

კ. 36 250
2

განთავსებულია

გოგობა და ვიწრო
კუჩხი

საბჭოთა

00250

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს ზოგადი ფიზიკის კურსის პირველი ნაწილის მეორე გამოცემას (პირველი გ გამოვიდა 1939 წ.). მიუხედავად იმისა, რომ ძირითადი პრინციპები, რომლებზე დამყარებითაც აგებულია კურსი, უცვლელი დარჩა, მთელი მასალა საგრძნობლად გადამუშავებული და შევსებულია, რაც სავსებით გასაგებია, თუ მხედველობაში მივიღებთ პირველი გამოცემის შემდეგ გასულ საქმაოდ დიდ დროს.

თანამედროვე ფიზიკა განსხვავდება „კლასიკური“ ფიზიკისაგან არა მარტო იმით, რომ იგი შეიცავს უკანასკნელი რამდენიმე ათეული წლის მანძილზე შექმნილ ახალ დარგებს, არამედ იმიტაც, რომ ამჟამად წინ წამოწეულია ისეთი ცნებები და კანონზომიერებები, რომლებიც წინათ ითვლებოდნენ მეორესართისსონად და დამხმარედ; მაგალითად, თუ სახელმძღვანელოში გვხვდებოდა პარაგრაფი ფარდობითობის პრინციპის შესახებ, უკანასკნელი განიხილებოდა როგორც საინტერესო, მაგრამ განცალკევებული შედეგი, რომელიც შემდეგში თითქმის არსად არ პოულობდა თავის გამოყენებას. ათვლის სისტემის არჩევის მნიშვნელობა თუმცა კი აღინიშნებოდა, მაგრამ შემდეგში იგი თითქმის მივიწყებული რჩებოდა. იმპულსისა და ენერგიის ცნებები მნიშვნელოვან მაგრამ მაინც „დამხმარე“ ცნებებად ითვლებოდნენ და უპირატესობა ეძლეოდა ძალისა და მუშაობის ცნებებს. მუდმივობის კანონები სხვადასხვა საკითხის გადმოცემის დროს არ ასრულებდნენ იმ მნიშვნელოვან როლს, რომელიც მათ აქვთ თანამედროვე ფიზიკაში. მოძრაობის ხასიათის შესწავლა პოტენციალურ მრუდებსა და პოტენციალურ ენერგიასა და ძალას შორის არსებული კავშირის საშუალებით თითქმის არ წარმოებდა; ამიტომაც პოტენციალური ენერგიის ცნება წმინდა ფორმალურ ხასიათს ღებულობდა.

კურსის გადმოცემის ძველი სქემის შენარჩუნების პირობებში ახალი შედეგები როგორც თეორიული, ისე ექსპერიმენტული, ემა-

ტეზოდა კურსს ახალი პარაგრაფებისა და თავების სახით. მაგრამ ეს გავლენას არ ახდენდა უკვე არსებულ თავებზე, არ იწვევდა მთელი კურსის მნიშვნელოვან გადაზუსტებას.

ავტორი ფიქრობს, რომ ფიზიკის სწრაფი განვითარების და მნიშვნელოვანი გარდაქმნის თანაჰედროვე პირობებში შეუძლებელია ზოგადი კურსის გადმოცემის ძველი სქემის შენარჩუნება. უნდა ვეცადოთ გადავამუშაოთ ზოგადი ფიზიკის კურსი თანამედროვე ფიზიკის მოთხოვნების თანახმად. სწორედ ასეთ ცდას წარმოადგენს წინამდებარე კურსი. მექანიკის გადმოცემის დროს წინ არის წამოწეული ათვლის სისტემის ცნება, ფარდობითობის პრინციპი, მუდმივობის კანონები და კავშირი პოტენციალურ ენერგიასა და მოძრაობის ხასიათს შორის. მოძრაობის განტოლებები გამოყვანილია ენერგიის მუდმივობის კანონისა და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით. დაწვრილებითაა განხილული ათვლის არაინერციული სისტემები და სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდის ვარიანტულობა და ინვარიანტულობა. საკმაო სისრულით არის გარჩეული ნაწილაკთა დაჯახების სხვადასხვა შემთხვევა, იმპულსური დიაგრამების გამოყენებით. მნიშვნელოვნად გაფართოებულია მყარი სხეულებისადმი, რხევებისადმი და გრავიტაციული ურთიერთქმედებისადმი მიძღვნილი თავები. სრულიად ამოღებულია და გადატანილია კურსის სათანადო ნაწილებში ელექტროსტატიკისადმი და თერმოდინამიკისა და სტატისტიკის საფუძვლებისადმი მიძღვნილი თავები.

