ძრაობა განისაზღვრება დროის იმ მომენტამდე, სანამ არ მოხდება კიდევ ფენის ერთ ერთ საზღვრიდან რომელიმე პოტენციალის არეკვლა. მაგალითად: $t=bh$ მომენტში ψ_{00} ტალღა აირეკლება $y=h$ საზღვრიდან და მოგვცემს ორ არეკლილ პოტენციალებს φ_{01} და ψ_{01}-ს. $t=2ah$ მომენტში ტალღა φ_{10} მიაღწევს $y=0$ საზღვარს და მისი არეკლით მივიღებთ პოტენციალებს φ_{20} და ψ_{20}-ს. დროის $t=(a+b)h$ მომენტში $y=0$ საზღვარს ერთდროულად მიაღწევენ ტალღები φ_{01} და ψ_{10} და მათი ერთდროული არეკლით ჩვენ მივიღებთ პოტენციალებს φ_{11} და ψ_{11}-ს და თუ შევთანხმდებით, რომ $\varphi_{mn}=\psi_{mn}\equiv 0$, როცა ერთ ერთი ნიშნაკი უარყოფითი რიცხვია, მაშინ, საზოგადოთ დროის ყოველ $t=(ma+nb)\,h$ მომენტში, სადაც m და n ნებისმიერი მთელი არა უარყოფითი რიცხვებია, $\varphi_{m-1,n}$ და $\psi_{m,n-1}$ ტალღების არეკლა, $y=0$ საზღვრიდან თუ $m+n$ ლუწია და $y=h$ საზღვრიდან თუ $m+n$ კენტია, გვაძლევს პოტენციალებს φ_{mn} და ψ_{mn}-ს. ვთქვათ $m+n=p$ და $\varepsilon_p=\frac{1}{2}[1-(-)^p]$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ φ_{mn} და ψ_{mn} პოტენციალები წარმოადგენ $\varphi_{m-1,n}$, $\psi_{m,n-1}$ პოტენციალების ანარეკლს $y=\varepsilon_p h$ საზღვრიდან, რომელნიც აღწევენ ამ საზღვარს $t=(ma+nb)\,h$ მომენტში. ამგვარად ნებისმიერი t დროისათვის ფენის ძრაობა შეიძლება განისაზღვროს პოტენციალებით:

$$\varphi_{00}+\sum_{mn}\varphi_{mn} \quad \text{და} \quad \psi_{00}+\sum_{mn}\psi_{mn} \tag{4, 2}$$

$$(m=0,\,1,\,2,\ldots;\quad n=0,\,1,\ldots;\quad m+n\geqq 1)$$

სადაც φ_{mn} და ψ_{mn} არეკლილი პოტენციალებია. ჩვენ წინ ახლა სდგას ამოცანა— ისე ავაგოთ ეს პოტენციალები, რომ დავაკმაყოფილოთ ამოცანის სასაზღვრო და საწყისი პირობები.

ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ პოტენციალები φ_{mn} და ψ_{mn} უნდა იყონ ისე შერჩეული, რომ აკმაყოფილებდენ პირობებს: 1) უნდა იყოს დაცული შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$D_1(\varphi_{m-1,\,n}+\varphi_{mn},\ \ \psi_{m,\,n-1}+\psi_{mn})=0, \tag{4, 3}$$

$$D_2(\varphi_{m-1,\,n}+\varphi_{mn},\ \ \psi_{m,\,n-1}+\psi_{mn})=0, \tag{4, 3'}$$

$$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

როცა $y=\varepsilon_p h$ სადაც $p=m+n$; 2) φ_{mn} და ψ_{mn} იგივურად უნდა იყონ ნულის ტოლი როცა $t\leqq(ma+nb)h$ და $0\leqq y\leqq h$.

ვთქვათ

$$\varphi_{mn}=R\,\Phi_{mn}(\theta_{mn}),\quad \psi_{mn}=R\,\Psi_{mn}(\varkappa_{mn}), \tag{4, 4}$$

სადაც Φ_{mn} და Ψ_{mn} ჯერჯერობით ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია, ხოლო θ_{mn} და $\varkappa_{mn}$ არიან (2, 3') ტიპის განტოლებათა ამოხსნები სათანადოთ როცა $c=a$ და $c=b$. შევარჩიოთ ეს განტოლებანი ისე, რომ

$$\theta_{m-1,\,n}=\theta_{mn}=\varkappa_{m,\,n-1}=\varkappa_{mn}=\theta, \tag{4, 5}$$

