

К вопросу вычисления трансформант поля аномалии силы тяжести с использованием разложения поля в ряды Фурье

К. М. Картвелишвили, А. С. Габуния, П.Ш. Миндели, Г.Г. Джаши,

Т.А. Гванцеладзе, Д.В. Капанадзе

Исходя из установленного факта приуроченности объектов полезных ископаемых к определенному классу геологических структур, задачей геофизических исследований является выявление и прослеживание в плане и по глубине зон разломов в осадочном чехле, блокового строения фундамента, тектонических нарушений и других неоднородностей геологической среды. Для решения этой задачи весьма актуальной является развитие направлений методов интерпретации, не требующих привлечения дополнительной информации. Одним из инструментов решения этого направления является нахождение особых точек потенциальных полей, несущих важную информацию о размещении неоднородностей в разрезе.

Для нахождения особых точек гравитационного поля разработаны специальные методы, базирующиеся на принципиально разных подходах [1-8]. Наиболее широкое распространение определения положения особых точек в практике нефтяной геофизики получил метод В. М. Березкина [3], основанный на нахождении экстремумов аналитически продолженного в нижнее полупространство двумерного полного нормированного градиента силы тяжести (ПНГ)

$$G_H(x, z) = \frac{G(x, z)}{\bar{G}(x, z)}, \quad (1)$$

где $G(x, z) = \sqrt{V_x^2(x, z) + V_z^2(x, z)}$ - модуль полного градиента, $\bar{G}(x, z)$ - среднее значение модуля полного градиента из M точек на профиле длиной L .

Используемый при этом математический аппарат аналитического продолжения поля $V_z(x, z)$ основан на применении рядов Фурье либо по синусам, либо по косинусам

$$V_z(x, z) = \sum_{n=1}^N B_n \cdot \sin \frac{\pi n}{L} \cdot e^{\frac{\pi n}{L} \cdot z}; \quad V_z(x, z) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos \frac{\pi n}{L} \cdot e^{\frac{\pi n}{L} \cdot z}, \quad (2)$$

где: B_n, A_n - коэффициенты рядов Фурье, вычисляемые приближенным интегрированием

$$\text{выражений } B_n = \frac{2}{L} \int_0^L V_z(x, 0) \sin \frac{\pi n}{L} x dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L V_z(x, 0) \cos \frac{\pi n}{L} x dx, \quad (3)$$

n - текущий номер гармоники; N - число используемых гармоник; $q = \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{L}}{\frac{\pi n}{L}} \right)^\mu$ -

коэффициент сглаживания.

Метод ПНГ нашел широкое применение не только в гравиразведке, но и в магниторазведке, электроразведке и сейсморазведке. Подтверждением к сказанному

следует считать то, что в исследованиях по разведочной геофизике работы В. М. Березкина и его последователей пользуются широкой цитируемостью.

Однако, возникает вопрос относительно возможности существования таких трансформант гравитационного поля, которые наряду с $G_H(x, z)$ могут служить критерием определения особых точек.

В работе [9] показано, что такими трансформантами являются аналитически продолженные в нижнее полупространство нормированные значения как самого наблюдаемого поля аномалии силы тяжести V_z , так и его производных $V_{zx}, V_{zz}, V_{zzz}, \dots, V_{zzz}$. Последние получаются на основе дифференцирования выражений (2).

Ясно, что независимо от вида трансформанты, во всех случаях необходимо вычислять коэффициенты B_n или A_n на основе исходного (наблюдаемого) поля аномалии силы тяжести $V_z(x, 0)$. При этом, от точности вычисления коэффициентов зависит как точность восстановления исходной функции, так и точность вычисления производных с помощью рядов Фурье.

Ниже дается решение оценки как точности вычисления коэффициентов рядов Фурье, так и точности восстановления исходного поля и вычисления его производных, в зависимости от вида и точности задания исходного поля на основе математического моделирования.

В ранних исследованиях В.М. Березкина, который использовал ряды Фурье по синусам, для приближенного вычисления интеграла (3), применялся метод трапеций. В дальнейшем начали использовать более точный метод вычисления B_n по Филону, который предназначен для интегрирования быстро осциллирующих функций типов $f(x)\sin kx$ и $f(x)\cos kx$. В пользу преимущества использования рядов Фурье по синусам В. М. Березкин приводит следующий факт: «При расчетах может использоваться или только ряд синусов, или только ряд косинусов. Ряд синусов при условии равенства исходной функции $V_z(x, 0)$ нулю на концах участка $(-L, L)$ или L , сходится быстрее, чем ряд косинусов. Достижение указанного условия осуществляется вычитанием из исходной функции линейного двучлена $a+bx$, где a - значение функции $V_z(x, 0)$ в начальной точке участка V_{zn} (обычно слева), $b = (V_{zk} - V_{zn})/L$, V_{zk} - значение $V_z(x, 0)$ в конечной точке участка (справа)» [3 стр.39].

В целом ряде поздних работ других исследователей указывается на необходимость нуления исходной функции на концах участка не только при использовании рядов по синусам, но и по косинусам. Однако, следует подчеркнуть, что указанное нуление приводит к искажению (изменению) исходного поля. А это значит, что определение по искаженному (в дальнейшем - нуленному) полю положения особой точки не будет соответствовать реальной картине.

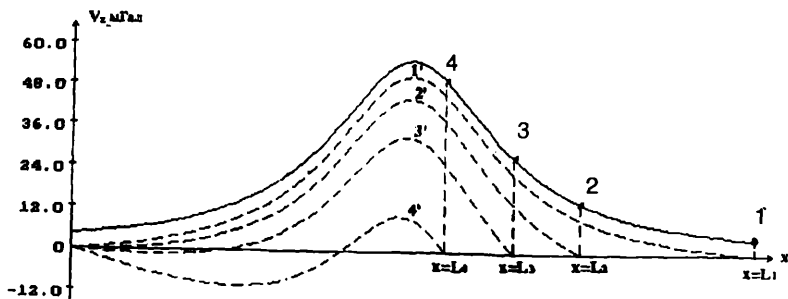


Рис. 1

Поводом такого утверждения следует считать пример приведенный на рис. 1, на котором даны кривые V_z кругового цилиндра. Сплошной кривой даны значения поля V_z на участках длиной $L_1 = 20$ км (симметричное поле - 1), и $L_2 = 15$ км, $L_3 = 13$ км, $L_4 = 11$ км (несимметричные поля - 2, 3, 4). Пунктирными кривыми даны соответствующие этим участкам онуленные кривые - 1', 2', 3', 4'. Как видно процесс онуления приводит к заметному изменению исходных (не онуленных) полей, вплоть до изменения знака кривой, в зависимости от длины участка.

