ᲢᲤᲘᲚᲘᲡᲘᲡ ᲛᲐᲗᲔᲛᲐᲢᲘᲙᲣᲠᲘ ᲘᲜᲡᲢᲘᲢᲣᲢᲘᲡ ᲨᲠᲝᲛᲔᲑᲘ, Ტ. II, 1937
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА, Т. II, 1937
TRAVAUX DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE DE TBILISSI, T. II, 1937

И. Н. ВЕКУА

ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

1. Постановка задачи. В настоящей работе мы ставим целью дать общее представление решений диференциальных уравнений вида

$$\Delta^n U+\sum_{k=1}^{n} A_k(z_1, z_2)\, \Delta^{n-k} U = G_0(z_1, z_2), \qquad (1)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$; $A_1(z_1, z_2), \ldots, A_n(z_1, z_2)$ и $G_0(z_1, z_2)$—заданные функции от двух комплексных переменных z_1 и z_2. К таким уравнениям при вещественных z_1 и z_2 часто приводят различные задачи математической физики. Например: колебание мембраны, поперечные колебания пластинки при изгибе, электромагнитные колебания и другие.

Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, где x_1, y_1, x_2, y_2—вещественные переменные. Тогда паре (z_1, z_2) мы можем сопоставлять точку в четырехмерном пространстве с вещественными координатами x_1, y_1, x_2, y_2. Величины z_1 и z_2 мы будем называть комплексными координатами точки четырехмерного пространства. Точку с комплексными координатами z_1 и z_2 будем обозначать через $\{z_1, z_2\}$. Окрестность точки $\{z_1, z_2\}$ в четырехмерном пространстве обозначим через $\mathfrak{M}^4\{z_1, z_2\}$.

Совершая линейное преобразование переменных:

$$z=z_1+iz_2, \quad \bar{z}=z_1-iz_2,$$

приведем уравнение (1) к виду:

$$\frac{\partial^{2n} U}{\partial z^n \partial \bar{z}^n}+\sum_{k=1}^{n} B_k(z, \bar{z}) \frac{\partial^{2(n-k)} U}{\partial z^{n-k} \partial \bar{z}^{n-k}}=G(\bar{z}, z), \qquad (2)$$

где

$$B_k(z, \bar{z})=\frac{1}{4^k} A_k\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right), \quad G(z, \bar{z})=\frac{1}{4^n} G_0\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

В дальнейшем мы будем считать, что функции $B_k(z, \bar{z})$ $(k=1, \ldots, n)$ и $G(z, \bar{z})$ суть регулярные функции от двух комплексных переменных z и $\bar{z}$ в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$.

2. Приведение к интегральному уравнению типа Вольтера. Пусть $U(z, \bar{z})$—какое-нибудь решение диференциального уравнения (2), регулярное в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$.

Тогда, интегрируя последовательно обе части уравнения (2) n раз по z и n раз по $\bar{z}$, получим:

$$U(z, \bar{z})+\sum_{k=1}^{n}\int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \bar{\xi}) \frac{\partial^{2(n-k)}U(\xi, \bar{\xi})}{\partial\xi^{n-k}\partial\bar{\xi}^{n-k}} d\bar{\xi}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!^2}\int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} (z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}G(\xi, \bar{\xi})d\bar{\xi}+\sum_{k=0}^{n-1}\{\bar{z}^k\varphi_k(z)+z^k\bar{\psi}_k(\bar{z})\}, \qquad (3)$$

где $\varphi_k(z)$ и $\bar{\psi}_k(\bar{z})$ суть определенные функции, регулярные в окрестности начала координат, соответственно от переменных z и $\bar{z}$.

Путем последовательного интегрирования по частям, второй член левой части равенства (3) приводится к виду:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \bar{\xi}) \frac{\partial^{2(n-k)}U(\xi, \bar{\xi})}{\partial\xi^{n-k}\partial\bar{\xi}^{n-k}} d\bar{\xi}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[\bar{z}^k p_k(z)+z^k \bar{q}_k(\bar{z})$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial\xi^{n-k}\partial\bar{\xi}^{n-k}}\left[\frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \xi)\right]U(\xi, \bar{\xi})d\bar{\xi}, \qquad (4)$$

где $p_k(z)$ и $\bar{q}_k(\bar{z})$—определенные функции, регулярные вблизи начала координат.

