ილია ნესტორის ძე ვეკუა

(სამეცნიერო და საზოგადოებრივი მოღვაწეობის მოკლე მიმოხილვა)

ილია ნესტორის ძე ვეკუა ეკუთვნის იმ მოღვაწეთა რიცხვს, რომლებმაც მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს მსოფლიო მეცნიერების საგანძურში. მან წარუშლელი კვალი დატოვა არა მარტო როგორც გამოჩენილმა მეცნიერმა, არამედ როგორ მეცნიერებისა და უმაღლესი განათლების დიდმა ორგანიზატორმაც.

ი. ვეკუა დაიბადა 1907 წლის 23 აპრილს სოფელ შეშელეთში (გალის რაიონი). 1925 წ., ქ. ზუგდიდის საშუალო სკოლის წარმატებით დამთავრების შემდეგ, იგი ჩაირიცხა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, რომელიც დაამთავრა 1930 წ. ამავე წელს სწავლა განაგრძო ლენინგრადში სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ასპირანტურაში. ასპირანტურის წლებში (1930–1933 წწ.) ა. კრილოვის, ნ. მუსხელიშვილისა და ვ. სმირნოვის ხელმძღვანელობით ი. ვეკუა სპეციალისტდება მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებში. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით მან შეისწავლა დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და დინამიკის მრავალი ამოცანა, შექმნა მნიშვნელოვანი შრომები, რომლებიც მიეძღვნა პარალელური ბრტყელი საზღვრების მქონე უსასრულო შრეში დრეკადი ტალღების გავრცელების თეორიას. ეს შრომები საფუძვლად დაედო მის საკანდიდატო დისერტაციას, რომელიც დაიცვა მოგვიანებით (1937 წ.).

1933 წ. შემოდგომიდან ი. ვეკუა მუშაობს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მეცნიერ თანამშრომლის თანამდებობაზე. ამ პერიოდში მათემატიკისა და მექანიკის პრობლემებზე (ნ. მუსხელიშვილის ხელმძღვანელობით) მუდმივმოქმედი სამეცნიერო-კვლევითი სემინარის ერთ-ერთმა აქტიურმა მონაწილემ ი. ვეკუამ თავიდანვე მიიქცია ყურადღება.

თეორიულ და გამოყენებით მათემატიკაში სამეცნიერო მიმართულებათა შორის ი. ვეკუას განსაკუთრებითი იზიდავდა ელისფური ტიპის კერძოწამოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორია და ამ თეორიის სხვადასხვა გამოყენებანი. ამ მიმართულებით წარმოებული ინტენისური გამოკვლევები, 1936 წ. დაწყებული, ორმოციან წლებში დასრულდა ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში ანალიზური კოეფიციენტებიანი ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა მწყობრი თეორიის შექმნით. ასეთი განტოლებების ამონახსნთა ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენები, რომლებიც ი. ვეკუამ ააგო, ხელსაყრელი აღმოჩნდნენ ამ ამონახსნების ახალი თვისებრივი და სტრუქტურული თავისებურებების დასადგენად, აგრეთვე განტოლებათა ფართო კლასისა და სასაზღვრო ამოცანების შესასწავლად, რომლებსაც მანამდე ცნობილი მეთოდები არ შეხებია.

ამ მიმართულებით ი. ვეკუას ნაშრომთა მნიშვნელოვანი ნაწილი თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში „ელიფსურ განტოლებათა ამოხსნის ახალი მეთოდები“, რომელმაც 1950 წელს სსრკ სახელმწიფო პრემია დაიმსახურა.

1939 წ. ი. ვეკუამ დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია, ხოლო 1940 წ. მას პროფესორის წოდება მიენიჭა. 1944 წ. ი. ვეკუა აირჩიეს საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად, ხოლო 1946 წ. – ნამდვილ წევრად.

1940–1944 წწ. ი. ვეკუა იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის დეკანი, 1944–1947 წლებში – პრორექტორი სასწავლო ნაწილში, 1947–1951 წწ. – საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოს-მდივანი.

1951 წ. შემოდგომაზე ი. ვეკუა საცხოვრებად გადავიდა მოსკოვში და მუშაობა დაიწყო ცენტრალური აეროჰიდროდინამიკის ინსტიტუტის ლაბორატორიის გამგედ; პარალელურად იყო მოსკოვის ფიზიკა-ტექნიკის ინსტიტუტის თეორიული მექანიკის კათედრის გამგე. 1952 წ. ბოლოს იგი აირჩიეს მოსკოვის ლომონოსოვის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დიფერენციალურ განტოლებათა კათედრის პროფესორად, ხოლო 1954 წ. დანიშნეს სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის სტრელკოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დირექტორის მოადგილედ.