Пусть на плоскости $z=0$ имеем симметричное и несимметричное поля $V_z(x, z)$. При этом под симметричным и несимметричным полями понимается - в первом случае равенство значений V_z на концах участка ($V_{zn} = V_{zk}$), а во втором случае их неравенство ($V_{zn} \neq V_{zk}$). Последнее достигается обрезанием части симметричного поля справа. Далее путем вычета из наблюдаемых полей (симметричного и несимметричного) двучлена $(a+Bx)$ проводим их онуление на концах участка. В итоге, будем иметь четыре вида поля: 1) симметричное без онуления - $V_{z(1)}$; 2) симметричное с онулением - $V_{z(1,0)}$; 3) несимметричное без онуления - $V_{z(2)}$; 4) несимметричное с онулением $V_{z(2,0)}$;

Процесс моделирования проводится в два этапа и заключается в следующем.

На первом этапе:

1. для всех видов полей вычисляются коэффициенты B_n и A_n по точным аналитическим формулам, которые сравниваются с соответствующими значениями, вычисленных по формуле Филона, на основе исходных полей -

$$V_{z(1)}, V_{z(1,0)}, V_{z(2)}, V_{z(2,0)};$$

2. оцениваются относительные погрешности вычисления B_n и A_n в процентах в зависимости от порядка коэффициента n ;
3. оцениваются как относительные, так и средние квадратические погрешности восстановления исходного поля и вычисления его производных.

Практически исходное наблюдаемое поле в точках участка задано с определенной погрешностью ϵ , что обуславливает погрешность вычисления коэффициентов рядов Фурье. Для оценки указанной погрешности исходное поле возмущали нормальным распределением случайных величин. Диапазон случайных величин меняли в

пределах (0.1 - 0.2)% от максимального значения $V_z(x, 0)$.

На втором этапе проводятся исследования, аналогичные первому этапу, на основе возмущенных полей $V'_{z(1)}, V'_{z(1,0)}, V'_{z(2)}, V'_{z(2,0)}$.

На рис. 2 приведены кривые полей аномалий силы тяжести в зависимости от вида поля.

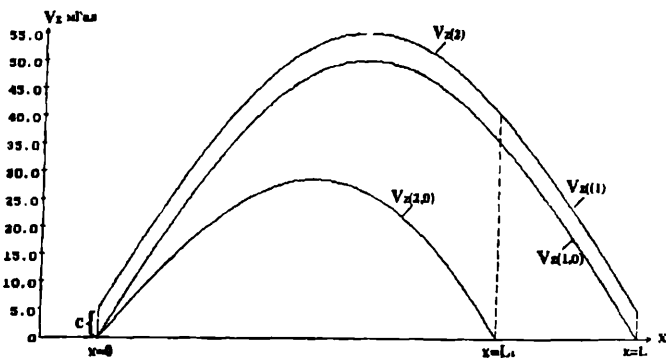


Рис. 2

$V_{z(1)}$ - симметричное исходное поле без онуления; $V_{z(1,0)}$ - онуленное симметричное поле; $V_{z(2)}$ - несимметричное исходное поле без онуления; $V_{z(2,0)}$ - онуленное несимметричное поле.

Для оценки точности вычисления коэффициентов B_n и A_n по формуле Филона, в зависимости от вида исходного поля и точности его задания, необходимо иметь точные аналитические формулы для их вычисления. В общем случае эту задачу решить невозможно даже для кругового бесконечного горизонтального цилиндра (наиболее простая форма аномалиеобразующего тела) коэффициенты B_n и A_n могут быть вычислены лишь по приближенным квадратурным формулам. Поэтому для получения точных аналитических формул для вычисления B_n и A_n в качестве поля аномалии силы тяжести приняли поле функции (тестовая функция)

$$V_z(x, z) = k \sin \frac{\pi}{L} x + c, \quad (4)$$

где: k - постоянная, L - длина профиля (участок задания функции), c - постоянная, характеризующая уровень функции, x - координата точки вычисления функции в интервале $(0, L)$.

Пусть несимметричное исходное поле $V_{z(2)}$ задано в интервале $(0, L_1)$ (Рис. 2). Для онуления этого поля на концах профиля вычтем из $V_{z(2)}$ двучлен вида:

$$a + bx. \quad (5)$$

Здесь:

$a = V_{z(2)H}$ - значение поля в начальной точке профиля, а

$$b = \frac{V_{z(2)K} - V_{z(2)H}}{L_1}, \quad (6)$$

где $V_{z(2)K}$ - значение поля в конечной точке профиля.

С учетом (5) и (6) онуленное поле в произвольной точке x , в интервале $(0, L_1)$, будет

$$V_{z(2,0)}(x,0) = k \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{k}{L_1} x \sin \frac{\pi L_1}{L} \quad (7)$$

Исходя из (3) запишем общее интегральное выражение для коэффициентов B_n

$$B_n = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} \left(k \sin \frac{\pi}{L} x + c \right) \sin \frac{\pi n}{L_1} x dx \quad (8)$$

которое сводится к вычислению двух интегралов

$$B_n = \frac{2}{L_1} \left[k \int_0^{L_1} \sin \frac{\pi}{L} x \cdot \sin \frac{\pi n}{L_1} x dx + c \int_0^{L_1} \sin \frac{\pi n}{L_1} x dx \right]. \quad (9)$$

После интегрирования и несложных выкладок получаем формулу для вычисления B_n для несимметричного поля без онуления

$$B_n = \frac{2kL^2}{\pi} \frac{n}{(L_1^2 - L^2 n^2)} \cos \pi n \cdot \sin \frac{\pi L_1}{L} + \frac{2c}{\pi n} (1 - \cos \pi n). \quad (10)$$

Чтобы получить выражение для B_n^0 с онулением исходного поля достаточно вычесть из (9) интеграл

$$\frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} (a + bx) \sin \frac{\pi n}{L_1} x dx, \quad (11)$$

с учетом (5) и (6).