В силу (4), интегро-диференциальное уравнение (3) превратится в интегральное уравнение типа Вольтера:

$$U(z, \bar{z})+\int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} K(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi})\, U(\xi, \bar{\xi})d\bar{\xi}=F(z, \bar{z}), \qquad (5)$$

где

$$K(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial \xi^{n-k} \partial \bar{\xi}^{n-k}} \left[\frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \bar{\xi}) \right] \tag{6}$$

и

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{n-1} [z^k \bar{\Psi}_k(\bar{z}) + \bar{z}^k \Phi_k(z)]$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} (z-\xi)^{n-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1} G(\xi, \bar{\xi}) \, d\bar{\xi}; \tag{7}$$

причем $\Phi_k(z)$ и $\bar{\Psi}_k(\bar{z})$ суть определенные функции, регулярные вблизи начала координат.

Нетрудно проверить, что функция $F(z, \bar{z})$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial^{2n} F}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} = G(z, \bar{z}). \tag{8}$$

Не изменяя правой части выражения (7), мы можем подчинить функции $\Phi_k(z)$ и $\bar{\Psi}_k(\bar{z})$ условиям:

$$\begin{gathered} \Phi_k(0) = \Phi_k'(0) = \ldots = \Phi_k^{(k-1)}(0) = 0, \\ \bar{\Psi}_k(0) = \bar{\Psi}_k'(0) = \ldots = \bar{\Psi}_k^{(k-1)}(0) = \bar{\Psi}_k^{(k)}(0) = 0, \\ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{9}$$

В самом деле, если эти условия не выполняются, то будем иметь:

$$\Phi_k(z) = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} z + \ldots + A_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \Phi_k^*(z),$$

$$\bar{\Psi}_k(\bar{z}) = \bar{A}_0^{(k)} + \bar{A}_1^{(k)} \bar{z} + \ldots + \bar{A}_{k-1}^{(k)} \bar{z}^{k-1} + \bar{A}_k^{(k)} \bar{z}^k + \bar{\Psi}_k^*(\bar{z}),$$

где $A_l^{(k)}$ и $\bar{A}_l^{(k)}$ суть комплексные постоянные, которые не равны одновременно нулю, а функции $\Phi_k^*(z)$ и $\bar{\Psi}_k^*(\bar{z})$ удовлетворяют условиям (9).

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{z}^k \Phi_k(z) + z^k \bar{\Psi}_k(\bar{z}) \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \bar{z}^k \left[\Phi_k^*(z) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l^{(k)} z^l \right] \right.$$

$$\left. + z^k \left[\bar{\Psi}_k^*(\bar{z}) + \sum_{l=0}^{k} \bar{A}_l^{(k)} \bar{z}^l \right] \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{z}^k \Phi_k^*(z) + \sum_{l=0}^{k} \bar{A}_l^{(k)} \bar{z}^l z^k \right]$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\zeta^k\overline{\Psi}_k^*(\bar\zeta)+\sum_{l=0}^{k-1}A_l^{(k)}\zeta^l\bar\zeta^k\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\bar\zeta^k\left[\Phi_k^*(\zeta)+\sum_{l=k}^{n-1}\overline{A}_k^{(l)}\zeta^l\right]$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k\left[\overline{\Psi}_k^*(\bar\zeta)+\sum_{l=k+1}^{n-1}A_k^{(l)}\bar\zeta^l\right],$$

но, введя обозначения:

$$\Phi_k^{**}(\zeta)=\Phi_k^*(\zeta)+\sum_{l=k}^{n-1}\overline{A}_k^{(l)}\zeta^l,\qquad \overline{\Psi}_k^{**}(\bar\zeta)=\overline{\Psi}_k^*(\bar\zeta)+\sum_{l=k+1}^{n-1}A_k^{(l)}\bar\zeta^l,$$

получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\bar\zeta^k\Phi_k(\zeta)+\zeta^k\overline{\Psi}_k(\bar\zeta)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\bar\zeta^k\Phi_k^{**}(\zeta)+\zeta^k\overline{\Psi}_k^{**}(\bar\zeta)\right].$$

Функции $\Phi_k^{**}(\zeta)$ и $\overline{\Psi}_k^{**}(\bar\zeta)$, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям (9) и, следовательно, наше предложение доказано.

3. Характеристики. Задача Гурса. Рассмотрим многообразия $\{\zeta,\bar\zeta=\text{const.}\}$ и $\{\zeta=\text{const.},\bar\zeta\}$ в четырехмерном пространстве переменных ζ и $\bar\zeta$. Назовем эти многообразия *характеристиками* диференциального уравнения (2). Очевидно, что через каждую точку $\{\zeta,\bar\zeta\}$ рассматриваемого пространства проходят две характеристики.