მოსკოვში ი. ვეკუამ გამოაქვეყნა შრომათა დიდი ციკლი განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში. ასეთ ფუნქციათა თეორიის აგების ცდა ჯერ კიდევ მეცხრამეტე საუკუნეში დაიწყო იტალიელმა მათემატიკოსმა ე. ბელტრამიმ. ოცდაათიანი წლების დასაწყისში ტ. კარლემანმა და ნ. თეოდორესკუმ აჩვენეს, რომ ერთი კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციათა ბევრი თვისება გადაიტანება, ორი დამოუკიდებელი ნამდვილი ცვლადის შემთხვევაში, პირველი რიგის ელიფსური ტიპის ორი დიფერენციალური განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის ამოხსნაზე. ი. ვეკუამ შექმნა ზოგადი თეორია ისეთი სისტემებისა, რომლებიც ამჟამად წარმოადგენენ განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ძირითად შემადგენელ ნაწილს. თავისივე დადგენილი თეორემების გამოყენებით მან მიიღო მ. ლავრენტიევის მიერ აგებულ ბრტყელ არეთა კვაზიკონფორმულ ასახვათა გეომეტრიული თეორიის ანალიზური დასაბუთება, რაც უკანასკნელ ორმოცდაათწლეულში აღიარებულია ფუნქციათა თეორიის ერთ-ერთ საუკეთესო მიღწევად. პირველი რიგის ელიფსურ სისტემათა თეორიის შედეგები, რომლებიც ი. ვეკუამ დაადგინა, შევიდა მის მონოგრაფიაში – „განზოგადებული ანალიზური ფუნქციები“, რომელსაც 1963 წ. ლენინური პრემია მიენიჭა.

მოსკოვში ყოფნისას ი. ვეკუამ უშუალო მონაწილეობა მიიღო სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების დაარსების პროექტის შემუშავებაში. იგი იყო ერთ-ერთი აქტიური წევრი მ. ლავრენტიევის მეთაურობით შექმნილი საინიციატივო ჯგუფისა, რომელიც სათავეში ჩაუდგა პარტიისა და მთავრობის გადაწყვეტილების

შესაბამისად ჩვენი ქვეყნის აღმოსავლეთში დიდი სამეცნიერო ცენტრის ორგანიზაციის განხორციელებას.

1957 წ. შეიქმნა სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილება. 1958 წლის მარტში, მ. ლავრენტიევის თავმჯდომარეობით, აირჩიეს სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების პრეზიდიუმი, რომლის წევრი ი. ვეკუაც იყო. ამავე წელს ი. ვეკუა აირჩიეს სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრად.

1959 წ. ნოვოსიბირსკის მახლობლად, აკადემ-ქალქში გაიხსნა ნოვოსიბირსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, რომლის პირველი რექტორი 1965 წლამდეი. ვეკუა იყო. შეთავსებით იგი ხელმძღვანელობდა სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის ციმბირის განყოფილების ჰიდროდინამიკის ინსტიტუტის თეორიულ განყოფილებას.

1965 წლის გაზაფხულზე საქართველოს სსრ ხელმძღვანელი ორგანოების მოწვევით ი.ვეკუა დაბრუნდა მშობლიურ საქართველოში. ჯერ მუშაობდა მეცნიერებათა აკადემიაში, 1965-დან 1972 წლამდე იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი, ხოლო 1972 წლიდან სიცოცხლის ბოლომდე – საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტი.

ი. ვეკუა მაღალი მოქალაქეობრივი და სულიერი თვისებებით გამოირჩეოდა. ხშირად აღტაცებას და გაკვირვებას იწვევდა მისი მტკიცე, ვაჟკაცური და თავშეკავებული ქცევა რთულ მდგომარეობაში. მძიმე, უკურნებელი სენით დაავადებული მეცნიერი შეუპოვრად განაგრძობდა კვლევა-ძიებით მუშაობას დრეკად გარსთა მათემატიკური თეორიის ახალი ვარიანტის შესაქმნელად, რომელიც შევიდა მისი გარდაცვალების შემდეგ გამოქვეყნებულ მონოგრაფიაში „გარსთა თეორიის სხვადასხვა ვარიანტის აგების ზოგიერთი ზოგადი მეთოდი“ (მოსკოვი, 1982 წ.), რომელსაც 1984 წ. სახელმწიფო პრემია მიენიჭა. ამ მონოგრაფიის ინგლისური თარგმანი 1985 წ. გამოსცა „პიტმანის“ გამომცემლობამ.