Окончательно, формула для выражения B_n^0 для несимметричного поля без онуления будет

$$B_n^0 = \frac{2k}{\pi n} \frac{L_1^2}{(L_1^2 - L^2 n^2)} \cos \pi n \cdot \sin \frac{\pi L_1}{L}. \quad (12)$$

Рассмотрим частный случай симметричного поля без онуления. Для этого достаточно взять в (10) $L_1 = L$ и тогда

$$B_n = \frac{2c}{\pi n} (1 - \cos \pi n). \quad (13)$$

Из (13) следует, что для симметричного поля с онулением ($c=0$) все коэффициенты разложения B_n равны нулю. А это значит, что разложение в ряд Фурье невозможно, что противоречит физической сущности. Поэтому для вычисления первого коэффициента разложения B_1 следует в выражении (8) взять $L_1 = L$ и $n=1$.

Будем иметь

$$B_1 = \frac{2}{L} \int_0^L \left(k \sin \frac{\pi}{L} x + c \right) \sin \frac{\pi}{L} x dx. \quad (14)$$

После интегрирования получаем формулу для вычисления коэффициента B_1 для симметричного поля без онуления

$$B_1 = k + \frac{4c}{\pi} \quad (15)$$

Для симметричного поля с онулением ($c=0$)

$$B_1^0 = k. \quad (16)$$

Аналогично (8), общее интегральное выражение для коэффициентов A_n , разложения в ряд Фурье по косинусам имеет вид

$$A_n = \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} (k \sin \frac{\pi}{L} x + c) \cos \frac{\pi n}{L_1} x dx. \quad (17)$$

Проведя выкладки, аналогичные вычислению коэффициентов B_n , выпишем окончательные формулы для коэффициентов A_n несимметричного поля:

без онуления

$$A_n = \frac{2kLL_1}{\pi(L^2n^2 - L_1^2)} \left[\cos \pi n \cdot \cos \frac{\pi L_1}{L} - 1 \right], \quad (18)$$

с онулением

$$A_n^0 = \frac{2kL_1L}{\pi(L^2n^2 - L_1^2)} \left[\cos \pi n \cdot \cos \frac{\pi L_1}{L} - 1 \right] - \frac{2k}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi L_1}{L} (\cos \pi n - 1). \quad (19)$$

Для нулевого коэффициента ($n=0$) A_0 несимметричного поля без онуления имеем

$$A_0 = -\frac{2kL}{\pi L_1} \left(\cos \frac{\pi L_1}{L} - 1 \right) + 2c, \quad (20)$$

а с онулением

$$A_0^0 = -\frac{2kL}{\pi L_1} \left(\cos \frac{\pi L_1}{L} - 1 \right) - k \sin \frac{\pi L_1}{L}. \quad (21)$$

Коэффициенты A_n для симметричного поля получаются из (18) - (21) взяв в них $L_1 = L$.

Получив необходимые точные аналитические формулы, приведем результаты расчетов точности вычисления коэффициентов в зависимости от вида поля и погрешности задания исходного поля.

Значения Δg задавались в дискретных точках с шагом $\Delta x = 0.2$ км на профиле длиной $L = 20$ км для симметричного поля и $L_1 = 15$ км для несимметричного поля. Максимальное число коэффициентов соответственно составляло $n = 100$ и $n_1 = 75$.

В табл. 1 -4 приведены результаты вычисления коэффициентов B_n и A_n в зависимости от вида исходного поля N - номер пикета; Δg^T - точное значение поля; Δg^B - значение возмущенного поля; n - номер коэффициента; B_n^T и A_n^T -точное значение коэффициентов; $B_n^{H/B}$ и $A_n^{H/B}$ - значения коэффициентов, вычисленных по точному полю; B_n^B и A_n^B - значения коэффициентов, вычисленных по возмущенному полю; $\epsilon_n^{H/B}$ - относительная погрешность вычисления коэффициентов по точному полю;

ε_n^B - относительная погрешность вычисления коэффициентов по возмущенному полю.

С целью характеристики всего спектра значений коэффициентов в таблицах 2-4 значения коэффициентов приведены в определенных интервалах n .

Результаты анализа таблиц сводятся к следующему:

1. коэффициенты B_n и A_n невозмущенного как симметричного, так и несимметричного полей без онуления и с онулением вычисляются с высокой точностью (0.01%), за исключением B_n несимметричного поля с онулением. В этом случае погрешность возрастает с ростом порядка n и для $n=100$ достигает 100%. Причиной этого является то, что с ростом n значения B_n резко падают по абсолютной величине и для $n=100$ достигают порядка 10^{-6} .
2. в случае возмущенного поля с достаточной точностью вычисляются коэффициенты B_n для несимметричного поля без онуления. Во всех остальных случаях погрешность настолько высока, что теряет всякого физического смысла.

Так как на практике, как правило, поле несимметричное и всегда отягощено ошибками, то следует вывод, что для разложения в ряд Фурье следует пользоваться коэффициентами B_n , вычисленными по возмущенному полю без онуления. Этот вывод очень важен в том отношении, что исходное поле не искажается за счет онуления, отпадает процедура онуления и все дальнейшие операции (вычисление трансформант, аналитическое продолжение и т.д.) проводятся с помощью реального поля.

Перейдем к оценке точности восстановления как поля V_z , так и его производных ($V_{zx}, V_{zz}, V_{zx}, \dots, V_{zz}$) на примере цилиндра радиусом $r = 2$ км, центром на глубине $h = 3$ км, плотностью $\sigma = 1$ г/см³, отстоящего от начала координат на расстоянии $l = 10$ км. Длина профиля для симметричного поля 20 км, несимметричного - 15 км, а шаг задания V_z равен $\Delta x = 0.2$ км. Значения V_z в конечных точках профиля для симметричного поля по 4.6138 мГал, а для несимметричного 4.6138 и 14.7914 мГал, максимальное значение - 55.8784 мГал.