ცხადია, წინამდებარე კურსის გარკვეული თვისებების გამო, მისი გააოყენება ძირითადი სახელმძღვანელოს სახით ერთგვარ სიძნელეებთან იქნება დაკავშირებული, მაგრამ ავტორი იმედოვნებს, რომ წიგნი სასარგებლო იქნება როგორც სტუდენტების, ისე მასწავლებლებისათვის.

ავტორი მადლობელი იქნება ყველა კრიტიკული შენიშვნისათვის. როგორც კურსის საერთო გეგმის, ისე ცალკეული საკითხების გადმოცემის მიმართ.

ავტორი დიდ მადლობას უხდის დოც. ა. იშხნელს ხელთნაწერის გულდასმით წაკითხვისათვის და მრავალი სასარგებლო შენიშვნისათვის.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ფიზიკის ძირითადი ცნებები: მათემატიკა, სივრცე და დრო

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა შორის ფიზიკას ცენტრალური ადგილი უჭირავს. მის ამოცანას შეადგენს ბუნების მოვლენების შესწავლა და მათი ძირითადი კანონების ჩამოყალიბება. ფიზიკის მიერ დადგენილი კანონზომიერებები წარმოადგენენ ბუნების ყველაზე უფრო ზოგად და ძირეულ კანონზომიერებებს და ისინი უნდა იძლეოდნენ პრინციპულ შესაძლებლობას იმ კერძო სახის კანონზომიერებების ახსნისა, რომლებსაც აყალიბებენ დანარჩენი საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები. ეს, რასაკვირველია, სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ ახსნა უკვე შესაძლებელია თანამედროვე ფიზიკის კანონებზე დამყარებით, ვინაიდან თანამედროვე ფიზიკა ჯერ კიდევ შორსაა ამ მიზნისაგან.

ფიზიკა სრულებითაც არ შემოისაზღვრება ობიექტებისა და მოვლენების რაიმე სპეციალური ჯგუფის განხილვით და ჩვეულებრივი განსაზღვრა ფიზიკისა, როგორც მეცნიერებისა, რომელიც შეისწავლის არაორგანული ბუნების მხოლოდ ისეთ მოვლენებს, რომელთა დროს არ ხდება ნივთიერების სტრუქტურის ცვლილება, სრულებით არ არის სწორი.

დანარჩენი საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები—ქიმია, ასტრონომია, გეოლოგია, ბიოლოგია და სხვები შეისწავლიან ობიექტებისა და მოვლენების გარკვეულ ჯგუფებს, აყალიბებენ კერძო სახის ცნებებსა და კანონებს და ამით აწვდიან ფიზიკას უამრავ მასალას ზოგადი ცნებებისა და კანონების დასადგენად. ზოგიერთ შემთხვევაში (ასტრონომია, ქიმია) შესაძლებელი გახდა სპეციალური სახის კანონზომიერებათა დაყვანა ზოგად ფიზიკურ კანონზომიერებებზე და ფიზიკის ძირითად მისწრაფებას შეადგენს კერძო სახის შედეგებისა და თეორიების სწორედ ასეთი განზოგადება.

ყოველივე ზემოთქმული ცხადყოფს, თუ რამდენად დიდი მნიშვნელობა აქვს ფიზიკას ბუნების მოვლენების შესწავლისათვის და

საერთო მსოფლმხედველობის განვითარებისათვის, და სავსებით გასაგებს ხდის იმ წამყვან როლს, რომელიც მან მოიპოვა ამ უკანასკნელ წლებში. თავისი განვითარების ყოველ საფეხურზე ფიზიკა ეუფლებოდა მოვლენათა სულ უფრო და უფრო ფართო ჯგუფებს, სულ უფრო ღრმად იჭრებოდა ბუნების საიდუმლოებაში და განუწყვეტლად მდიდრდებოდა ახალი ცნებებითა და კანონებით. როგორც მაგალითი, შეიძლება მოვიყვანოთ ფიზიკის განვითარება მეოცე საუკუნის 20—30-იან წლებში — სახელდობრ კვანტური მექანიკის წარმოშობა და განვითარება, რამაც საშუალება მისცა ფიზიკას (მართალია, ჯერჯერობით მხოლოდ ნაწილობრივი) აეხსნა ქიმიური კანონზომიერებები და ქიმიური პროცესების თავისებურებები. ამასთან ერთად მოხდა თვით ფიზიკის ძირფესვიანი შეცვლა და მისი დაყრდნობა უფრო ფართო საფუძველზე. პრინციპულად არ არის შეუძლებელი, რომ ფიზიკის შემდგომმა განვითარებამ ბიოლოგიასთან კავშირში მიგვიყვანოს ბიოლოგიური მოვლენების გაგებამდე, რისთვისაც, ცხადია, საჭირო იქნება თვით ფიზიკაში სათანადო ცვლილებების შეტანა.