ი. ვეკუას სამეცნიერო შრომებმა საერთაშორისო აღიარება მოიპოვეს. იგი იყო უცხოელი წევრი გერმანიის დემოკრატიული რესპუბლიკის მეცნიერებათა აკადემიის (ქ. ბერლინი), გერმანიის საბუნებისმეტყველო აკადემიის „ლეოპოლდინას“ (ქ. ჰალე), პალერმოს (სიცილიის მეცნიერებათა აკადემია) მეცნიერების, ლიტერატურისა და ხელოვნების აკადემიისა, პოლონეთის თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის საზოგადოების, გამოყენებითი მათემატიკისა და მექანიკის დანიის ცენტრისა და სხვა სამეცნიერო საზოგადოებებისა. არჩეული იყო თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის საერთაშორისო კავშირის გენერალური ანსამბლეის წევრად. მინიჭებული ჰქონდა ჰალეს უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორის და იენის უნივერსიტეტის საპატიო სენატორის წოდებები.

პარტიამ და მთავრობამ დიდად დააფასა ი. ვეკუას ღვაწლი. მის მრავალ ჯილდოს შორის აღსანიშნავია სოციალისტური შრომის გმირის ოქროს ვარსკვლავი და ხუთი ლენინის ორდენი.

ი. ვეკუა გარდაიცვალა 1977 წლის 2 დეკემბერს. მადლიერმა ქართველმა ხალხმა იგი საქართველოს ღირსეულ შვილთა სავანეს – მთაწმინდის მიწას მიაბარა.

ქვემოთ მოკლედ შევჩერდებით ი. ვეკუას მდიდარი მეცნიერული მემკვიდრეობის მხოლოდ დამახასიათებელ მომენტებზე, რომლებმაც დიდი გავლენა მოახდინეს მათემატიკის სათანადო პრობლემათა განვითარებაზე.

ელიფსური განტოლებებისათვის ე. წ. არაფრედჰოლმის ტიპის ამოცანების თანამედროვე თეორიაში გამოსავალ წყაროს წარმოადგენს ერთი კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციებისათვის ზოგადი წრფივი სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც ი. ვეკუამ ყოველმხრივ შეისწავლა.

რიმანისა და ჰილბერტის სახელებთან დაკავშირებულია ფუნქციათა თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა: განვსაზღვროთ D არეში Φ ანალიზური ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$Re[\lambda(t)\Phi + (t)] = g(t), t \in \partial D, \tag{1}$$

სადაც λ და g – D არის δD საზღვარზე მოცემული ფუნქციები, $\Phi^{+}(t)$ საძიებელი ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობაა, როცა z $\rightarrow t\ D$ *არიდან*.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t), \Phi(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

მაშინ (1) ამოცანა დაიყვანება დახრილი წარმოებულის ამოცანაზე ანუ პუანკარეს ამოცანაზე: D არეში განვსაზღვროთ ისეთი u(x, y) ჰარმონიული ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y} = g(t), t = x + iy \in \partial D. \tag{2}$$

(1) და (2) ამოცანების გამოკვლევასთან დაკავშირებით განხილულია შემდეგი სახის ერთგანზომილებიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$A\varphi(t) = \alpha(t)\varphi(t) + \beta(t)S\varphi(t) + T\varphi(t) = f(t), t \in \partial D, \tag{3}$$

სადაც S კოშის სინგულარული ოპერატორია

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, t \in \partial D,$$

ხოლო T – ფრედჰოლმის ინტეგრალური ოპერატორი.