Пусть $\{\zeta_0,\bar\zeta_0\}$—какая-нибудь точка, вблизи которой коэфициенты диференциального уравнения (2) регулярны. Обозначим характеристики $\{\zeta,\bar\zeta=\bar\zeta_0\}$ и $\{\zeta=\zeta_0,\bar\zeta\}$ соответственно через E_0 и $\overline{E}_0$. Пусть вдоль этих характеристик заданы значения функции $U(\zeta,\bar\zeta)$ и всех ее частных производных до n—1-го порядка включительно, т. е.

$$\left.U\right|_{E_0}=f_0(\zeta),\ \left.\frac{\partial U}{\partial\bar\zeta}\right|_{E_0}=f_1(\zeta),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{n-1}U}{\partial\bar\zeta^{n-1}}\right|_{E_0}=f_{n-1}(\zeta),$$

$$\left.U\right|_{\overline{E}_0}=\bar g_0(\bar\zeta),\ \left.\frac{\partial U}{\partial\zeta}\right|_{\overline{E}_0}=\bar g_1(\bar\zeta),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{n-1}U}{\partial\zeta^{n-1}}\right|_{\overline{E}_0}=\bar g_{n-1}(\bar\zeta),\qquad (10)$$

$$[f_0(\zeta_0)=\bar g(\bar\zeta_0)],$$

где $f_0(\zeta)$, $f_1(\zeta)$, …, $f_{n-1}(\zeta)$ и $\bar g_0(\bar\zeta)$, $\bar g_1(\bar\zeta)$, …, $\bar g_{n-1}(\bar\zeta)$ суть заданные функции, регулярные в области $\mathfrak{M}^4\{\zeta_0,\bar\zeta_0\}$, соответственно от переменных ζ и $\bar\zeta$.

Поставим задачу: *найти решение диференциального уравнения* (2), *регулярное в области* $\mathfrak{M}^4\{\zeta_0, \bar{\zeta}_0\}$ *и принимающее на характеристиках* E_0 *и* $\bar{E}_0$ *вместе со своими частными производными до* $n-1$*-го порядка включительно, заданные значения* (10).

Эту задачу мы будем называть *задачей Гурса** для диференциального уравнения (2).

Мы ниже покажем, что задача Гурса имеет всегда решение и притом единственное.

Теперь мы покажем, что функции $\Phi_k(\zeta)$ и $\overline{\Psi}_k(\bar{\zeta})$, входящие в правую часть уравнения (5), могут быть выражены через значения $U(\zeta, \bar{\zeta})$ и ее частных производных до $n-1$-го порядка на характеристиках E_0 и $\bar{E}_0$.

Мы будем предполагать, что функции $\Phi_k(\zeta)$ и $\overline{\Psi}_k(\bar{\zeta})$ удовлетворяют условиям (9). Очевидно, не уменьшая общности, мы можем считать: $\zeta_0=0$ и $\bar{\zeta}_0=0$.

Полагая в обоих частях уравнения (5) $\bar{\zeta}=0$, получим:

$$\Phi_0(\zeta)=U(\zeta, 0). \tag{11}$$

Полагая теперь $\zeta=0$, из (5) и (11) получим:

$$\overline{\Psi}_0(\bar{\zeta}) = U(0, \bar{\zeta})-\Phi_0(0). \tag{12}$$

Продиференцируем теперь обе части уравнения (5) по $\bar{\zeta}$ и затем положим $\bar{\zeta}=0$. Тогда, в силу (9), получим:

$$\Phi_1(\zeta)= \left.\frac{\partial U}{\partial \bar{\zeta}}\right|_{\bar{\zeta}=0} +\int_0^{z} K(\zeta, 0, \xi, 0)\, U(\xi, 0)\, d\xi -\overline{\Psi}_0'(0)\cdot$$

Таким же образом диференцируя обе части уравнения (5) по ζ и затем полагая $\zeta=0$, в силу условий (9), получим:

$$\overline{\Psi}_1(\bar{\zeta})=\left.\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0}+\int_0^{\bar{\zeta}} K(0, \bar{\zeta}, 0, \bar{\xi})\, U(0,\bar{\xi})d\bar{\xi}-\bar{\zeta}\, \Phi_1'(0)-\Phi_0'(0).$$

Диференцируем теперь обе части уравнения (5) два раза по $\bar{\zeta}$ и два раза по ζ, и затем последовательно полагаем $\bar{\zeta}=0$ и $\zeta=0$. Тогда, в силу условий (9), как нетрудно видеть, получим:

* Гурса рассматривает аналогичную задачу лишь для уравнений гиперболического типа в вещественной области. См., напр., Э. Гурса. Курс математического анализа. Т. III, ч. I, стр. 104. М.—Л. 1933.