ფიზიკას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო თავისი შინაარსის, არამედ მეთოდის მხრივაც. ექსპერიმენტული და თეორიული მეთოდების გაერთიანება და მათი ერთდროული გამოყენება დამახასიათებელია ფიზიკისათვის. მოვლენათა მიმდინარეობის პირობების შეცვლის შესაძლებლობა, ყოველმხრივი შესწავლა ბუნების პროცესებისა და მათ დამახასიათებელ სიდიდეთა შორის რაოდენობრივი კავშირის დამყარება დამახასიათებელია ფიზიკის ექსპერიმენტული მეთოდისათვის. მეორე მხრივ, თეორიული მსჯელობა, რომელიც აკავშირებს სხვადასხვა მოვლენას ერთმანეთთან და ხსნის ამ კავშირს დასაშვებ ძირითად დებულებებზე დამყარებით, საშუალებას გვაძლევს არა მარტო ჩამოვაყალიბოთ მოვლენათა ცალკეული ჯგუფების თეორია, არამედ ვიწინასწარმეტყველოთ კიდევ ახალი ფაქტები და კავშირები მოვლენათა შორის.

თავისი თეორიების ჩამოყალიბებისას ფიზიკა ფართოდ სარგებლობს ისეთი მძლავრი იარაღით, როგორიც არის მათემატიკური ანალიზი და მით ანიჭებს ამ თეორიებს ლოგიკურ სიმკაცრესა და ასხმულობას. ენათესავენა რა მათემატიკას თავისი თეორიული მეთოდით, ფიზიკა ყველა სხვა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაზე უფრო მჭიდროდ არის დაკავშირებული მასთან. მათემატიკისა და ფიზიკის ისტორია ნათლად გვიჩვენებს, თუ რამდენად ძლიერ ბიძგებს აძლევდა და აძლევს ფიზიკა მათემატიკას. მეორე მხრივ, მათემატიკა ხშირად წინასწარ ჰვრეტს ფიზიკის განვითარების

გზებს, აყალიბებს რა მათემატიკურ სქემებს, რომლებიც შემდეგში ფიზიკური კვლევა-ძიების აუცილებელ იარაღად იქცევიან.

არანაკლებ არის დაკავშირებული ფიზიკა ადამიანის პრაქტიკულ საქმიანობასა და ტექნიკასთან. შეიძლება ითქვას, რომ ტექნიკა წარმოადგენს იმ ბაზას, რომელზედაც აგებულია მთელი ფიზიკა. შეუძლებელია წარმოვიდგინოთ თანამედროვე ექსპერიმენტული ფიზიკის განვითარება ტექნიკის გარეშე, რომელიც ამზადებს ზუსტ საზომ იარაღებსა და ხელსაწყოებს, აწვდის მას ექსპერიმენტისათვის საჭირო მასალას და აყენებს მის წინაშე მნიშვნელოვან ტექნიკურ ამოცანებს. ფიზიკის ისტორია გვიჩვენებს, რომ ტექნიკის განვითარება ფიზიკის წინაშე აყენებს სულ ახალ და ახალ პრობლემებს, რაც იწვევს ფიზიკის ახალი დარგებისა და ფრიად მნიშვნელოვანი ფიზიკური თეორიების წარმოშობას (თერმოდინამიკა, ელექტროდინამიკა და სხვა). მეორე მხრივ, ფიზიკაც ფრიად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ტექნიკის განვითარების საქმეში. ტექნიკის ისეთი მნიშვნელოვანი დარგების წარმოშობა და განვითარება, როგორიც არის: სითბოტექნიკა, ელექტროტექნიკა, რადიოტექნიკა და სხვა წარმოებდა ფიზიკის უშუალო მონაწილეობით და ხშირად მთლიანად ფიზიკურ კვლევა-ძიებაზე დამყარებით. ამ მხრივ განსაკუთრებით თვალსაჩინო მაგალითს წარმოადგენს ტექნიკის ახალი დარგის— ბირთვული ენერგეტიკის—განვითარება უკანასკნელი ათეული წლის მანძილზე, რასაც საფუძველი ჩაუყარა ბირთვის აგებულების და ბირთვული რეაქციების ფიზიკურმა კვლევა-ძიებამ.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ფიზიკის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ბუნების მოვლენების შესწავლა და მათი ძირითადი კანონების ჩამოყალიბება. ვიდრე შევეუდგებოდეთ მოვლენათა ცალკეული ჯგუფების განხილვას, უნდა გავეცნოთ იმ ზოგად ცნებებს, რომლებზედაც დამყარებულია ყოველი მეცნიერება ბუნების შესახებ და განსაკუთრებით კი ფიზიკა. ასეთ ზოგად ცნებებს წარმოადგენენ მატერიის, სივრცისა და დროის ცნებები.