Коэффициенты симметричного поля (с онулением)

Таблица 1

N ПК	Δg^T	Δg^E	n	Коэффициенты									
				B_n^T	$B_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	B_n^E	ε^E	A_n^T	$A_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	A_n^E	ε^E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.00	0.00000	0	0.000000	0.000000	0.00	0.000000	0.00	63.661977	63.6.56741	0.01	64.167440	-0.79
2	1.57	2.19712	1	0.000000	49595890	0.01	50323786	-0.65	0.000000	0.000000	0.00	0.013233	1.32
3	3.14	3.27503	2	0.000000	0.000000	0.00	-0.013199	-1.32	-2.1220659	-2.1218914	0.01	-21217687	0.01
4	4.70	4.56824	3	0.000000	0.000000	0.00	0.132591	13.26	0.000000	0.000000	0.00	0.060723	6.07
5	6.27	6.06392	4	0.000000	0.000000	0.00	0.073165	7.32	-4.244132	-4.243783	0.01	-4.291718	-1.12
21	29.39	29.17031	20	0.000000	-0.000000	0.00	-0.057707	-5.77	-0.159554	-0.159541	0.01	-0.238417	-49.43
22	30.65	30.54232	21	0.000000	0.000000	0.00	-0.042638	-4.26	0.000000	0.000000	0.00	0.025824	2.58
23	31.57	32.42321	22	0.000000	0.000000	0.00	-0.039889	-3.99	-0.131805	-0.131795	0.01	-0.126535	4.00
24	33.07	33.51798	23	0.000000	0.000000	0.00	-0.024720	-2.47	0.000000	-0.000000	0.00	0.053584	5.36
25	34.23	34.10189	24	0.000000	-0.000000	0.00	0.015720	1.57	-0.110716	-0.110708	0.01	-0.071513	35.41
26	35.36	35.74144	25	0.000000	-0.000000	0.00	0.026685	2.67	0.000000	-0.000000	0.00	0.001230	0.12
41	47.55	47.76556	40	0.000000	-0.000000	0.00	0.022793	2.28	-0.039814	-0.039811	0.01	-0.056592	-42.14
42	48.01	48.33429	41	0.000000	0.000000	0.00	0.066458	6.65	0.000000	-0.000000	0.00	-0.053788	-5.38
43	48.43	48.29159	42	0.000000	-0.000000	0.00	-0.022629	-2.26	-0.036110	-0.036107	0.01	-0.087444	-142.16
44	48.80	48.69617	43	0.000000	-0.000000	0.00	0.010674	1.07	0.000000	-0.000000	0.00	-0.018072	-1.81
45	49.11	49.70905	44	0.000000	-0.000000	0.00	-0.039673	-3.97	-0.032900	-0.032898	0.01	-0.062067	-88.65
46	49.38	49.58091	45	0.000000	-0.000000	0.00	-0.017881	-1.79	0.000000	-0.000000	0.00	0.049646	4.96
61	47.55	48.02374	60	0.000000	-0.000000	0.00	0.002560	0.26	-0.017689	-0.017688	0.01	-0.040621	-129.64
62	47.04	46.99938	61	0.000000	0.000000	0.00	0.016639	1.66	0.000000	0.000000	0.00	-0.037568	-3.76
63	46.49	46.68143	62	0.000000	-0.000000	0.00	-0.055571	-5.56	-0.016566	-0.016565	0.01	-0.060694	-266.38
64	45.89	45.52979	63	0.000000	0.000000	0.00	-0.035444	-3.54	0.000000	0.000000	0.00	0.046122	4.61
65	45.24	45.75837	64	0.000000	-0.000000	0.00	0.017729	1.77	-0.015546	-0.015545	0.01	-0.000497	96.80
66	44.55	45.21217	65	0.000000	-0.000000	0.00	0.009079	0.91	0.000000	0.000000	0.00	-0.021035	2.10
81	29.39	29.6.9680	80	0.000000	0.000000	0.00	-0.005675	-0.57	-0.009949	-0.009948	0.01	-0.032536	-227.23
82	28.10	27.89949	81	0.000000	-0.000000	0.00	0.016639	0.94	0.000000	0.000000	0.00	0.011463	1.15
83	26.79	26.74033	82	0.000000	-0.000000	0.00	0.019662	1.97	-0.009469	-0.009469	0.00	-0.027609	-191.57
84	25.45	25.57815	83	0.000000	-0.000000	0.00	0.018456	1.85	0.000000	0.000000	0.00	-0.026109	-2.61
85	24.09	24.32912	84	0.000000	-0.000000	0.00	-0.021095	-2.11	-0.009024	-0.009023	0.01	-0.056020	-520.79
86	22.70	23.03673	85	0.000000	-0.000000	0.00	-0.031453	-3.15	0.000000	0.000000	0.00	0.000200	0.02
96	7.82	8.05372	95	0.000000	-0.000000	0.00	0.024473	2.45	0.000000	0.000000	0.00	-0.001735	-0.17
97	6.27	6.43119	96	0.000000	-0.000000	0.00	0.006344	0.63	-0.006909	-0.006908	0.01	-0.028905	-318.37
98	4.71	5.10287	97	0.000000	0.000000	0.00	-0.008994	0.90	0.000000	-0.000000	0.00	-0.007017	-0.70
99	3.14	3.12093	98	0.000000	0.000000	0.00	-0.005018	-0.50	-0.006629	-0.006629	0.00	-0.031748	-378.93
100	1.57	2.17023	99	0.000000	-0.000000	0.00	-0.006193	-0.62	0.000000	0.000000	0.00	0.002794	0.28
101	0.00	0.00000	100	0.000000	-0.000000	0.00	-0.000000	0.00	-0.006367	-0.006367	0.00	-0.016140	-153.49

Коэффициенты симметричного поля (без нуления)