$$2\Phi_2(z)=\frac{\partial^2 U}{\partial \bar z^2}\Big|_{\bar z=0}+\int_0^z\left\{\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[K(z,\bar z,\xi,\bar z)\,U(\xi,\bar z)\right]\right\}_{\bar z=0}d\xi$$

$$+\int_0^z\frac{\partial K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)}{\partial \bar z}\Big|_{\bar\xi=\bar z=0}U(\xi,0)\,d\xi-\bar\Psi_0''(0)-z\,\bar\Psi_1''(0),$$

$$2\bar\Psi_2(\bar z)=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big|_{z=0}+\int_0^{\bar z}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[K(z,\bar z,z,\bar\xi)\,U(z,\bar\xi)\right]\right\}_{z=0}d\bar\xi$$

$$+\int_0^{\bar z}\frac{\partial K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)}{\partial z}\Big|_{\xi=z=0}U(0,\bar\xi)\,d\bar\xi-\Phi_0''(0)-\bar z\,\Phi_1''(0)-\bar z^2\,\Phi_2''(0).$$

Продолжая этот процесс дальше, мы придем к следующим общим формулам:

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k U}{\partial \bar z^k}\Big|_{\bar z=0}+\frac{1}{k!}\int_0^z\left\{\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^{k-s}}{\partial \bar z^{k-s}}\left[\frac{\partial^{s-1}K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)}{\partial \bar z^{s-1}}\right]_{\bar\xi=\bar z}U(\xi,\bar z)\right\}_{\bar z=0}d\xi$$

$$-\frac{1}{k!}\left[\bar\Psi_0^{(k)}(0)+z\,\bar\Psi_1^{(k)}(0)+\ldots+z^{k-1}\,\bar\Psi_{k-1}^{(k)}(0)\right], \qquad (13)$$

$$\bar\Psi_k(\bar z)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\Big|_{z=0}+\frac{1}{k!}\int_0^{\bar z}\left\{\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^{k-s}}{\partial z^{k-s}}\left[\frac{\partial^{s-1}K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)}{\partial z^{s-1}}\right]_{\xi=z}U(z,\bar\xi)\right\}_{z=0}d\bar\xi$$

$$-\frac{1}{k!}\left[\Phi_0^{(k)}(0)+\bar z\,\Phi_1^{(k)}(0)+\ldots+\bar z^k\,\Phi_k^{(k)}(0)\right] \qquad (14)$$

$$(k=1,\ 2,\ldots,n-1).$$

Как показывает формула (13), зная функции $\Phi_0(z),\ldots,\Phi_{k-1}(z)$ и $\bar\Psi_0(\bar z),\ldots,\bar\Psi_{k-1}(\bar z)$, мы можем вычислить при помощи этой формулы $\Phi_k(z)$, а затем, в силу формулы (14), мы вычисляем $\bar\Psi_k(\bar z)$.

Следовательно, *всякое решение дифференциального уравнения* (2), *регулярное в области* $\mathfrak{M}^4\{0,0\}$, *удовлетворяет интегральному уравнению* (5), *где функции* $\Phi_k(z)$ *и* $\bar\Psi_k(\bar z)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ *вычисляются при помощи рекурентных формул* (11), (12), (13) *и* (14).

4. Эквивалентность интегрального уравнения (5) **с диференциальным уравнением** (2). Мы видели выше, что всякое регулярное решение диференциального уравнения (2) удовлетворяет интегральному уравнению (5), где функции $\Phi_k(z)$ и $\overline{\Psi_k}(\bar z)$ вполне определены данным решением и условиями (9). Докажем теперь обратную теорему:

Каковы бы не были функции $\Phi_k(z)$ и $\overline{\Psi}_k(\bar z)$, регулярные вблизи начала координат, решение интегрального уравнения (5) *является регулярной функцией от двух комплексных переменных z и $\bar z$ в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ и удовлетворяет диференциальному уравнению* (2).

Доказательство. Решение интегрального уравнения (5) имеет вид:

$$U(z,\bar z)=\int_0^z d\xi\int_0^{\bar z} H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)\;F(\xi,\bar\xi)\,d\bar\xi+F(z,\bar z), \tag{15}$$

где $H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$—резольвента ядра $K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$—дается формулой:

$$H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(z,\bar z,\xi,\bar\xi); \tag{16}$$

причем

$$K_1(z,\bar z,\xi,\bar\xi)=-K(z,\bar z,\xi,\bar\xi) \tag{17}$$

и

$$K_m(\bar z, z,\xi,\bar\xi)=(-)^m\int_\xi^z d\xi_1\int_{\bar\xi}^{\bar z}K(z,\bar z,\xi_1,\bar\xi_1)\,K_{m-1}(\xi_1,\bar\xi_1,\xi,\bar\xi)\,d\bar\xi_1. \tag{18}$$

Теперь нам надо показать, во-первых, что выражение (15) есть регулярная функция от двух комплексных переменных z, $\bar z$ в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ и во-вторых, что оно удовлетворяет диференциальному уравнению (2).