ძირითად დებულებას, რომელსაც ეყრდნობა მთელი მეცნიერული შემეცნება, წარმოადგენს დებულება გარეშე სამყაროს ობიექტური, ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებელი არსებობის შესახებ. ამ დებულების გარეშე შეუძლებელი იქნებოდა ყოველგვარი ნამდვილი მეცნიერების არსებობა, რასაც ამტკიცებს მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარების მთელი ისტორია. მაგრამ იმისათვის, რომ ამ დებულებას ჰქონდეს გარკვეული აზრი, უნდა გაირკვეს, თუ რა შეადგენს გარეშე სამყაროს შინაარსს და როგორია მისი არსებობის ფორმები. ფილოსოფიისა და ბუნებისმეტყველების განვითარე-

ბამ ცხადჲყო, რომ გარეშე სამყაროს შინაარს შეადგენს მატერია და რომ ცალკეული სხეულები და მოვლენები წარმოადგენენ მატერიის სხვადასხვა სახეს და მისი ცვლილების ფორმებს. ამ ფორმების მრავალსახეობა არ ეწინააღმდეგება სამყაროს ერთიანობას; იგი არის ამ ერთიანობის აუცილებელი პირობა. მატერია არის ობიექტური რეალობა, რომელიც მოქმედებს ჩვენს გრძნობის ორგანოებზე და არსებობს ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებლად. რასაკვირველია, შეუძლებელია თავიდანვე მატერიის ყველა ძირითადი თვისების განხილვა და ამიტომ ჯერჯერობით დავკმაყოფილდებით რამდენიმე ზოკადი შენიშვნით. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, მატერიის სახეები მრავალია. ამ სახეებს შორის პირველად შესწავლილი იყო მატერიის ის უმარტივესი სახე, რომელსაც ხშირად ეწოდება მატერია ვაწრო გაგებით, ანუ ნივთიერება. შემდეგში აღმოჩნდა, რომ, გარდა მატერიის ამ სახისა, არსებობს კიდევ სხვა სახეები—ელექტრომაგნიტური და სხვა ბუნების ველები, რომელთა აგებულება და თვისებები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ნივთიერების აგებულებისა და თვისებებისაგან მიუხედავად იმისა, რომ მათაც აქვთ ენერგია, იმპულსი, გავრცელების სიჩქარე და მრავალი სხვა სიდიდე, რომლებიც ითვლებოდნენ ჩვეულებრივი მატერიის—ნივთიერების—დამახასიათებელ სიდიდეებად.

კლასიკური ფიზიკა თვლიდა, რომ ნივთიერება ყოველთვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს როგორც ნივთიერი წერტილების ერთობლიობა, ე. ი. ისეთი ნაწილაკების ერთობლიობა, რომელთა ხაზოვანი ზომები შეიძლება უგულებელვყოთ მათ შორის მანძილებთან შედარებით. ყოველი ფიზიკური მოვლენა განიხილებოდა როგორც ამ ნაწილაკების ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის შედეგი.