Таблица 2

N ПК	Δg^T	Δg^E	n	Коэффициенты									
				B_n^T	$B_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	B_n^E	ε^E	A_n^T	$A_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	A_n^E	ε^E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	5.00	4.73460	0	0.000000	0.000000	0.00	0.000000	0.00	73.661977	73.706741	0.06	73.766838	0.14
2	6.57	6.93254	1	56.366198	56.362088	0.01	56.404549	0.07	0.000000	0.000000	0.00	-0.020179	2.02
3	8.14	8.01128	2	0.000000	0.000000	0.00	-0.039441	3.94	-21520659	-21.2.18914	0.01	-21.217637	0.01
4	9.71	9.30531	3	2.122066	2.122066	0.00	2.159512	1.76	0.000000	0.000000	0.00	0.057011	5.70
21	11.27	10.50182	3	0.000000	0.000000	0.00	0.060044	6.00	-4.244132	-4.243783	0.01	-4.291718	1.12
21	34.39	33.52140	20	0.000000	-0.000000	0.00	-0.060331	6.03	-0.159554	-0.159541	0.01	-0.238417	49.43
22	35.65	35.69423	21	0.303152	0.303152	0.00	0.246922	1855	0.000000	0.000000	0.00	0.025748	2.57
23	36.87	37.17595	22	0.000000	0.000000	0.00	-0.042275	4.23	-0.131805	-0.131795	0.01	-0.126535	4.00
24	38.07	38.27154	23	0.276791	0.276791	0.00	0.239661	13.41	0.000000	-0.000000	0.00	0.053521	5.35
25	39.23	38.5628	24	0.000000	-0.000000	0.00	0.013534	1.35	-0.110716	-0.110708	0.01	-0.071513	35.41
26	40.36	40.49665	25	0.254648	0.254648	0.00	0.269915	6.00	0.000000	-0.000000	0.00	0.001177	0.12
41	52.55	52.53314	40	0.000000	-0.000000	0.00	0.021481	2.15	-0.039814	-0.039811	0.01	-0.056592	42.14
42	53.01	53.10269	41	0.155273	0.155273	0.00	0.214770	38.32	0.000000	-0.000000	0.00	-0.053808	5.38
43	53.43	53.06081	42	0.000000	-0.000000	0.00	-0.023879	2.39	-0.036110	-0.035107	0.01	-0.087444	142.16
44	53.80	53.46622	43	0.148051	0.148051	0.00	0.152387	2.73	0.000000	-0.000000	0.00	-0.018090	1.81
45	54.11	54.47992	44	0.000000	-0.000000	0.00	-0.040866	4.09	-0.032900	-0.032898	0.01	-0.062067	88.65
46	54.38	54.35261	45	0.141471	0.141471	0.00	0.117247	17.12	0.000000	-0.000000	0.00	0.049630	4.96
61	52.55	52.50780	60	0.000000	-0.000000	0.00	0.001685	0.17	-0.017689	-0.017588	0.01	-0.040621	129.64
62	52.04	51.78427	61	0.104364	0.104364	0.00	0.116324	11.46	0.000000	0.000000	0.00	-0.037577	3.76
63	51.49	51.46714	62	0.000000	-0.000000	0.00	-0.056417	5.64	-0.016566	-0.016563	0.01	-0.060694	266.38
64	50.89	50.71633	63	0.101051	0.101051	0.00	0.061076	39.56	0.000000	0.000000	0.00	0.046113	4.61
65	50.24	50.54573	64	0.000000	-0.000000	0.00	0.016909	1.69	-0.015546	-0.015545	0.01	-0.000497	96.80
66	49.55	50.00036	65	0.097942	0.097942	0.00	0.102629	4.79	0.000000	0.000000	0.00	0.021027	2.10
81	34.39	34.49735	80	0.000000	-0.000000	0.00	-0.006331	0.63	-0.009949	-0.009948	0.01	-0.032556	227.23
82	33.10	32.69087	81	0.078595	0.078595	0.00	0.084447	7.45	0.000000	0.000000	0.00	0.011458	1.15
83	31.79	31.54253	82	0.000000	-0.000000	0.00	0.019022	1.90	-0.009469	-0.009469	0.00	-0.027609	191.57
84	30.45	30.68118	83	0.076701	0.076701	0.00	0.091718	1958	0.000000	0.000000	0.00	-0.026114	2.61
85	29.09	29.13297	84	0.000000	-0.000000	0.00	-0.021720	2.17	-0.009024	-0.009023	0.01	-0.056020	520.79
86	27.70	27.54140	85	0.074896	0.074896	0.00	0.040085	46.48	0.000000	0.000000	0.00	0.000195	0.02
96	12.82	12.56664	95	0.067013	0.067013	0.00	0.088481	32.04	0.000000	0.000000	0.00	-0.001739	0.17
97	11.27	11.24493	96	0.000000	-0.000000	0.00	0.005798	0.58	-0.006909	-0.006908	0.01	-0.028905	318.37
98	9.71	9.91744	97	0.065631	0.065631	0.00	0.071683	9.22	0.000000	-0.000000	0.00	-0.007021	0.70
99	8.14	7.93632	98	0.000000	0.000000	0.00	-0.005554	0.56	-0.006629	-0.006629	0.00	-0.031748	378.93
100	6.57	6.98645	99	0.064305	0.064305	0.00	0.055229	14.11	0.000000	0.000000	0.00	0.002791	0.28
101	5.00	4.81704	100	0.000000	-0.000000	0.00	-0.000525	0.05	-0.006367	-0.006367	0.00	-0.016140	153.49

Коэффициенты несимметричного поля (с онулением)