Для доказательства первой части необходимо доказать, что резольвента $H(z,\bar z,\xi,\bar\xi)$ есть регулярная функция относительно каждой пары комплексных переменных $(z,\bar z)$ и $(\xi,\bar\xi)$ в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$. Для этого достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (16) в области $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$.

Фиксируем некоторую, но вполне определенную замкнутую область $\overline{\mathfrak{M}^4}\{0, 0\}$, где коэфициенты диференциального уравнения (2) регулярны. Тогда максимум $|K(z,\bar z,\xi,\bar\xi)|$ ограничен в этой области и меньше некоторого конечного числа M. Из формул (17) и (18) легко получим:

$$|K_m(z,\bar z,\xi,\bar\xi)|<M^m\,\frac{|z-\xi|^{m-1}\,|\bar z-\bar\xi|^{m-1}}{(m-1)!^2}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда легко вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (16) и, следовательно, первая часть нашей теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы достаточно произвести над обеими частями уравнения (5) операцию $\frac{\partial^{2n}}{\partial \zeta^n \, \partial \bar{\zeta}^n}$. Тогда, очевидно, мы придем к диференциальному уравнению (2).

Полученные выше результаты можно сформулировать также в виде следующей теоремы: *если* $F(\zeta, \bar{\zeta})$ *есть регулярное решение диференциального уравнения* (8), *то выражение* (15) *представляет решение диференциального уравнения* (2), *регулярное в области* $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ *и, наоборот, любое регулярное решение диференциального уравнения* (2) *можно представить в виде* (15).

Теперь нетрудно решить задачу Гурса. В самом деле, определяя функции $\Phi_k(\zeta)$ и $\overline{\Psi}_k(\bar{\zeta})$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, входящие в формулу (15), формулами (11), (12), (13) и (14), при помощи заданных на характеристиках E_0 и $\overline{E}_0$ значений $U(\zeta, \bar{\zeta})$ и ее частных производных до $n-1$-го порядка включительно, мы получаем функцию, решающую задачу Гурса.

Очевидно, конечно, что задача Гурса имеет единственное решение.

5. Диференциальное уравнение с постоянными коэфициентами. Пусть коэфициенты B_k диференциального уравнения (2) суть постоянные числа. Тогда, как увидим ниже, ядро $H(\zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi})$ интегрального представления (15) решения диференциального уравнения (2) легко построить эффективно.

В самом деле, в этом случае в силу (6) будем иметь:

$$K(\zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{(\zeta-\xi)^{k-1} \, (\bar{\zeta}-\bar{\xi})^{k-1}}{(k-1)!^{\,2}}.$$

Согласно (17) и (18) имеем:

$$K_1(\zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi}) = -\sum_{k=1}^{n} B_k \frac{(\zeta-\xi)^{k-1} \, (\bar{\zeta}-\bar{\xi})^{k-1}}{(k-1)!^{\,2}},$$

$$K_2(\zeta, \bar{\zeta}, \xi, \bar{\xi}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} B_k B_l \frac{1}{(k-1)!^{\,2} \, (l-1)!^{\,2}} \int_{\xi}^{\zeta} d\xi_1 \int_{\bar{\xi}}^{\bar{\zeta}} (\zeta-\xi_1)^{k-1} (\bar{\zeta}-\bar{\xi}_1)^{k-1} (\xi_1-\xi)^{l-1} (\bar{\xi}_1-\bar{\xi})^{l-1} \, d\bar{\xi}_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{B_k B_l}{(k-1)!^{\,2} \, (l-1)!^{\,2}} \int_{\xi}^{\zeta} (\zeta-\xi_1)^{k-1} (\xi_1-\xi)^{l-1} \, d\xi_1 \int_{\bar{\xi}}^{\bar{\zeta}} (\bar{\zeta}-\bar{\xi}_1)^{k-1} \, (\bar{\xi}_1-\bar{\xi})^{l-1} d\bar{\xi}_1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{B_k B_l}{(k-1)!^2\,(l-1)!^2}\,\frac{(k-1)!\,(\zeta-\xi)^{k+l-1}}{(k+l-1)!}\,\frac{(k-1)!\,(\bar\zeta-\bar\xi)^{k+l-1}}{(k+l-1)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}B_k B_l\,\frac{(\zeta-\xi)^{k+l-1}\,(\bar\zeta-\bar\xi)^{k+l-1}}{(l-1)!^2\,(k+l-1)!^2}$$