(3) ტიპის განტოლებათა თეორიაში ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია მისი დაყვანა ფრედჰოლმის მეორე გვარის ეკვივალენტურ განტოლებაზე (ეკვივალენტური რეგულარიზაციის ამოცანა). სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში ამ საკითხია გადაჭრა ი. ვეკუას ბრწყინვალე შედეგად ითვლება. ორმოციან წლებში ი. ვეკუამ კარლემანის ერთი იდეის განვითარების გზით კლასიკურ შეზღუდვებში შეიმუშავა (3) ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის აგების გზა, რომელიც ამჟამად კარლემან-ვეკუას მეთოდის სახელწოდებითაა ცნობილი. ეს მეთოდი სამი ეტაპისაგან შედგება: 1) ეფექტურად იგება მახასიათებელი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისა (ე. ი (3) განტოლების, სადაც T = 0) და მასთან მიკავშირებული განტოლების ამონახსნები. 2) ამ ამონახსნების მეშვეობით ხდება (3) განტოლებისა და მასთან მიკავშირებული განტოლების ეკვივალენტური რეგულარიზაცია; 3) ასე აგებულ ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა გამოყენებით მტკიცდება ნეტერის თეორემები (3) განტოლებისათვის.

რეგულარიზაციის ამოცანის ამოსახსნელად, გარდა ზემოაღნიშნული მეთოდისა, არსებობს კიდევ რეგულარიზაციის მეთოდი ოპერატორთა გადამრავლების გზით. ამ მეთოდის იდეა შემდეგში მდგომარეობს. საჭიროა აიგოს A ტიპის (იხ. (3) B ოპერატორი ისე, რომ განტოლება BAφ = Bf აღმოჩნდეს ფრედჰოლმისეული. ამ შემთხვევაში B-ს უწოდებენ A ოპერატორის მარცხენა რეგულარიზატორს. თუ განტოლებები Aφ = f და BAφ = Bf ერთმანეთის ეკვივალენტურია, როგორიც არ უნდა იყოს f ფუნქციათა განხილული კლასიდან, მაშინ B ოპერატორს ეწოდება A ოპერატორის მარცხენა ეკვივალენტური რეგულარიზატორი. ცნობილი იყო, რომ ასეთი ოპერატორი ყოველთვის არ არსებობდა. ამასთან დაკავშირებით გაჩნდა კითხვა: ხომ არ შეიძლება (3) განტოლების ეკვივალენტური ფრედჰოლმის განტოლების აგების ამოცანა ისეთნაირად დაისვას, რომ მას ყოველთვის ჰქონდეს ამოხსნა? ი. ვეკუამ ამ კითხვას დადებითი პასუხი გასცა. მან დაამტკიცა, რომ არსებობს B ოპერატორი, რომელიც აგებულია ეფექტურად კვადრატურებში და ამასთან ან Aφ = f და BAφ = Bf განტოლებებია ეკვივალენტური, ან ეკვივალენტურია Aφ = f და ABϕ = f განტოლებები იმ აზრით, რომ თუ ერთ-ერთი მათგანი ამოხსნადია, მაშინ ამოხსნადია მეორეც და მათ ამოხსნებს შორის არსებობს კავშირი φ =Bϕ.

(3) განტოლებისათვის აგებული თეორიის გამოყენებით ი. ვეკუამ მოახერხა (1) ამოცანის ამომწურავი ამოხსნა შემდეგი ზოგადი დასმით: D არეში, რომლის δD საზღვარი საკმაოდ გლუვი, მარტივი, ჩაკეტილი წირია, განვსაზღვროთ Φ ანალიზური ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$Re\sum_{k=0}^{m}\{\lambda_k(t)[\Phi^{(k)}(t)]+T_k[(\Phi^{(k)})+]\}=f(t),\ t\in\partial D, \quad (4)$$

სადაც $(\Phi^{(\kappa)})^{+}$არის Φ ფუნქციის κ-ური რიგის წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობა D არედან, λ_κ და f მოცემული ფუნქციებია δD საზღვარზე, ხოლო T_κ – ფრედჰოლმის ინტეგრალური ოპერატორი.

(4) ამოცანის გამოკვლევაში მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ანალიზური ფუნქციებისათვის სპეციალურმა ინტეგრალურმა წარმოდგენამ, რომელიც პირველად ი. ვეკუამ მიიღო და ატარებს მის სახელს.

(4) ამოცანასთან დაკავშირებით დადგენილი ი. ვეკუას შედეგები საფუძველი გახდა მისი სხვა გამოკვლევებისა, რომლებიც მიეძღვნა ნორმალურად ამოხსნადი სასაზღვრო ამოცანების

თეორიის აგებას შემდეგი მეორე რიგის ელიფსური ტიპის დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში:

$$\Delta u + a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_3(x,y)u = 0, \tag{5}$$

სადაც a_1, a_2, a_3– ანალიზური ფუნქციებია. ეს ამოცანები წარმოადგენენ (5) განტოლების შემთხვევაში (2) პუანკარეს სასაზღვრო ამოცანის არსებით განზოგადებას. მართლაც, სასაზღრო პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sum_{j+k\leq m} a_{jk}(t)\left[\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k}u}{\partial x^j \partial y^k}\right)\right] = f(t), t \in \partial D, \tag{6}$$

სადაც a_{jk}, fცნობილი ნამდვილი ფუნქციებია δD-ზე განსაზღვრული, T_{jk} ფრედჰოლმის ინტეგრალური ოპერატორებია.