სულ სხვა ხასიათის იყო მატერიის მეორე სახე—ველი. შეუძლებლად ითვლებოდა მისი წარმოდგენა მცირე ზომის ნაწილაკთა ერთობლიობის სახით, ვინაიდან იგი უწყვეტად იყო გავრცელებული მთელ სივრცეში. ყოველივე ცვლილება ველში განიხილებოდა როგორც უწყვეტი ტალღების გავრცელება და ამ ცვლილებების კანონები არ დაიყვანებოდა ნაწილაკების მოძრაობის კანონებზე. ცხადია, რომ ის მკვეთრი განსხვავება (აღნაგობის მხრივ), რომელიც კლასიკური ფიზიკის თანახმად არსებობს ნივთიერებასა და ველს შორის, არის საკითხისადმი ცალმხრივი მიდგომის შედეგი. თუ ნივთიერება მხოლოდ წყვეტილია, ხოლო ველი კი უწყვეტი, მაშინ შეუძლებელია არსებობდეს მათ შორის ის მჭიდრო კავშირი, რომლის არსებობა თანამედროვე ფიზიკის თვალსაზრისით წარმოადგენს საბოლოოდ

დადგენილ ფაქტს; ამიტომაც ვერ შესძლო კლასიკურმა ფიზიკამ ნივთიერებასა და ველს შორის არსებული კავშირის ასხნა.

ფიზიკის განვითარებამ ამ უკანასკნელი რამდენიმე ათეული წლის მანძილზე ცხადყო, რომ ველი უწყვეტობასთან ერთად ატარებს წყვეტილი აღნაგობის მრავალ ნიშანს და ნივთიერებაც წყვეტილ აღნაგობასთან ერთად უწყვეტობის თვისებების მატარებელია. ნივთიერებისა და ველის თვისებების ასეთი დაახლოების შედეგად შესაძლებელი გახდა მნიშვნელოვანი ნაბიჯის გადადგმა მატერიის აღნაგობის საკითხის გარკვევაში. მართალია, კავშირი ნივთიერებასა და ველს შორის საბოლოოდ ჯერ კიდევ არ არის გარკვეული, მაგრამ შეიძლება ვითქვით, რომ ამ კავშირის გარკვევა მნიშვნელოვნად გაფანტავს იმ სიძნელეებს, რომლებსაც შეხვდა ფიზიკა უკანასკნელ წლებში.

ჩვენ ჯერჯერობით განვიხილავთ ჩვეულებრივი მატერიის, ანუ ნივთიერების, ძირითად თვისებებს, მისი მოძრაობისა და ურთიერთქმედების კანონებს და ნივთიერების ყოველ ნაწილს, ე. ი. სხეულს წარმოვიდგინოთ როგორც ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას. ამიტომაც ჩვენი უახლოესი ამოცანა იქნება ნივთიერი წერტილებისაგან შემდგარი სისტემის მოძრაობის შესწავლა. შემდეგ ჩვენ გადავალთ ველის თვისებების განხილვაზე და შევეცდებით გავარკვიოთ კავშირი, რომელიც არსებობს ნივთიერებასა და ველს შორის. ამ განხილვის შედეგად გამოიკვევა, რომ ნივთიერების აღნაგობის ზუსტი თეორიის შექმნა შეუძლებელია ველის გამოყენების გარეშე. მიუხედავად ამისა ნივთიერი სხეულების მრავალი თვისება შეიძლება გაირჩეს და აიხსნას ველისაგან დამოუკიდებლად, რაც საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ნივთიერებაში მიმდინარე პროცესები ველის კანონების უშუალო გამოყენების გარეშე.

მატერიის არსებობის ფორმებს წარმოადგენენ სივრცე და დრო. თუმცა სივრცე და დრო არ არიან მატერიალური ობიექტები, ისინი წარმოადგენენ ჩვენი ცნობიერებისაგან დამოუკიდებელ ობიექტურ რეალობებს და აუცილებელი არიან როგორც ცალკეული სხეულების არსებობისა და ურთიერთქმედებისათვის, ისე მოვლენათა მიმდინარეობისათვის. არ არსებობს სხეული და მოვლენა, რომელიც არ იმყოფებოდეს და არ მიმდინარეობდეს სივრცესა და დროში და არ იარსებებდა სივრცე და დრო, რომ არ არსებობდნენ ცალკეული სხეულები და მოვლენები. ცხადია, სივრცე და დრო არ არიან დამოუკიდებელი მატერიისაგან და მატერიის, სივრცისა და დროის თვისებებს შორის უნდა არსებობდეს მჭიდრო კავშირი. როგორც შემდეგში ვნახავთ, კლასიკური ფიზიკის ძირითად ნაკლს

წარმოადგენდა სივრცისა და დროის აბსოლუტირება და მათი სრული მოწყვეტა მატერიისაგან. რასაკვირველია, ჩვენ ახლაც შორსა ვართ მატერიას, სივრცესა და დროს შორის არსებული კავშირის გავებისაგან, მაგრამ ფარდობითობის თეორიის საშუალებით შესაძლებელი გახდა ამ კავშირის ნაწილობრივი გარკვევა მაინც.