როცა $y=\varepsilon_p\,h$, სადაც $p=m+n$. უბრალო შემოწმებით დავამტკიცებთ, რომ ეს პირობები შესრულებული იქნება თუ θ_{mn} და $\varkappa_{mn}$ აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$\omega_{mn}\equiv t-\theta_{mn}x-(-)^p\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}\,y-nh\sqrt{b^2-\theta^2_{mn}}-(m+\varepsilon_p)\,h\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}=0, \tag{4, 6}$$

$$\delta_{mn}\equiv t-\varkappa_{mn}\,x-(-)^p\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}\,y-(n+\varepsilon_p)\,h\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}-mh\sqrt{a^2-\varkappa^2_{mn}}=0 \tag{4, 7}$$

$$\left(p=m+n,\ \varepsilon_p=\frac{1}{2}\left[1-(-)^p\right]\right)$$

შევისწავლოთ ახლა ეს განტოლებანი უფრო დაწვრილებით. ჩვენ ვეძებთ ისეთ ფუნქციებს, რომელნიც უნდა იყვნენ განსაზღრული S_0 არეში ე. ი. x, y, t ცვლადების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელნიც აკმაყოფილებენ პირობას $-\infty<x<\infty$, $0\leqq t<\infty$ და $0\leqq y\leqq h$. ამიტომ ჩვენ გვაინტერესებს θ_{mn} და $\varkappa_{mn}$-ის მნიშვნელობანი, რომელნიც S_0 არეს წერტილებს შეესაბამება. (4, 6) და (4, 7) განტოლებანი გვიჩვენებენ, რომ θ_{mn} და $\varkappa_{mn}$-ის ყოველ კომპლექსურ მნიშვნელობას, რომელნიც ნამდვილი ღერძის $(-a, a)$ შუალედში არ არის მოთავსებული, შეესაბამება გარკვეული სხივი S არეში. ამ სხივების განტოლებანი შესაბამისად იქნებიან შემდეგი:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{J\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}}{J\theta_{mn}\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}}\,t-nh\,\frac{J\sqrt{b^2-\bar\theta^2_{mn}}\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}}{J\bar\theta_{mn}\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}},\\ y&=\frac{-(-)^p J\theta_{mn}}{J\bar\theta_{mn}\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}}\,t-(-)^p h\,\frac{J\bar\theta_{mn}\left[n\sqrt{b^2-\theta^2_{mn}}+(m+\varepsilon_p)\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}\right]}{J\bar\theta_{mn}\sqrt{a^2-\theta^2_{mn}}}\end{aligned}\right\} \tag{4, 8}$$

და

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{J\sqrt{b^2-\bar{\varkappa}^2_{mn}}}{J\bar{\varkappa}_{mn}\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}}\,t - m\,h\,\frac{J\sqrt{a^2-\bar{\varkappa}^2_{mn}}\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}}{J\bar{\varkappa}_{mn}\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}},\\
y &= \frac{-(-)^p J\varkappa_{mn}}{J\bar{\varkappa}_{mn}\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}}\,t - (-)^p h\,\frac{J\bar{\varkappa}_{mn}\left[m\sqrt{a^2-\varkappa^2_{mn}}+(n+\varepsilon_p)\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}\right]}{J\bar{\varkappa}_{mn}\sqrt{b^2-\varkappa^2_{mn}}}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4,\ 9)
$$

$\bar{\theta}_{mn}$ და $\bar{\varkappa}_{mn}$ აღნიშნავენ θ_{mn} და $\varkappa_{mn}$-ის შეუღლებულ სიდიდეებს. თუ $\varkappa_{mn}$ იცვლება ნამდვილი ღერძის $(-b, -a)$ და (a, b) შუალედებში, მაშინ (4, 9) განტოლება გამოსახავს უსასრულოდ დაშორებულ სხივებს იმ შემთხვევაში, როცა $m \neq 0$, ხოლო, როცა $m=0$, მაშინ (4, 7) განტოლებას შეესაბამება სიბრტყეთა ოჯახი. განვიხილოთ ჯერ განტოლება (4, 6) და მისი შესაბამისი სხივთა ოჯახი S სივრცეში, გამოსახული (4, 8) განტოლებით. რადგანაც ის შემთხვევა, როცა $m=n=0$ შესწავლილი გვქონდა ზევით, ამიტომ ქვევით ყოველთვის გვექნება ნაგულისხმევი, რომ m და n ერთდროულად არ უდრიან ნულს. როგორც (4, 8) განტოლება გვიჩვენებს, θ_{mn} კომპლექსურ ცვლადის $J\ \theta_{mn} \gtreqqless 0$ ნახევარ სიბრტყეს შეესაბამება სხივები, რომელნიც გადიან S_0 არეში, ხოლო θ_{mn} კომპლექსური ცვლადის $J\theta_{mn}<0$ ნახევარ სიბრტყეს შეესაბამება ისეთი სხივები, რომელთაც S_0 არესთან არა აქვთ საერთო წერტილები. ამიტომ (4, 6) განტოლების საშუალებით S_0 არე გადაისახება θ_{mn} კომპლექსურ ცვლადის ზედა ნახევარ სიბრტყეზე. იმ სხივების გასწვრივ, რომელნიც ამ ნახევარ სიბრტყის წერტილებს შეესაბამება იზრდება t, როცა y-იც იზრდება თუ p ლუწი რიცხვია და თუ p კენტია, მაშინ იზრდება t, როცა y კლებულობს. ყველა ეს სხივები მოთავსებულია გარკვეული წრფივ ფართეულის ზევით, რომელიც წარმოადგენს

$$
t-\alpha x-(-)^p\sqrt{b^2-a^2}\,y - nh\sqrt{b^2-\alpha^2}-(m+\varepsilon_p)h\sqrt{a^2-\alpha^2}=0 \qquad (4,\ 10)
$$
$$
(-a \leqq \alpha \leqq a)
$$