ამ ამოცანის თეორიის აგების დროს ი. ვეკუამ არსებითად გამოიყენა (5) განტოლების ყველა რეგულარული ამოხსნის შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა.

$$u(x,y) = Re\left[\alpha(z,\bar{z})\varphi(z) + \int_0^z \beta(z,\bar{z},t)\varphi(t)dt\right], \tag{7}$$

სადაც φ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციაა, ხოლო α, β ფუნქციები აგებულია a_1, a_2, a_3კოეფიციენტების საშუალებით.

(7) ფორმულის მსგავსი ფორმულები მიღებული ჰქონდათ ტ. კარლემანს, ჰ. ლევის და ს. ბერგმანს. (7) ფორმულის აგების მეთოდი, რომელიც რიმან-ვეკუას სახელს ატარებს, ითვლება ყველაზე უფრო მარტივ, მკაფიო და კონსტრუქციულ მეთოდად.

ი. ვეკუამ (7) ფორმულა განაზოგადა მეორეზე უფრო მაღალი რიგის შემდეგი ელისფური განტოლებისათვის:

$$\Delta^n u + \sum_{k=1}^n L_k\left(\Delta^{n-k}u\right) = 0, \tag{8}$$

სადაც L_kანალიზურ კოეფიციენტებიანი к-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური ოპერატორია. მიღებული ფორმულების გამოყენებით ი. ვეკუამ საკმარისი სისრულით გამოიკვლია პირველი სასაზღვრო ამოცანა: განვსაზღვროთ მარტივადბმულ D არეში (8) განტოლების რეგულარული ამონახსნი, რომელიც შემდეგ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს:

$$\left.\frac{d^j u}{d\nu^j}\right|_{\partial D} = f_j, j = 0,1,\ldots,n-1,$$

სადაც ν –δD კონტურის გარე ნორმალია. ელიფსური განტოლებების ამონახსნების ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენების თეორიაში ყველაზე მნიშვნელოვანია ი. ვეკუას მიერ აღმოჩენილი ფაქტი, რომ შესაძლებელია (8) განტოლებისათვის ნებისმიერი სასაზღვრო ამოცანის ეკვივალენტური რედუქცია ანალიზურ ფუნქციათა სისტემის შესაბამის სასაზღვრო ამოცანაზე.

კარგად ცნობილია, რომ z = x + iy კომპლექსური ცვლადის Φ (z) = u(x, y) + iυ(x, y) ანალიზურ ფუნქციათა თეორია კოში-რიმანის სისტემის

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

თეორიას წარმოადგენს, ეს სისტემა კერძო შემთხვევაა შემდეგი ელიფსური სისტემისა:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0,\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu=dv=0, \tag{9}$$

სადაც a, b, c, d კოეფიციენტები ნამდვილი x, y ცვლადების ნამდვილ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $W(z)=u+iv, 2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}, 4A=a+d+i(c-b), 4B=a-d+i(c+b)$,

სისტემა (9) შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}+AW+B\bar{W}=0 \tag{10}$$

ჯერ კიდევ გასულ საუკუნეში ბელტრამი და პიკარი შეეცადნენ აეგოთ W(z) განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორია. ამ მიმართულებით მნიშვნელოვანი შედეგები მიიღეს ტ. კარლემანმა და მ. ლავრენტიევმა. ი. ვეკუას გამოკვლევათა ვრცელ ციკლში დადგენილია საფუძვლიანი შედეგები, რომლებიც ძირითადი შემადგენელი ნაწილია იმ ფუნქციათა თანამედროვე თეორიისა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}-q_1\frac{\partial F}{\partial z}-q_2\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}+AF+B\bar{F}=0 \tag{11}$$

თუ $|q_1| + |q_2| < 1$, მაშინ (11) განტოლება არის კომპლექსური ფორმით ჩაწერილი ორი განტოლებისაგან შედგენილი წრფივი ელიფსური სისტემა F ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების მიმართ. აგებულ თეორიაში ცნობილი ფუნქციები q_1, q_2, A, B უნდა აკმაყოფილებდნენ სიგლუვის საკმარისად ზოგად პირობებს.