ყოველივე ზემოთქმული მატერიის, სივრცისა და დროის შესახებ არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენად კარგად არის ჩვენთვის ცნობილი მათი კონკრეტული თვისებები. ფიზიკისა და, საზოგადოდ, მთელი ბუნებისმეტყველების განვითარებასთან ერთად იცვლება ჩვენი შეხედულებები მატერიის, სივრცისა და დროის სტრუქტურის შესახებ; ჩვენთვის სულ უფრო და უფრო ცნობილი ხდება კავშირი მათ შორის, მაგრამ ამ ცვლილებებს არავითარ შემთხვევაში არ შეუძლიათ მიგვიყვანონ მატერიის, სივრცისა და დროის ობიექტური არსებობის უარყოფამდე.

შემდეგ თავებში ჩვენ უფრო დაწვრილებით გაეარჩევთ სივრცისა და დროის თვისებებს, ნივთიერი წერტილის მდებარეობისა და მოვლენის მოხდენის მომენტის განსაზღვრის საკითხს, მაგრამ, ცხადია, რომ თავადანვე სივრცისა და დროის ყველა თვისების განხილვა ყოველად შეუძლებელი იქნება, რადგანაც ამისათვის ჯერჯერობით არა გვაქვს საკმარისი ფაქტობრივი მასალა. ჩვენ შევხებით მხოლოდ ისეთ თვისებებს, რომლებიც შეიძლება ჩაითვალოს საბოლოოდ დადგენილად და რომელთა გამოყენების გარეშე შეუძლებელია ფიზიკის შესწავლის დაწყება.

ათვლის სისტემა. სივრცისა და დროის გაზომვა

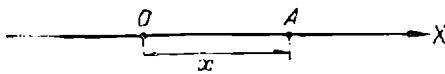
§ 1. ათვლის სისტემა და კოორდინატთა სისტემაში

როდესაც ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ვსვამთ კითხვას იმის შესახებ, თუ სად იმყოფება ესა თუ ის სხეული, ყოველთვის ვგულისხმობთ, რომ ამ სხეულის მდებარეობა უნდა განისაზღვროს რაღაც სხვა სხეულის მიმართ. თვით ცნება წერტილისა და სხეულის მდებარეობისა მოითხოვს იმის წინასწარ აღნიშვნას, თუ რომელი სხეულის მიმართ განისაზღვრება ეს მდებარეობა. ამ აღნიშვნის გარეშე კითხვას, თუ სად იმყოფება სხეული, არავითარი აზრი არა აქვს. ირგვლივ მყოფი სხეულების მდებარეობას ჩვენ ჩვეულებრივად ვსაზღვრავთ ოთახის, სახლის, ქუჩების და სხვა ობიექტების მიმართ. გეოგრაფიული პუნქტების მდებარეობა განისაზღვრება დედამიწაზე გავლებული მერიდიანებისა და განედების მიმართ, პლანეტების და სხვა ციური სხეულების მდებარეობა—დედამიწის, მზის და სხვა ციური სხეულების მიმართ და ა. შ. ეს გარემოება იმით არის გამოწვეული, რომ თვით სივრცის წერტილებს ან ნაწილებს არ ახასიათებს რაიმე, ერთმანეთისაგან განმასხვავებელი ნიშნები, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია მათი გარჩევა. განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. დავუშვათ, რაიმე სხეული უძრავად ძევს მაგიდაზე. შეგვიძლია თუ არა ვთქვათ, რომ ეს სხეული ყოველთვის სივრცის ერთსა და იმავე ადგილასაა? პირველი შეხედვით ეს მართლაც ასეა, მაგრამ საკმარისია გავიხსენოთ, რომ დედამიწა ბრუნავს ღერძის ირგვლივ, მოძრაობს მზის მიმართ, რომელიც, თავის მხრივ, მოძრაობს ვარსკვლავების მიმართ და ა. შ., რომ მივხვდეთ, რამდენად უაზროა გამოთქმა—სხეული ყოველთვის სივრცის ერთსა და იმავე ადგილასაა, თუ არ იქნა აღნიშნული რომელი სხეულის მიმართ განიხილება მისი მდებარეობა.