სიბრტყეთა ოჯახის მომვლებს. ეს სიბრტყეთა ოჯახი შეესაბამება θ_{mn}-ის იმ მნიშვნელობებს, რომელნიც $(-a, a)$ კუპიურის „დადებით“ ნაპირზე იცვლებიან. აღვნიშნოთ ამ ოჯახის მომვლები T_{mn}-ით. მისი განტოლება პარამეტრული სახით იქნება შემდეგი:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha}{a^2}\,t - \frac{(b^2-a^2)h}{a^2\sqrt{b^2-\alpha^2}}\,nh,\\
y &= (-)^p\left[\frac{\sqrt{a^2-\alpha^2}}{a^2}\,t - h\,\frac{nb^2\sqrt{a^2-\alpha^2}+(m+\varepsilon_p)a^2\sqrt{b^2-\alpha^2}}{a^2\sqrt{b^2-\alpha^2}}\right]
\end{aligned}
\right\} \qquad (4,\ 11)
$$
$$
(-a \leqq \alpha \leqq a).
$$

ამ განტოლებიდან სჩანს, რომ T_{mn} ჰკვეთს Π_0 და Π_1 ნახევარ სიბრტყეებს და აგრეთვე მის გასწვრივ იზრდება t, როცა x დიდდება თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით, როგორიც არ უნდა იყოს y, $0 \leqq y \leqq h$. თუ p ლუწია, t მატუ-

ლობს T_{mn} ფართეულის გასწვრივ მაშინ, როცა y მატულობს, ხოლო თუ p კენტია, მაშინ t მატულობს, როცა y კლებულობს. (4, 11) განტოლებიდან თუ გამოვრიცხავთ α-ს მივიღებთ T_{mn} ფართეულის განტოლებას ცხადი სახით:

$$t = T_{mn}(x, y),$$

სადაც $T_{mn}(x, y)$ არის x და y-ის ცალსახა ფუნქცია. (4,11) განტოლების საშუალებით ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$T_{mn}(x, y) \geqq (ma+nb)\, h \tag{4, 12}$$

როცა $0 \leqq y \leqq h$ ნებისმიერი x-სთვის. ტოლობის ნიშანს ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა $x=0$ და $y=\varepsilon_p h$. T_{mn} ფართეულის და $\Pi\varepsilon_p$ ნახევარ სიბრტყის გადაკვეთის მრუდის განტოლება იქნება:

$$t = T_{mn}(x, \varepsilon_p h). \tag{4, 13}$$

ეს მრუდი ჰიპერბოლის მსგავს მრუდს წარმოადგენს, რომლის ნამდვილი ღერძი ემთხვევა t ღერძს და ნამდვილი ღერძის ნახევარი ტოლია $(ma+nb)\, h$-ის. აღვნიშნოთ ეს მრუდი $\Gamma^{(mn)}_{\varepsilon p}$-ით. $\Gamma^{(mn)}_{\varepsilon p}$ მრუდი $\Pi\varepsilon_p$ ნახევარ სიბრტყეს დაჰყოფს ორ ნაწილად. ერთი ნაწილი, რომელიც ამ მრუდის ზევით არის მოთავსებული, აღვნიშნოთ $E^{(mn)}_{\varepsilon p}$-ით. ხოლო $\Pi\varepsilon_p$ ნახევარ სიბრტყის დანარჩენ ნაწილს, $\Gamma^{(mn)}_{\varepsilon p}$ მრუდის წერტილების ჩათვლით, აღვნიშნავთ $E^{0(mn)}_{\varepsilon p}$-ით. T_{mn} ფართეული S_0 არეს ჰყოფს ორ ნაწილად. ის ნაწილი, რომელიც ამ ფართეულის ზევით არის მოთავსებული, აღვნიშნოთ $S_0^{(mn)}$-ით, ხოლო S_0-ის მეორე ნაწილი T_{mn} ფართეულის წერტილების ჩათვლით აღვნიშნოთ $S'^{(mn)}_0$-ით. (4, 6) განტოლების ძალით $S_0^{(mn)}$ არე გადაისახება θ_{mn} კომპლექსურ ცვლადის $J\theta_{mn} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყეზე, $(-a, +a)$ კუპიურის გამოკლებით. ეს შესაბამისობა ისეთია, რომ ყოველ წერტილს ამ ნახევარ სიბრტყისას შეესაბამება გარკვეული სხივი, რომელიც გაივლის $S_0^{(mn)}$ არეში და რომელსაც საერთო წერტილები არ ექნება $S'^{(mn)}_0$ არესთან. რაც შეეხება $S'^{(mn)}_0$ არეს, ის გადაისახება $(-a, a)$ კუპიურის, „დადებით" ნაპირზე. ეს შესაბამისობა ისეთია, რომ ამ კუპიურის „დადებით" ნაპირის ყოველი წერტილს შეესაბამება T_{mn} წრფოვან ფართეულის მხები ნახევარი სიბრტყე, რომელიც $S'^{(mn)}$ არეში გაივლის და რომელსაც, მაშასადამე, არ ექნება საერთო წერტილები $S_0^{(mn)}$ არესთან. კერძოთ, ურთიერთ ცალსახა დამოკიდებულება მყარდება T_{mn} ფართეულის მქნელთა და $(-a, a)$ კუპიურის „დადებით" ნაპირის წერტილთა შორის და ამგვარად T_{mn} ფართეული გადაისახება ამ კუპიურის „დადებით" ნაპირზე. კერძოთ ურთიერთ ცალსახათ გადაისახება $E^{(mn)}_{\varepsilon_p}$ არე θ_{mn} კომპლექსურ ცვლადის $J\theta_{mn} \geqq 0$ ნახევარ სიბრტყეზე, ნამდვილი ღერძის $(-a, a)$ კუპიურის გამოკლებით. ხოლო $(-a, a)$ კუპიურის „დადებით" ნაპირს შეესაბამება (ურთიერთ ცალსახათ) $\Gamma^{(mn)}_{\varepsilon_p}$ მრუდი და ამ მრუდის მხები სხივთა ოჯახი. აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$\omega'_{mn} = 0 \tag{4, 14}$$