или, введя обозначение:

$$B_s^{(2)}=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{B_k B_{s-k}}{(s-k-1)!^2}$$

будем иметь:

$$K_2(\zeta,\bar\zeta,\xi,\bar\xi)=\sum_{s=2}^{2n}B_s^{(2)}\,\frac{(\zeta-\xi)^{s-1}\,(\bar\zeta-\bar\xi)^{s-1}}{(s-1)!^2}\,.$$

Вычисляя аналогично K_3, K_4, ..., легко придем к общей формуле:

$$K_m(\zeta,\bar\zeta,\xi,\bar\xi)=(-)^m\sum_{s=m}^{mn}B_s^{(m)}\,\frac{(\zeta-\xi)^{s-1}\,(\bar\zeta-\bar\xi)^{s-1}}{(s-1)!^2}\tag{19}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$B_s^{(m)}=\sum_{k=1}^{s}\frac{B_k B_{s-k}^{(m-1)}}{(s-k-1)!^2}\qquad(m=2,\ 3,\ \ldots);$$

причем

$$B_s^{(1)}=B_s.$$

В силу (19) из (16) получим:

$$H(\zeta,\bar\zeta,\xi,\bar\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}(-)^m\sum_{s=m}^{mn}B_s^{(m)}\,\frac{(\zeta-\xi)^{s-1}\,(\bar\zeta-\bar\xi)^{s-1}}{(s-1)!^2}\tag{20}$$

Очевидно, что $H(\zeta,\bar\zeta,\xi,\bar\xi)$ есть целая функция относительно переменной $\omega=\sqrt{(\zeta-\xi)\,(\bar\zeta-\bar\xi)}$. В самом деле, мы можем выражение (20) переписать еще в следующем виде:

$$H(\zeta,\bar\zeta,\xi,\bar\xi)=E(\omega)=\sum_{s=0}^{\infty}C_s\,\frac{\omega^{2s}}{s!^2},\qquad C_s=\sum_{l=1}^{s+1}(-)^l\,B_{s+1}^{(l)},\tag{21}$$

Подставляя выражение (21) в формулу (16) мы получим общее представление решений диференциального уравнения (2) для того случая, когда коэфициенты B_k постоянны.

Рассмотрим несколько частных, но практически важных, случаев диференциального уравнения (2) с постоянными коэфициентами.

Пусть

$$B_1 = B_3 = \ldots = B_{k-1} = B_{k+1} = \ldots = B_n = 0, \qquad B_k \neq 0.$$

Тогда диференциальное уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^{2n} U}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} + B_k \frac{\partial^{2(n-k)} U}{\partial z^{n-k} \partial \bar{z}^{n-k}} = G(z, \bar{z}) \tag{22}$$

и мы будем иметь:

$$K_m(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = (-)^m B_k^m \frac{(z-\xi)^{mk-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{mk-1}}{(mk-1)!^2},$$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

$$H(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = \sum_{m=1}^{\infty} (-)^m \frac{B_k^m (z-\xi)^{mk-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{mk-1}}{(mk-1)!^2}. \tag{23}$$

Общее решение диференциального уравнения (22) в силу (15) будет:

$$U(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m B_k^m (z-\xi)^{mk-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{mk-1}}{(mk-1)!^2} \right\} F(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}, \tag{24}$$

где, как и выше, $F(z, \bar{z})$ есть общее регулярное решение уравнения (8) и имеет вид (7), и, следовательно, содержит $2n$ произвольных аналитических функций $\Phi_k(z)$ и $\Psi_k(\bar{z})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В частности, когда $n = k = 1$ и $B_1 = \lambda^2$, диференциальное уравнение (22) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \lambda^2 U = G(z, \bar{z}) \tag{25}$$

и его общее решение, в силу (23), будет:

$$U(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m \lambda^{2m} (z-\xi)^{m-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{m-1}}{(m-1)!^2} \right\} F(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}, \tag{26}$$

где

$$F(z, \bar{z}) = \Phi(z) + \overline{\Psi}(\bar{z}) + \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} G(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi},$$

причем $\Phi(z)$ и $\overline{\Psi}(\bar{z})$—произвольные регулярные функции.

К уравнению (25) при $G(z, \bar{z}) \equiv 0$ сводится уравнение собственных колебаний мембраны и, следовательно, формула (26) дает общее представление решения этого уравнения.