Таблица 3

N ПК	Δg^T	Δg^E	n	Коэффициенты										
				B_n^T	$B_n^{N/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	B_n^E	ε^E	A_n^T	$A_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	A_n^E	ε^E	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	0.00	0.00000	0	0.000000	0.000000	0.00	0.000000	0.00	37.096523	37.090564	0.02	37.112208	-0.04	
2	1.10	1.71884	1	28.938739	28.934508	0.01	28.922357	0.06	-1.653445	-1.652130	0.08	-1.454561	1.203	
3	2.20	2.31848	2	-1.841556	-1.840479	0.06	-1.659897	9.86	-11.855759	-11.854784	0.01	-11.788149	0.57	
4	3.29	3.13341	3	0.500176	0.499517	0.13	0.567766	1351	0.763391	0.763459	-0.01	0.738007	3.33	
5	4.38	4.15081	4	-0.205032	-0.204552	0.23	-0.156866	23.49	-2.639946	-2.639730	0.01	-2.658260	-0.69	
21	1956	19.60477	20	-0.001585	-0.001491	5.93	-0.025366	1500.38	0.020293	-0.102021	0.01	-0.077907	23.64	
22	20.75	20.89850	21	0.001369	0.001279	6.57	-0.001640	219.80	-0.102029	0.016618	-0.01	0.034150	-105.52	
23	21.50	21.50111	22	-0.001190	-0.001105	7.14	-0.029165	2350.84	0.016616	-0.084294	0.01	-0.038488	54.34	
24	22.22	22.51760	23	0.001042	0.000960	7.87	0.043208	4046.64	-0.084301	0.013856	-0.01	0.068183	-392.12	
25	22.51	22.62324	24	-0.000917	-0.000838	8.62	0.000678	173.94	0.013855	-0.070817	0.01	-0.092227	-30.22	
31	26.31	26.05957	30	-0.000469	-0.000406	13.43	0.059589	12805.54	0.008718	-0.045307	0.01	-0.050989	-100.81	
32	26.74	26.48347	31	0.000425	0.000364	14.35	0.039601	92.17.88	-0.045311	0.007631	-0.01	-0.059656	881.86	
33	27.13	27.51450	32	-0.000387	-0.000327	15.50	-0.012178	3046.77	0.007630	-0.039818	0.01	-0.087618	-120.03	
34	27.48	27.03331	33	0.000352	0.000294	16.48	-0.034991	10040.63	-0.039821	0.006734	0.00	-0.009142	235.76	
35	27.79	28.25734	34	-0.000322	-0.000266	17.39	-0.003659	1036.34	0.006734	-0.035269	0.01	0.025355	171.88	
41	28.70	28.63448	40	-0.000198	-0.000149	24.75	-0.033820	16980.81	0.004822	-0.025479	0.00	0.014535	157.04	
42	23.69	28.72492	41	0.000184	0.000136	26.09	-0.005328	46273.91	-0.025480	0.004363	0.00	0.013199	-202.52	
43	28.63	28.20394	42	-0.000171	-0.000124	27.49	-0.000351	105.26	0.004363	-0.023109	0.00	-0.096740	-318.59	
44	28.53	28.13025	43	0.000159	0.000114	28.30	-0.013102	8340.25	-0.023111	0.003967	0.01	0.015207	-283.34	
45	28.37	28.66485	44	-0.000149	-0.000104	30.20	0.024506	16546.98	0.003967	-0.021055	0.01	-0.033373	-58.49	
51	26.43	25.90207	50	-0.000101	-0.000061	39.60	0.008747	8760.40	0.003055	-0.016304	0.01	-0.076397	-368.55	
52	25.53	25.55624	51	0.000095	0.000056	41.05	-0.043530	45921.05	-0.016305	0.002820	0.00	0.006896	-144.54	
53	25.39	25.51476	52	-0.000090	-0.000051	43.33	-0.014066	1462.22	0.002820	-0.015074	0.01	-0.003668	75.57	
54	24.79	25.00346	53	0.000085	0.000047	44.71	0.003616	4154.12	-0.015075	0.002611	0.00	0.033919	-1199.08	
55	24.15	24.16952	54	-0.000080	-0.000043	46.25	0.004016	50620.00	0.002611	-0.013978	0.01	-0.035660	-155.10	
61	19.27	19.32710	60	-0.000059	-0.000024	59.32	-0.002322	3835.59	-0.013322	-0.013322	0.00	-0.019595	-7307	
62	18.29	17.82447	61	0.000056	0.000022	60.71	0.015091	26848.21	0.001971	0.001971	0.00	-0.001113	156.47	
63	17.26	17.02824	62	-0.000053	-0.000019	64.15	0.030969	58532.08	-0.010604	-0.010603	0.01	-0.043134	-306.77	
64	16.19	15.79983	63	0.000051	0.000017	66.67	-0.026383	51831.37	0.001848	0.001348	0.00	-0.050748	2846.10	
65	15.07	15.14863	64	-0.000048	-0.000015	68.75	-0.038971	81089.58	-0.009951	-0.009951	0.00	-0.008003	1154	
71	7.45	7.56234	70	-0.000037	-0.000006	83.78	0.004304	11732.43	-0.003318	-0.003318	0.00	0.019922	339.50	
72	6.04	5.88283	71	0.000035	0.000004	88.57	0.030979	88411.43	0.001455	0.001455	0.00	-0.006539	549.42	
73	5.58	4.06598	72	-0.000034	-0.000003	91.18	0.013257	39091.18	-0.007862	-0.007862	0.00	-0.023256	-195.80	
74	3.09	3.17278	73	0.000033	0.000002	93.54	0.004916	14796.97	0.001377	0.001377	0.00	-0.023863	1832.97	
75	1.56	1.33446	74	-0.000031	-0.000001	96.77	-0.009734	31300.00	-0.007443	-0.007443	0.00	-0.018278	-145.57	
76	0.00	0.000000	75	0.000030	0.000000	100.00	0.000000	100.00	0.001304	0.001304	0.00	-0.001958	250.15	

Кoeffициенты несимметричного поля (без онуления)