როცა $t = T_{mn}(x, y)$ ან, რაც იგივეა, როცა $-a \leqq \theta_{mn} \leqq a$, რადგანაც T_{mn} ფარ-

თეული წარმოადგენს (4, 10) სიბრტყეთა მომვლებს. აღვნიშნოთ ისიც, რომ T_{mn} ფართეულის მქნელები t ღერძთან ადგენენ კუთხეს $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a}$-ს ტოლს.

გადავიდეთ ახლა (4, 7) განტოლების შესწავლაზე. ისე როგორც ზემოთ (4, 6) განტოლების განხილვის შემთხვევაში დავინახეთ, აქაც გვექნება, რომ სხივები, რომელიც შეესაბამება $J\varkappa_{mn}>0$ ნახევარ სიბრტყეს, მდებარეობენ წრფოვანი T'_{mn} ფართეულს ზემოთ. ეს ფართეული წარმოადგენს მომვლებს შემდეგი სიბრტყეთა ოჯახის:

$$t-\alpha x-(-)^p\sqrt{b^2-\alpha^2}-(n+\varepsilon_p)h\sqrt{b^2-\alpha^2}+mh\sqrt{a^2-\alpha^2}=0$$
$$(-a \leqq \alpha \leqq a).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ T'_{mn} ფართეული იმყოფება T_{mn} ფართეულის ზევით $0 \leqq y \leqq h$ არეში და ისინი გადაკვეთენ ერთმანეთს მრუდის გასწვრივ, რომელიც $y=\varepsilon_p h$ სიბრტყეზეა მოთავსებული.

მაშასადამე, თუ $t=T'_{mn}(x,y)$ არის T'_{mn} ფართეულის განტოლება, მაშინ გვექნება, რომ

$$T'_{mn}(x,y)>T_{mn}(x,y), \text{ როცა } 0<y<h.$$

T'_{mn} ფართეულის გასწვრივ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\delta'_{mn}=0. \tag{4, 14'}$$

T'_{mn} ფართეულის მქნელებს შეესაბამება $(-a, a)$ შუალედის დადებითი ნაპირი $\varkappa_{mn}$ კომპლექსური ცვლადის ნამდვილ ღერძზე.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ T'_{mn} ფართეულის მქნელები ადგენენ t ღერძთან კუთხეს $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{b}$-ს ტოლს. ამ ფართეულის $t=\text{const}$ სიბრტყეებით გადაკვეთით ჩვენ მივიღებთ ψ_{mn} არეკლილ განივ ტალღათა გავრცელების ფრონტებს.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ დაცული იქნას პირობა

$$\varphi_{mn}(x,y,t)=\psi_{mn}(x,y,t)\equiv 0, \quad \text{როცა } t\leqq(ma+nb)h, \quad 0\leqq y<h$$

საკმარისია, რომ

$$R\,\Phi_{mn}(\theta)\equiv 0 \text{ და } R\,\Psi_{mn}(\theta)\equiv 0, \tag{4, 15}$$

როცა $-a\leqq\theta\leqq a$.