ი. ვეკუამ მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მეტაჰარმონიული ფუნქციების თეორიაში, რომელიც წარმოადგენს ჰელმჰოლცის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}+\lambda^2 u=0, \lambda=const, p\geq 2 \tag{12}$$

განტოლების ამონახსნს. მან მოგვცა მეტაჰარმონიული ფუნქციების შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა

$$u(x_1,x_2,\dots,x_p)=u_0(x_1,\dots,x_p)-$$
$$-\int_0^1 u_0(x_1t,\dots,x_pt)t^q\frac{\partial}{\partial t}I_0(\lambda r\sqrt{1-t})dt,$$

სადაც u_0 ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქციაა, $q = \frac{p-2}{2}, r^2 = x_1^2 + \cdots + x_p^2$, I_0 ბესელის ფუნქციაა. მანვე ააგო ამ ფორმულის შექცეული ინტეგრალური წარმოდგენა და, გარდა ამისა, როცა λ ნამდვილი რიცხვია, აჩვენა, რომ ზომერფელდის პირობებიდან

$$\frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u = 0\left(r^{-q-1/2}\right), u = O(r^{-q-1/2})$$

რომლებიც უზრუნველყოფენ (12) განტოლების შემთხვევაში დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას გარე არეში, მეორე პირობა პირველის შედეგია.

ი. ვეკუამ აჩვენა, რომ წრფივი ელიფსური ტიპის გატოლებათა ამონახსნების აგებისათვის მისი მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი არაწრფივი ელიფსური ტიპის განტოლებათა ამონახსნების თვისებების შესასწავლად, ასე მაგალითად, მან შეისწავლა გაუსის განტოლების $\Delta \log u(x, y) = -2K(x, y)$ სამონახსნების თვისებები, რამაც საშუალება მისცა მიეგნო დ. ჰილბერტის ცნობილი თეორემის მარტივი დამტკიცებისათვის, რომ არ არსებობს ისეთი უარყოფითი სიმრუდის მქონე რეგულარული ზედაპირი, რომელიც კონფორმულად ჰომეომორფულია მთელი სიბრტყისა.

ფართოა ი. ვეკუას ზემოაღნიშნული თეორიული შედეგების დიაპაზონი. ელიფსური განტოლებების კვლევის ვეკუასეულ მეთოდებზე დაყრდნობით შეიქმნა დრეკად გარსთა მწყობრი თეორია. კერძოდ, მან თვითონ წამოაყენა ამ თეორიის ორი ვარიანტი, რომელთაგან პირველი გამოიყენება თხელი დამრეცი გარსის შესასწავლად, ხოლო მეორე – გარსთა უმომენტო თეორიის ასაგებად.

ნიშანცვლადი გაუსის სიმრუდის მქონე გარსთა უმომენტო თეორიაში მთავარია შერეული ტიპის განტოლებები. ეს განტოლებები ზოგიერთ შემთხვევაში დაიყვანებიან ცნობილ, მოდელური სახის შერეული ტიპის განტოლებებზე, კერძოდ, ჰოლმგრენ-გელერსტეტის განტოლებაზე

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(სადაც $m \geq 0$ მთელი რიცხვია) და ლავრენტიევ-ბიწაძის განტოლებაზე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

რომელთათვისაც ტრიკომის ამოცანა და მისი სხვადასხვა განზოგადება იძენს სავსებით გარკვეულ მექანიკურ და გეომეტრიულ აზრს. ამ ფაქტმა, რომელიც ი. ვეკუამ აღმოაჩინა ორმოცდაათიანი წლების შუახანებში, დიდი ინტერესი გამოიწვია მათემატიკოსებსა და მექანიკოსებს შორის, რადგან მანამდე შერეული ტიპის განტოლებები გამოიყენებოდა მხოლოდ აეროდინამიკის ამოცანებში.

ი. ვეკუას ღრმა და მნიშვნელოვანმა გამოკვლევებმა, მისმა აღმოჩენილმა ახალმა სამეცნიერო მიმართულებებმა ის ჩვენი დროის დიდ მეცნიერთა რიგებში ჩააყენეს.

ა. ბ ი წ ა ძ ე, ბ. ხ ვ ე დ ე ლ ი ძ ე