Таблица 4

N ПК	Δg^T	Δg^E	n	Кoeffициенты									
				B_n^T	$B_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	B_n^E	ε^E	A_n^T	$A_n^{K/E}$	$\varepsilon^{K/E}$	A_n^E	ε^E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	5.00	4.73460	0	0.000000	0.000000	0.00	0.000000	0.00	82.451862	82.748272	-0.36	82.816707	-0.44
2	6.57	6.93254	1	578.12844	57.808615	0.01	57.826054	-0.02	-15.982424	-15.581110	0.01	-16.017504	-0.22
3	8.14	8.01128	2	-13.095510	-13.094433	0.01	-13.097605	-0.02	-11.8.55759	-11.8.54784	0.01	-11.788149	0.57
4	9.71	9.30531	3	10.124878	10.124219	0.01	10.202332	-0.76	-0.828718	-0.828650	0.01	-0.880098	-6.20
5	11.27	10.80182	4	-5.832009	-5.831529	0.01	-5.835720	-0.75	-2.639946	-2.639730	0.01	-2.658260	-0.69
21	34.39	33.92140	20	-1.126980	-1.126886	0.01	-1.169137	-3.74	-0.102029	-0.102021	0.01	-0.077907	23.64
22	35.65	35.69423	21	1.376326	1.376237	0.01	1.374726	0.12	-0.015876	-0.015875	0.01	0.001128	107.11
23	36.87	37.17595	22	-1.024277	-1.024192	0.01	-1.068957	-4.36	-0.084301	-0.084294	0.01	-0.038488	54.34
24	38.07	38.27154	23	1.256438	1.256356	0.01	1.299891	-3.46	-0.013232	-0.013231	0.01	0.040654	407.24
25	39.23	38.85628	24	-0.938746	-0.938668	0.01	-0.952464	-1.46	-0.070823	-0.070817	0.01	-0.092227	-30.22
31	45.45	45.16722	30	-0.750733	-0.750669	0.01	-0.702925	6.37	-0.045311	-0.045307	0.01	-0.090989	-100.81
32	46.35	46.07522	31	0.931848	0.931787	0.01	0.971978	-4.31	-0.007280	-0.007280	0.00	-0.074810	-927.61
33	47.22	47.58035	32	-0.703759	-0.703699	0.01	-0.727035	-3.31	-0.039821	-0.039818	0.01	-0.087618	-120.03
34	48.04	47.57826	33	0.875325	0.875267	0.01	0.840879	3.94	-0.006424	-0.006424	0.00	-0.022514	-250.47
35	48.82	49.28139	34	-0.662320	-0.662263	0.01	-0.676465	-2.14	-0.035272	-0.035269	0.01	0.025355	171.88
41	52.55	52.53314	40	-0.562896	-0.562847	0.01	-0.605705	-7.61	-0.025480	-0.025479	0.00	0.014535	157.04
42	53.01	53.10269	41	0.704430	0.704383	0.01	0.790296	-12.19	-0.004161	-0.004161	0.00	0.004536	209.01
43	53.43	53.06081	42	-0.536074	-0.536027	0.01	-0.545004	-1.67	-0.023111	-0.023109	0.01	-0.096740	-318.59
44	53.80	53.46622	43	0.671650	0.671605	0.01	0.659077	1.87	-0.003783	-0.003783	0.00	0.007330	293.76
45	54.11	54.47992	44	-0.511692	-0.511647	0.01	-0.495390	3.19	-0.021057	-0.021055	0.01	-0.033373	-58.49
51	55.00	54.59175	50	-0.450259	-0.450219	0.01	-0.448761	0.33	-0.016305	-0.016304	0.01	-0.076397	-368.55
52	54.98	54.82502	51	0.566254	0.566215	0.01	0.523209	7.60	-0.002689	-0.002689	0.00	0.001297	148.23
53	54.50	55.26264	52	-0.432934	-0.432896	0.01	-0.441318	-1.94	-0.015075	-0.015074	0.01	-0.003668	75.67
54	54.78	55.13044	53	0.544880	0.544841	0.01	0.548968	-0.75	-0.002490	-0.002490	0.00	0.028735	1254.02
55	54.61	54.77561	54	-0.416894	-0.416856	0.01	-0.383203	8.08	-0.013979	-0.013978	0.01	-0.035660	-155.10
61	52.55	52.80780	60	-0.375190	-0.375156	0.01	-0.335379	-2.24	-0.011322	-0.011322	0.00	-0.019595	-73.07
62	52.04	51.78427	61	0.473402	0.473368	0.01	0.488922	-3.28	-0.001879	-0.001879	0.00	-0.005027	-167.54
63	51.49	51.46714	62	-0.363084	-0.363050	0.01	-0.337989	6.91	-0.010604	-0.010603	0.01	-0.043134	-306.77
64	50.89	50.71633	63	0.458370	0.458336	0.01	0.432406	5.66	-0.001762	-0.001762	0.00	-0.054418	-2988.42
65	50.24	50.54573	64	-0.351734	-0.351701	0.01	-0.396399	-12.70	-0.009951	-0.009951	0.00	-0.008803	11.54
71	45.45	45.83405	70	-0.321578	-0.321547	0.01	-0.322488	-0.28	-0.008318	-0.008318	0.00	0.019922	339.50
72	44.51	44.63364	71	0.406713	0.406682	0.01	0.438073	-7.71	-0.001387	-0.001387	0.00	-0.009428	-579.74
73	43.53	43.29590	72	-0.312644	-0.312613	0.01	-0.304458	2.62	-0.007862	-0.007862	0.00	-0.023256	-195.80
74	42.51	42.88180	73	0.395568	0.395538	0.01	0.400857	-1.34	-0.001312	-0.001312	0.00	-0.026596	-1927.13
75	41.45	41.52258	74	-0.304192	-0.304162	0.01	-0.318861	-4.82	-0.007443	-0.007443	0.00	-0.018278	-145.57
76	40.36	40.66722	75	0.385018	0.384988	0.01	0.385383	-0.09	-0.001243	-0.001243	0.00	-0.004547	-265.81

Как и в случае тестового примера, исходное поле возмущали нормальным распределением случайных величин в пределах 0.1% от максимального значения V_z . По данным разных видов полей ($V'_{z(1)}, V'_{z(1,0)}, V'_{z(2)}, V'_{z(2,0)}$) восстанавливались (вычислялись) значения элементов поля ($V_z, V_{zx}, V_{zz}, V_{zxx}, V_{zxx}$) с помощью рядов Фурье как по синусам, так и по косинусам и сравнивались с их точными значениями. В виду ограниченности объема статьи невозможно привести полный детальный анализ полученных результатов поведения ошибок восстановления элементов поля во всех точках профиля. Поэтому ограничились средней квадратической погрешностью оценки восстановления полей. Следует заметить, что для всех элементов поля четко проявляется т.н. «краевой эффект» - низкая точность вычисления элементов поля в краевых точках профиля. Для устранения указанного эффекта необходимо исключить из рассмотрения значения полей в точках в определенном интервале на концах профиля (в данном случае по пять точек).

В табл. 5 приведены средние квадратические погрешности δ восстановления элементов поля, вычисленных: δ_1 - по точным значениям коэффициентов $B_n^T (A_n^T)$; δ_2 - по коэффициентам $B_n^{NB} (A_n^{NB})$, вычисленных по точному полю; δ_3 - по коэффициентам $B_n^B (A_n^B)$, вычисленных по возмущенному полю.