შევიტანოთ ახლა (4, 3) და (4, 3') პირობებში φ_{mn} და ψ_{mn}-ის მაგივრად მათი გამოსახულებანი (4, 4) ფორმულებიდან. (4, 5) ტოლობების, (2, 9) ფორმულებისა და (4, 6), (4, 7) განტოლებათა ძალით მივიღებთ:

$$R\left[\frac{1}{\omega'}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\frac{2\theta\sqrt{a^2-\theta^2}\,(\Phi'_{m-1,\,n}-\Phi'_{mn})-(b^2-2\theta^2)\,(\Psi'_{m,\,n-1}-\Psi'_{mn})}{\omega'}\right]_{y=\varepsilon_p h}=0$$

$$R\left[\frac{1}{\omega'}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\frac{(b^2-2\theta^2)\,(\Phi'_{m-1,\,n}-\Phi'_{mn})+2\theta\sqrt{b^2-\theta^2}(\Psi'_{m,\,n-1}-\Psi'_{mn})}{\omega}\right]_{y=\varepsilon_p h}=0$$

$$(\omega=\omega_{m-1,\,n}=\omega_{mn}=\delta_{m,\,n-1}=\delta_{mn}, \text{ როცა } y=\varepsilon_p h).$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi'_{mn}(\theta)=A\Phi'_{m-1,\,n}(\theta)+(-)^p\,C\Psi'_{m,\,n-1}(\theta), \tag{4, 16}$$

$$\Psi'_{mn}(\theta)=(-)^p\,B\Phi'_{m-1,\,n}(\theta)+A\Psi'_{m,\,n-1}(\theta), \tag{4, 17}$$

სადაც:

$$A=\frac{-(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}, \tag{4, 18}$$

$$B=\frac{-4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{a^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}, \tag{4, 19}$$

$$C=\frac{4\theta(2\theta^2-b^2)\sqrt{b^2-\theta^2}}{(2\theta^2-b^2)^2+4\theta^2\sqrt{a^2-\theta^2}\,\sqrt{b^2-\theta^2}}. \tag{4, 20}$$

(4, 16) და (4, 17) წარმოადგენენ რეკურენტულ ფორმულებს, რომლის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია მიმდევრობით გამოვთვალოთ ყველა ანარეკლი კომპლექსურ პოტენციალების წარმოებულები, თუ ცნობილია Φ'_{00}, Ψ'_{00}. მაგრამ ეს უკანასკნელი გამოსახულია (3, 12) და (3, 13) ფორმულების შემწეობით. (4, 16) და (4, 17) რეკურენტული ფორმულების მიმდევრობითი გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია გამოვხატოთ Φ'_{mn} და Ψ'_{mn} ნებისმიერი m და n-სათვის Φ'_{00} და Ψ'_{00}-ის საშუალებით.

ეს ფორმულები არიან შემდეგი:

$$\Phi'_{mn}(\theta)=(-)^n A\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{m}{s}\binom{p-s-1}{m-1}A^{p-2s-1}$$

$$+(-)^n C\Psi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{n-1}{s}\binom{p-s-1}{n-1}A^{p-2s-1}, \tag{4, 21}$$

$$\Psi'_{mn}(\theta)=(-)^m B\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{m+1}{s}\binom{p-s-1}{m-1}A^{p-2s-1}$$

$$+(-)^m A\Psi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{n}{s}\binom{p-s-1}{m-1}A^{p-2s-1} \tag{4, 22}$$

$$(p=m+n).$$

სადაც

$$\binom{\mu}{\nu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu-\nu+1)}.$$

ამ ფორმულების სამართლიანობაში შეიძლება დავრწმუნდეთ, როცა $p=0, 1, 2$ უშუალო გამოთვლების საშუალებით (4, 16) და (4, 17) ფორმულების გამოყენებით. რაც შეეხება მათ სამართლიანობას ნებისმიერ p-სათვის, ჩვენ ამაში დავრწმუნდებით სრული ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

მართლაც, დავუშვათ რომ (4, 21) და (4, 22) ფორმულებს აქვთ ადგილი რომელიმე დადებით მთელ p-სათვის და დავამტკიცოთ, რომ მათ ექნებათ აგ-

რეთვე ადგილი $p+1$-სათვის. (4, 16), (4, 17) და (4, 21), (4, 22) ფორმულე-ბის ძალით დავწერთ:

$$\Phi'_{p-k+1,\,k}=A\Phi'_{p-k,\,k}+(-)^{p+1}\,C\Psi''_{p-k+1,\,k-1}$$

$$=(-)^k A\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{p-k}{s}\binom{p-s-1}{p-k-1}A^{p-2s}$$

$$+(-)^k C\Psi''_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{k-1}{s}\binom{p-s-1}{k-1}A^{p-2s}$$

$$+(-)^k BC\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{p-k}{s}\binom{p-s-1}{p-k}A^{p-2s-1}$$

$$+(-)^k C\Psi''_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{k-1}{s}\binom{p-s-1}{k-1}A^{p-2s-1}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$A^2-BC=1$$