იმ სხეულს ან სხეულთა სისტემას, რომლის მიმართაც განიხილება ნივთიერი წერტილის ან სხეულის მდებარეობა და მოძრაობა, ეწოდება ათვლის სის-

ტემა. იმისდა მიხედვით, თუ რომელი სხეულია არჩეული ათვლის სისტემად, სხვადასხვა იქნება განსაზღვრული სხეულის მდებარეობა და მოძრაობა. ერთი და იგივე სხეული შეიძლება უძრავი იქოს ერთი ათვლის სისტემის მიმართ, მოძრაობდეს თანაბრად და სწორ-ხაზოვნად მეორის მიმართ, წრიულად — მესამის მიმართ და ა. შ. ჯერჯერობით ჩვენ არ შევზღუდავთ ათვლის სისტემის არჩევას რაიმე პირობით; ასე რომ, ათვლის სისტემად შეიძლება ნებისმიერი სხეული აირჩეს. მხოლოდ შემდეგ, ნაწილაკთა ურთიერთქმედებებს კანონების ჩამოყალიბებისას, საჭირო გახდება ათვლის სისტემის არჩევის შეზღუდვა.

იმის შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა, ისმის ნივთიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრის საკითხი ამ ათვლის სისტემის მიმართ. დავიწყეთ მარტივი შემთხვევის განხილვით. ვთქვათ, საჭიროა A ნივთიერა წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა რაიმე სწორ ხაზზე (ნახ. 1). ვიგულისხმობთ, რომ A წერტილი ყოველთვის ამ სწორ ხაზზე მდებარეობს. ცხადია, სწორი ხაზის აღნიშვნა, რომელზედაც



ნახ. 1.

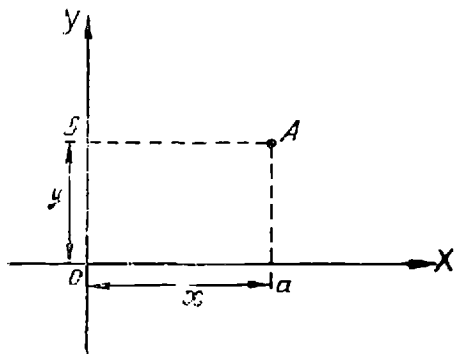
მდებარეობს A წერტილი, არ არის საკმარისი მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის ამ სწორ ხაზზე. საჭიროა ამ სწორ ხაზზე ავარჩიოთ რაი-

მე O წერტილი, ათვლის სისტემის სათავე, და წერტილის მდებარეობა განვსაზღვროთ მისი საშუალებით.

სწორი ხაზი მასზე არჩეული O წერტილით წარმოადგენს ათვლის სისტემას. A წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ OA მანძილი და მიმართულება, რომლის გასწვრივაც უნდა გადაიზომოს ეს მანძილი. ვუწოდოთ სწორ ხაზს OX ღერძი, ხოლო OA მანძილს, აღებულს სხვადასხვა ნიშნით იმისდა მიხედვით, თუ რა მიმართულებით არის იგი გადაზომილი O წერტილიდან, x კოორდინატი. ჩვეულებრივ, იმ მიმართულებას, რომლის გასწვრივაც გადაზომილ მანძილს პლუს ნიშნით იღებენ, ისრით აღნიშნავენ (ნახაზზე O წერტილიდან მარჯვნივ). როგორც ვხედავთ, სწორი ხაზის არჩევის და მასზე სათავეს აღნიშვნის შემდეგ (ათვლის სისტემა) ამ სწორ ხაზზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ერთი რიცხვის ცოდნა— OA მანძილისა სათანადო ნიშნით, ე. ი. x კოორდინატისა. ამიტომაც ამბობენ, რომ სწორი ხაზი ერთგანზომილებიანია.

ავილოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც განსახილველი ნაწილაკი სიბრტყეზე მდებარეობს და მოითხოვება მისი მდებარეობის განსაზღვრა (ნახ. 2).