В случае, когда $n = k = 2$, $B_2 = \lambda^4$ и $G \equiv 0$ из (22) будем иметь:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} + \lambda^4 U = 0 \tag{27}$$

и его решение, в силу (24), будет:

$$U(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + \int_0^z d\xi \int_0^{\bar{z}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m \lambda^{4m} (z-\xi)^{2m-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{2m-1}}{(2m-1)!^2} \right\} F(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}, \tag{28}$$

где $F(z, \bar{z})$ есть общее регулярное решение уравнения:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} = 0$$

и, следовательно, имеет вид:

$$F(z, \bar{z}) = \bar{z}\, \Phi_1(z) + z \overline{\Psi}_1(\bar{z}) + \Phi_0(z) + \overline{\Psi}_0(\bar{z}),$$

где Φ_1, $\overline{\Psi}_1$, Φ_0, $\overline{\Psi}_0$—регулярные функции.

К уравнению (27) сводится уравнение собственных поперечных колебаний пластинки.

ALLGEMEINE DARSTELLUNG DER LÖSUNG EINER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG DES ELLIPTISCHEN TYPUS, DIE IN BEZUG AUF DEN LAPLACESCHEN OPERATOR LINEAR IST

Von I. N. VECOUA

Zusammenfassung

Es liege die Differentialgleichung

$$\Delta^n U + \sum_{k=1}^{n} A_k(z_1, z_2) \Delta^{n-k} U = G_0(z_1, z_2) \tag{1}$$

vor, wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$ der Laplacesche Operator ist, $A_k(z_1, z_2)$ und

$G(z_1, z_2)$ vorgegebene Funktionen der beiden komplexen Veränderlichen z_1 und z_2 bedeuten, die im Bereich $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ des vierdimensionalen Raumes regulär sind.

Mittels der Transformation

$$z = z_1 + i z_2, \quad \bar{z} = z_1 - i z_2$$

wird die Gl. (1) auf die Gestalt

$$\frac{\partial^{2n} U}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} + \sum_{k=1}^{n} B_k(z_1, z_2) \frac{\partial^{2(n-k)} U}{\partial z^{n-k} \partial \bar{z}^{n-k}} = G(z, \bar{z}) \tag{2}$$

gebracht, wo

$$B_k(z_1, z_2) = \frac{1}{4^k} A_k\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right), \quad G(z, \bar{z}) = \frac{1}{4^n} G_0\left(\frac{z-\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Es wird folgender Satz bewiesen:

Jede im Bereiche $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ reguläre Lösung $U(z, \bar{z})$ der Differentialgleichung genügt zugleich der Integralgleichung

$$U(z, \bar{z}) + \int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial \xi^{n-k} \partial \bar{\xi}^{n-k}} \left[\frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \bar{\xi}) \right] \right\} U(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [\bar{z}^k \Phi_k(z) + z^k \bar{\Psi}_k(\bar{z})] + \frac{1}{(n-1)!^2} \int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} (z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1} G(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}, \tag{3}$$

wobei $\Phi_k(k)$ und $\bar{\Psi}(\bar{z})$ reguläre Funktionen bedeuten die, den Bedingungen

$$\Phi_k(0) = \Phi_k'(0) = \ldots = \Phi_k^{(k-1)}(0) = 0$$

$$\bar{\Psi}_k(0) = \bar{\Psi}_k'(0) = \ldots = \bar{\Psi}_k^{(k)}(0) = 0$$

genügen und mit Hilfe der vorgegebenen Lösung der Gl. (2) durch folgende Rekursionsformeln bestimmt werden:

$$\Phi_0(z) = U(z, 0), \quad \bar{\Psi}_0(\bar{z}) = U(0, \bar{z}) - \Phi(0),$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k U}{\partial \bar{z}^k}\bigg|_{\bar{z}=0} + \frac{1}{k!} \int_0^{z} \left\{ \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^{k-s}}{\partial \bar{z}^{k-s}} \left[\frac{\partial^{s-1} K(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi})}{\partial \bar{z}^{s-1}} \right]_{\bar{\xi}=\bar{z}} U(\xi, \bar{z}) \right\}_{\bar{z}=0} d\xi$$

$$- \frac{1}{k!} \left[\bar{\Psi}_0^{(k)}(0) + z \bar{\Psi}_1^{(k)}(0) + \ldots + z^{k-1} \bar{\Psi}_{k-1}^{(k)}(0) \right], \tag{4}$$

$$\overline{\Psi}_k(\bar{z}) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k U}{\partial z^k}\bigg|_{z=0} + \frac{1}{k!}\int_0^{\bar{z}} \left\{ \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^{k-s}}{\partial z^{k-s}}\left[\frac{\partial^{s-1}K(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi})}{\partial z^{s-1}}\right]_{\xi=z} U(0, \bar{\xi}) \right\}_{z=0} d\bar{\xi}$$

$$-\frac{1}{k!}\left[\Phi_0^{(k)}(0) + \bar{z}\Phi_1^{(k)}(0) + \ldots + \bar{z}^k\Phi_k^{(k)}(0)\right],$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

mit

$$K(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial \xi^{n-k}\partial \bar{\xi}^{n-k}}\left[\frac{(z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} B_k(\xi, \bar{\xi})\right].$$