და

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$$

გვექნება:

$$\Phi'_{p-k+1,\,k}=(-)^k A\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\left[\binom{p-k}{s}\binom{p-s-1}{p-k-1}\right.$$

$$\left.+\binom{p-k}{s}\binom{p-s-1}{p-k}+\binom{p-k}{s-1}\binom{p-s}{p-k}\right]A^{p-2s}$$

$$+(-)^k C\Psi''_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\left[\binom{k-1}{s}\binom{p-s}{p-k}+\binom{k-1}{s}\binom{p-s-1}{k-2}\right]A^{p-2s}$$

$$=(-)^k A\,\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\left[\binom{p-k}{s}\binom{p-s}{p-k}+\binom{p-k}{s-1}\binom{p-s}{p-k}\right]A^{p-2s}$$

$$+(-)^k C\Psi''_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{k-1}{s}\binom{p-s}{k-1}A^{p-2s}$$

$$=(-)^k A\,\Phi'_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{p-k+1}{s}\binom{p-s}{p-k}A^{p-2s}$$

$$+(-)^k C\Psi''_{00}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\binom{k-1}{s}\binom{p-s}{k-1}A^{p-2s}.$$

ამით (4, 21) ფორმულის სამართლიანობა დამტკიცებულია $p+1$-სათვის.

ასევე დამტკიცდება (4, 22) ფორმულის სამართლიანობა $p+1$-სათვის. ამ-გვარად ფორმულები (4, 21) და (4, 22) ნებისმიერ მთელი დადებითი p-სათვის სამართლიანია. ეს ფორმულები გამოსახავენ კომპლექსური პოტენციალების წარ-მოებულებს, ხოლო რაც შეეხება თვით კომპლექსურ პოტენციალების გამოსახვას,

ეს უკანასკნელი ჩვენ არ დაგვჭირდება, რადგანაც გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები u და v (1, 1) ფორმულის ძალით გამოისახებიან მხოლოდ პოტენციალების წარმოებულების საშუალებით.

თუ მივიღებთ მხედველობაში (4, 18), (4, 19), (4, 20) და აგრეთვე (2, 12) და (2, 13) ფორმულებს, (4, 21) და (4, 22) ფორმულებიდან გამოდის, რომ

$$R\,\Phi_{mn}(\theta)\equiv R\Psi_{mn}(\theta)\equiv 0, \tag{4, 23}$$

როცა

$$-a \leqq \theta \leqq a.$$

Φ_{mn} და Ψ_{mn} ის კომპლექსური პოტენციალებია, რომელიც შეესაბამება, (0, 0) წერტილზე $t=0$ მომენტში შეყურსულ ნებისმიერ $\vec{Q}$ მყისა ძალას. ვთქვათ $\breve{\Phi}_{mn}$ და $\breve{\Psi}_{mn}$ ის კომპლექსური პოტენციალებია, რომელიც შეესაბამება მყის ძალას $\vec{Q}\,(0,1)$, ხოლო $\breve{\breve{\Phi}}_{mn}$ და $\breve{\breve{\Psi}}_{mn}$ კომპლექსური პოტენციალები, რომელიც $\vec{Q}\,(1, 0)$ მყისა ძალას შეესაბამება. მაშინ (3, 21) და (3, 22) ფორმულების ძალით (4, 21) და (4, 22) ფორმულები მოგვცემენ, რომ $t=0$ მომენტში (0, 0) წერტილზე შეყურსულ ნებისმიერი $\vec{Q}\,(Q_x, Q_y)$ მყისა ძალის შესაბამისი კომპლექური პოტენციალების, Φ_{mn} და Ψ_{mn}-ის წარმოებულებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\Phi'_{mn}=Q_y\,\breve{\Phi}'_{mn}+Q_x\,\breve{\breve{\Phi}}'_{mn} \tag{4, 24}$$

$$\Psi'_{mn}=Q_y\,\breve{\Psi}_{mn}+Q_x\,\breve{\breve{\Psi}}' \tag{4, 25}$$

ვთქვათ $\breve{u}$ და $\breve{v}$ არიან გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები იმ შემთხვევაში როცა $Q_x=0$ და $Q_y=1$, ხოლო $\breve{\breve{u}}$ და $\breve{\breve{v}}$ მაშინ, როცა $Q_x=1$ და $Q_y=0$. (1, 1) ფორმულების ძალით ჩვენ გვექნება:

$$\breve{u}(x, y, t)=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\Phi}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\partial\theta_{p-k,k}}{\partial x}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\breve{\Psi}'_{p-k,\,k}(\chi_{p-k,\,k})\frac{\partial\chi_{p-k,\,k}}{\partial y}\right]\right\}, \tag{4, 26}$$

$$\breve{v}(x, y, t)=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\Phi}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\partial\theta_{p-k,\,k}}{\partial y}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\breve{\Psi}'_{p-k,\,k}(\chi_{p-k,\,k})\frac{\partial\chi_{p-k,\,k}}{\partial x}\right]\right\}. \tag{4, 27}$$