Таблица 5 Средняя квадратическая погрешность δ восстановления (вычисления) элементов поля

Элемент Поля	Вид Исходного поля	Диапазон Изменения	Ряд по синусам			Ряд по косинусам		
			δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
V_z	$V_{z(1)}$	4.61÷55.87	0.054	0.068	0.146	0.055	0.071	0.153
	$V_{z(1,0)}$	0÷51.26	0.054	0.068	0.0187	0.054	0.068	0.187
	$V_{z(2)}$	4.61÷55.87	0.064	0.079	0.0163	0.064	0.092	0.186
	$V_{z(2,0)}$	0÷44.48	0.064	0.080	0.0294	0.064	0.080	0.294
V_{zx}	$V_{zx(1)}$	-20.84÷120.84	0.495	0.617	5.733	0.495	0.617	5.733
	$V_{zx(1,0)}$		0.495	0.617	5.737	0.495	0.617	5.737
	$V_{zx(2)}$		0.593	0.739	5.846	0.593	0.739	5.846
	$V_{zx(2,0)}$		6.779	6.787	8.813	6.779	6.786	0.814
V_{zz}	$V_{zz(1)}$	-23.28÷186.26	11.58	11.59	12.97	13.34	13.34	14.47
	$V_{zz(1,0)}$		4.22	4.25	7.12	13.34	13.34	14.47
	$V_{zz(2)}$		21.77	21.78	23.41	21.28	21.29	21.55
	$V_{zz(2,0)}$		2.80	2.85	6.71	21.99	22.00	21.17
V_{zxx}	$V_{zxx(1)}$	-9.04÷9.04	0.289	0.292	3.943	0.138	0.146	3.912
	$V_{zxx(1,0)}$		0.090	0.100	3.919	0.138	0.146	3.911
	$V_{zxx(2)}$		0.730	0.734	4.190	0.297	0.300	4.014
	$V_{zxx(2,0)}$		0.131	0.143	4.066	0.371	0.372	4.048
V_{zxx}	$V_{zxx(1)}$	-3.06÷12.42	0.062	0.077	3.916	0.061	0.076	3.916
	$V_{zxx(1,0)}$		0.061	0.076	3.916	0.061	0.076	3.916
	$V_{zxx(2)}$		0.082	0.098	4.116	0.073	0.091	4.112

Результаты анализа таблицы сводятся к следующему:

1. для восстановления поля V_z необходимо использовать коэффициенты B_n , вычисленных по исходному полю $V_{z(2)}$ без онуления;
2. для вычисления производной V_{zz} необходимо использовать коэффициенты B_n^* или A_n^* , вычисленные по исходному полю без онуления $V_{z(2)}$.
3. для вычисления производной V_{zz} необходимо использовать коэффициенты B_n^* , вычисленные по исходному полю с онулением $V_{z(2,0)}$.
4. ряды Фурье как по синусам, так и по косинусам для возмущенного поля V_z не позволяют вычислять производные V_{zz} и V_{zz} практически с необходимой точностью.

Полученные математическим моделированием результаты, по восстановлению и вычислению производных от неточно заданных функции, согласуются со следствиями, вытекающими из теории некорректно поставленных задач, к которым относится и задача суммирования рядов Фурье с приближенными коэффициентами. К настоящему времени разработаны и успешно применяются различные способы приближенного решения некорректно поставленных задач [10], среди которых наиболее общим методом является метод регуляризации А.Н. Тихнова [11]. Вопрос эффективности применения методов регуляризации к решению рассматриваемой в настоящей статье задачи на основе математического моделирования требует специального исследования.

Литература

1. Страхов В.Н., Григорьева О.М., Лапина М.И. Определение особых точек двумерных потенциальных полей. Прикладная геофизика, Вып. 85, М.: Недра, 1977, с. 96-113.
2. Березкин В.М., Киричек М.А., Кунарев А.А. Применение геофизических методов разведки для прмых поисков месторождений нефти и газа. М.: Недра, 1978.
3. Березкин В.М. Метод полного градиента при геофизической разведке. М.: Недра, 1988, 188 с.
4. Тропков Г.А. Вопросы интерпретации гравитационных и магнитных полей методом особых точек. Вопросы разведочной геофизики. М.: Недра, 1978, вып. 8, с.40-44.
5. Тропков Г.А., Грознова А.А. Метод устойчивой локализации особенностей потенциальных полей. Изв. АН СССР, Сер. Физика Земли, 1980, № 11, с. 96-101.
6. Телепин М.А. О трансформации поля Δg в полный градиент. Прикладная геофизика, вып. 80, М.: Недра, 1975, с. 177-193.
7. Мудрецова Е.А. Методы интерпетации гравитационных и магнитных данных при поисках залежей нефти и газа с применением метода регуляризации. Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1982, с. 92-106.
8. Мудрецова Е.А., Целеев В.И. Выбор параметров регуляризованного продолжения в нижнее полупространство двумерных потенциальных полей для локализации источников аномалии. Геофизический журнал, 1985, Т. 7, № 4, с. 88-93.
9. K. M. Kartvelishvili, A. C. Gabunia, T.A. Gvantseladze. Normed transformants of gravity field and singular points. Journal of Georgian Geophysical Society. Inssue (A), Solid Earth, v. 4, 1999, p. 65-75.
10. Старостенко В.И., Оганесян С. М. Некорректно поставленные задачи по Адамару и

იხ. приближенное решение методом регуляризации А.Н. Тихонова. Киев, Геофизический журнал, Т. 23, № 6, 2001, с. 3-20.

11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 284 с.

ფურიეს მწკრივად გამლის გამოყენებით ანომალური სიმძიმის ძალის ველის გრანსფორმანტების გამოთვლის საკითხისათვის ველის

კ. ქართველიშვილი,

ა. გაბუნია,

პ. მინდელი, გ. ჯაში,

თ. გვანცელაძე, ჯ. კაპანაძე

რეზიუმე

სტატიის საწყისი გრაფიკაციული ველის ხასიათისა და ცლომილების გათვალისწინებით, მოცემულია გრაფიკაციული ველის ფურიეს მწკრივად გამლის A_n და B_n კოეფიციენტების შეფასება.

შესწავლილია როგორც საწყისი გრაფიკაციული ველის აღდგენის, ასევე მისი გრანსფორმანტების გამოთვლის სიმუსტე.

დადგენილია A_n და B_n კოეფიციენტების გამოყენების მიზანშეწონილობა ანომალური გრაფიკაციული ველის სხვადასხვა (V_z , V_x , ... V_{zz}) გრანსფორმანტების გამოთვლის დროს.

On the method of calculation of transformants of gravitational field with the help of Fourier series

K. Kartvelishvili,

A. Gabunia,

P. Mindeli, G. Jashi,

T. Gvantseladze, D. Kapanadze

Abstract

In the paper are evaluated A_n and B_n coefficient of Fourier transform of gravity field taking into account peculiarities of the observed field and errors of measurements and modelling.

The accuracy of recovery of the observed field and calculations of the transformants is considered.

The expediency of using coefficients A_n and B_n at calculations of different transformants of gravity field is shown.