Umgekehrt: *Bei beliebigen regulären Funktionen* $\Phi_k(z)$ *und* $\overline{\Psi}_k(\bar{z})$ *ist die Lösung der Integralgl.* (3) *eine im Bereiche* $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ *reguläre Funktion der beiden komplexen Veränderlichen* z *und* $\bar{z}$, *welche der Differentialgl.* (2) *genügt.*

Nach Formel (4) sind $\Phi_k(z)$ und $\overline{\Psi}_k(\bar{z})$ durch die Werte der Funktion $U(z, \bar{z})$ und ihrer partiellen Ableitungen bis zur $n-1$-ten Ordnung einschl. auf den Gebilden $\{z=0, \bar{z}\}$ und $\{z, \bar{z}=0\}$ den s. g. *Charakteristiken* der Diffgl. (2), bestimmt. Indem man somit auf diesen Charakteristiken die obigen Werte der gesuchten Lösung der Diffgl. (2) vorgibt, mit Hilfe von (4) die Funktionen $\Phi_k(z)$ uud $\overline{\Psi}_k(\bar{z})$ bestimmt und sodann die Integralgl. (3) löst, bekommt man eine ganz bestimmte Funktion, die der Diffgl. (2) genügt. Diese Funktion löst zugleich das folgende Problem, das dem Goursatschen analog ist: *Eine Lösung der Diffgl.* (2) *zu finden, die im Bereiche* $\mathfrak{M}^4\{0, 0\}$ *regulär ist und auf den Charakteristiken* $\{z=0, \bar{z}\}$ *und* $\{z, \bar{z}=0\}$ *vorgegebene Werte annimmt, welche mitsamt den Ableitungen bis zur* $n-1$*-ten Ordnung einschl. regulär sind.* Dies Problem besitzt offenbar eine einzige Lösung.

Die Lösung der Integralgl. (3) hat die Gestalt

$$U(z, \bar{z}) = \int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} H(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi})\, F(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi} + F(z, \bar{z}), \tag{5}$$

wobei

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\bar{z}^k\Phi_k(z) + z^k\overline{\Psi}_k(\bar{z})\right]$$

$$+\frac{1}{(n-1)!^2}\int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} (z-\xi)^{n-1}(\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1} G(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi},$$

$$H(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) \tag{6}$$

und

$$K_1(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{2(n-k)}}{\partial \xi^{n-k}\, \partial \bar{\xi}^{n-k}} \left[\frac{(z-\xi)^{n-1} (\bar{z}-\bar{\xi})^{n-1}}{(n-1)!^2} \, B_k(\xi, \bar{\xi}) \right],$$

$$K_m(z, \bar{z}, \xi, \bar{\xi}) = \int_{\xi}^{z} d\xi_1 \int_{\bar{\xi}}^{\bar{z}} K_1(z, \bar{z}, \xi_1, \bar{\xi}_1)\, K_{m-1}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi}_1 \tag{7}$$

$$(m = 2, 3, \ldots).$$

Wir bemerken, dass $F(z, \bar{z})$ die allgemeine Lösung der Diffgl.

$$\Delta^n F = G(z, \bar{z})$$

ist.

Sind die Koeffizienten der Diffgl. (2) konstant, so folgt aus (7) und (6) leicht, mit Hilfe von (5):

$$U(z, \bar{z}) = F(z, \bar{z}) + \int_0^{z} d\xi \int_0^{\bar{z}} E\left(\sqrt{(z-\xi)(\bar{z}-\bar{\xi})}\right) F(\xi, \bar{\xi})\, d\bar{\xi},$$

wobei

$$E(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s \frac{\omega^{2s}}{s!^2}, \qquad C_s = \sum_{l=1}^{s+1} (-)^l B_{s+1}^{(l)}$$

und

$$B_s^{(1)} = B_s,$$

$$B_s^{(m)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k B_{s-k}^{(m-1)}}{(s-k-1)!^2} \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$