და

$$\breve{\breve{u}}(x, y, t)=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\breve{\Phi}}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\partial\theta_{p-k,\,k}}{\partial x}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\breve{\breve{\Psi}}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{\partial\varkappa_{p-k,\,k}}{\partial y}\right]\right\}, \tag{4, 28}$$

$$\breve{\breve{v}}(x, y, t)=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\breve{\Phi}}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\partial\theta_{p-k,\,k}}{\partial y}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\breve{\breve{\Psi}}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{\partial\varkappa_{p-k,\,k}}{\partial x}\right]\right\}. \tag{4, 29}$$

(2, 5) ფორმულების და (4, 6), (4, 7) განტოლებების ძალით (4, 26), (4, 27), (4, 28) და (4, 29) ფორმულები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\breve{u}=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\Phi}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\theta_{p-k,\,k}}{\omega'_{p-k,\,k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\breve{\Psi}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{(-)^p\sqrt{b^2-\varkappa^2_{p-k,\,k}}}{\delta'_{p-k,\,k}}\right]\right\}, \tag{4, 30}$$

$$\breve{v}=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\Phi}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{(-)^p\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}}{\omega'_{p-k,\,k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\breve{\Psi}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{\varkappa_{p-k,\,k}}{\delta'_{p-k,\,k}}\right]\right\} \tag{4, 31}$$

და

$$\breve{\breve{u}}=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\breve{\Phi}}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{\theta_{p-k,\,k}}{\omega'_{p-k,\,k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\breve{\breve{\Psi}}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{(-)^p\sqrt{b^2-\varkappa^2_{p-k,\,k}}}{\delta'_{p-k,\,k}}\right]\right\}, \tag{4, 32}$$

$$\breve{\breve{v}}=R\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\left[\breve{\breve{\Phi}}'_{p-k,\,k}(\theta_{p-k,\,k})\frac{(-)^p\sqrt{a^2-\theta^2_{p-k,\,k}}}{\omega'_{p-k,\,k}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\breve{\breve{\Psi}}'_{p-k,\,k}(\varkappa_{p-k,\,k})\frac{\varkappa_{p-k,\,k}}{\delta'_{p-k,\,k}}\right]\right\}. \tag{4, 33}$$

გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები u და v, რომელიც შეესაბამება $(0, 0)$ წერტილზე $t=0$ მომენტში შეყურსულ ნებისმიერ $\vec{Q}(Q_x, Q_y)$ მყისა ძალას, იქნება:

$$u(x, y, t)=Q_y \breve{u}(x, y, t)+Q_x \breve{\breve{u}}(x, y, t), \tag{4, 34}$$

$$v(x, y, t)=Q_y \breve{v}(x, y, t)+Q_x \breve{\breve{v}}(x, y, t). \tag{4, 35}$$

რადგანაც T_{mn} და T'_{mn} ფართეულებზე შესაბამისად $\omega'_{mn}=0$ და $\delta'_{mn}=0$, ამიტომ $u(x, y, t)$ და $v(x, y, t)$ (4, 30), (4, 31), (4, 32) და (4, 33) ფორმულების ძალით განიცდიან უსასრულო წყვეტას, როცა $t=T_{mn}(x, y)$ და $t=T'_{mn}(x, y)$. გარდა ამისა u და v განიცდიან წყვეტას, როგორც ეს იყო წინეთ აღნიშნული Π_0 სიბრტყის სხივებზე: $t=\pm cx$.

თუ $\vec{Q}(Q_x, Q_y)$ ნებისმიერი ძალა შეყურსულია $(\xi, 0)$ წერტილზე $t=\tau$ მომენტში, მაშინ მისი შესაბამისი გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებს მივიღებთ, თუ (4, 34) და (4, 35) ფორმულებში x და t-ს შევცვლით შესაბამისად $x-\xi$ და $t-\tau$-ით. გვექნება:

$$u(x-\xi, y, t-\tau)=Q_y(\xi, \tau)\, \breve{u}(x-\xi, y, t-\tau)+Q_x(\xi, \tau)\, \breve{\breve{u}}(x-\xi, y, t-\tau), \tag{4, 36}$$

$$v(x-\xi, y, t-\tau)=Q_y(\xi, \tau)\, \breve{v}(x-\xi, y, t-\tau)+Q_x(\xi, \tau)\, \breve{\breve{v}}(x-\xi, y, t-\tau). \tag{4, 37}$$

ვთქვათ $y=0$ საზღვრის გასწვრივ განაწილებულია ძალები $\vec{R}_0(X_0, Y_0)$, მაშინ, თუ (4, 36) და (4, 37) ფორმულებში Q_x და Q_y-ის ნაცვლად შევიტანთ X_0 და Y_0-ს და მოვახდენთ ამ ტოლობათა ორივე მხარეების ინტეგრობას ξ-ის და τ-ს მიმართ $(-\infty, +\infty)$ საზღვრებში, გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$u_1(x, y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{u}(x-\xi, y, t-\tau) Y_0(\xi, \tau) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{\breve{u}}(x-\xi, y, t-\tau)\, X_0(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{4, 38}$$

$$v_1(x, y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{v}(x-\xi, y, t-\tau)\, Y_0(\xi, \tau)\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{\breve{v}}(x-\xi, y, t-\tau)\, X_0(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{4, 39}$$

ვთქვათ, ახლა ფენის $y=0$ საზღვარი თავისუფალია გარე ძალებისაგან, ხოლო $y=h$ საზღვარზე მოდებულია $\vec{R}_1(X_1, Y_1)$ ძალები. აღვნიშნოთ გადაადგილების

ვექტორის კომპონენტები ამ შემთხვევაში u_2 და v_2-ით. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ შემთხვევაში გვექნება ფორმულები:

$$u_2(x, y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{u}(x-\xi, h-y, t-\tau)\, Y_1(\xi, \tau)\, d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{\breve{u}}(x-\xi, h-y, t-\tau)\, X_1(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{4, 40}$$

$$v_2(x, y, t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{v}(x-\xi, h-y, t-\tau)\, Y_1(\xi, \tau)\, d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \breve{\breve{v}}(x-\xi, h-y, t-\tau)\, X_1(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{4, 41}$$

ფენის რყევა ზოგადი შემთხვევაში, როცა $y=0$ საზღვარზე განაწილებულია ნებისმიერი $\vec{R}_0(X_0, Y_0)$ და $y=h$ საზღვარზე $\vec{R}_1(X_1, Y_1)$ ძალები და $t=0$ მომენტში ადგილი აქვს საწყის პირობებს:

$$u(x, y, t)=\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}=v(x, y, t)=\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}=0, \qquad \text{როცა } t=0,$$

განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$u=u_1+u_2, \tag{4, 42}$$

$$v=v_1+v_2. \tag{4, 43}$$

შემოწმება იმისა, რომ ზემო განსაზღვრული u და v ფუნქციები მართლაც აკმაყოფილებენ ამოცანის (1, 5) და (1, 6) სასაზღვრო და (1, 7) საწყის პირობებს არ წარმოადგენს არავითარ სიძნელეს, ამიტომ ამ საკითხზე ჩვენ აქ არ შევჩერდებით.

ამავე მეთოდით ადვილად ამოიხსნება ფენის რყევის ამოცანა, როცა მის საზღვრებზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორი ან როცა ერთი საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორი, ხოლო მეორე საზღვარზე მოცემულია ძაბვა.

RANDWERTAUFGABE DER SCHWINGUNGEN EINER UNENDLICHEN SCHICHT

Von I. VECOUA

Zusammenfassung

Der Verfasser betrachtet die (ebene) Aufgabe der Schwingungen einer unendlichen Schicht, falls an den Grenzflächen Spannungen vorgegeben sind. Die Randbedingungen wie auch die Anfangsbedingungen der Aufgabe sind durch die Formeln (1,5), (1,6) und (1,7), wo φ und ψ bzw. longitudinale und transversale Potentiale, aber u und v die Komponenten des Verschiebungsvektors bedeuten, gegeben. Die Aufgabe wird gelöst mit Hilfe der Methode der Funktionentheorie durch sogenannte funktional-invariante Lösungen der Wellengleichung. Letztere Lösungen wurden zuerst von V. Smirnoff und S. Soboleff für die Lamb'sche Aufgabe des Halbraumes angewandt. Ausgehend von elementaren Potentialen, die der Aufgabe der Schwingungen des Halbraumes unter Wirkung einer Einzelkraft auf der Oberfläche entsprechen, gelingt es dem Verfasser, auf ein allgemein gültiges Gesetz der Reflexion dieser Potentiale an der Grenze der Schicht hinzuweisen und mit Hilfe der reflektierten Potentiale die Aufgabe der Schwingungen einer Schicht mit beliebiger Randbelastung und verschwindenden Anfangbedingungen zu lösen. Nach der Methode des Verfassers läst sich auch die Aufgabe der Schwingungen einer Schicht lösen, wenn an beiden Oberflächen die Verschiebungen, oder aber auf der einen Oberfläche die Spannungen und auf der andern die Verschiebungen gegeben sind. Die Hauptresultate des Verfassers sind in den Formeln: (4,17), (4,21), (4,22), (4,38), (4,39), (4,40), (4,41), (4,42) und (4,43) enthalten.

In diesen Formeln bedeuten $\Phi_{m,n}$ und $\Psi_{m,n}$ komplexe analytische Funktionen der Argumente θ_{mn} und $\varkappa_{mn}$. Die reflektierten Potentiale φ_{mn} und ψ_{mn} werden als reelle Teile dieser Funktionen bestimmt. θ_{mn} und $\varkappa_{mn}$ werden aus den Gleichungen (3,6) und (3,7) bestimmt.