ცხადია, რომ ერთი OX ღერძი მასზე არჩეული O სათავით უკვე აღარ არის საკმარისი A წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის. მართლაც, ჩვენ ისევ შეიძლება გავზომოთ A წერტილის x კოორდინატი—ეს იქნება სათანადო ნიშნით აღებული Oa მანძილი, სადაც a არის A წერტილის OX ღერძზე მართობული პროექცია. მაგრამ ეს x კოორდინატი ვერ განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას, ვინაიდან ასეთივე კოორდინატი ექნება A და a წერტილებზე გავლებული სწორი ხაზის ყველა წერტილს (მაგალითად, თვით a წერტილს). მაშასადამე, გარდა x კოორდინატისა,



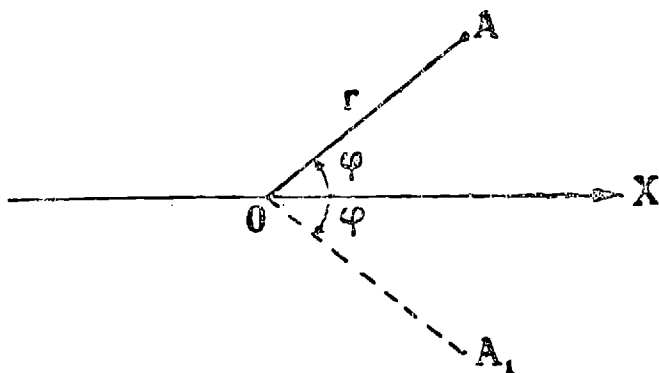
ნახ. 2.

საჭიროა კიდევ სხვა სიდიდე იმისათვის, რომ ცალსახად განისაზღვროს A წერტილის მდებარეობა სივრცეში; ამისათვის შემდეგნაირად იქცევით. O წერტილზე ავლებენ OX ღერძის მართობ ხაზს და მას OY ღერძს უწოდებენ. A წერტილიდან დაუშვებენ მართობს ამ ღერძზე და მონახავენ b წერტილს—ამ მართობისა და OY ღერძის გადაკვეთის წერტილს (ცხადია, რომ ეს წერტილი, a წერტილის მსგავსად, არის A წერტილის პროექცია OY ღერძზე). Ob მანძილს, აღებულს სათანადო ნიშნით (ჩვეულებრივად $+$ ნიშნით, თუ იგი გადაზომილია O წერტილიდან ზევით და $-$ ნიშნით, თუ გადაზომილია ქვევით), უწოდებენ y კოორდინატს. ცხადია, რომ, თუ მოცემულია OX და OY ღერძები (O სათავით), რაც წარმოადგენს ათვლის სისტემას, და ცნობილია x და y კოორდინატები, A წერტილის მდებარეობა ცალსახად იქნება განსაზღვრული. OX და OY ღერძების სისტემას დეკარტის მართკუთხა სისტემას უწოდებენ (ღერძები ერთმანეთის მართობია), ხოლო x და y სიდიდეებს—დეკარტის კოორდინატებს.

ასეთი წესი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისა სიბრტყეზე ერთადერთი არ არის. შესაძლებელია აირჩიეს ორი სხვა სიდიდე, რომლებიც აგრეთვე განსაზღვრავენ A წერტილის მდებარეობას. ასეთ სიდიდეებად შეიძლება, მაგალითად, ავიღოთ OA მონაკვეთის სიგრძე, რომელსაც r ასოთი აღვნიშნავთ (ყოველთვის დადებითია), და OA მონაკვეთისა და OX ღერძს შორის მოთავსებული φ კუთხე (ნახ. 3).

ეს ორი სიდიდე სავსებით განსაზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე. მაგრამ აქ ყურადღება უნდა მიექცეს ერთ გარემოე-

ბას. შეიძლება მოიძებნოს ისეთი A_1 წერტილი, რომლის დაშორება O წერტილიდან ისეთივეა, როგორც A წერტილისა და რომლის OA_1 მონაკვეთი ისეთივე სიდიდის φ კუთხეს ადგენს OX ღერძთან, როგორსაც OA მონაკვეთი. მაშინ A და A_1 წერტილებს ერთნაირი r და φ კოორდინატები ექნებათ და შეუძლებელი იქნება მათი გარჩევა ამ კოორდინატების საშუალებით. ამ გაურკვევლობის თავიდან



ნახ. 3.

ასაცილებლად შემდეგნაირად იქცევებიან: თვლიან, რომ φ კუთხე დადებითია, თუ იგი გადაზომილია OX ღერძიდან ზემოთ (შემოწერილია OA მონაკვეთით OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის ხაზინააღმდეგ მიმართულებით), და უარყოფითია, თუ გადაზომილია OX ღერძის ქვევით (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). გარდა ამისა, მიღებულია, რომ კუთხე მოთავსებული უნდა იყოს $-\pi$ და $+\pi$ შორის. r და φ კოორდინატებს პოლარული კოორდინატები ეწოდებათ და ისინი ხშირად გამოიყენებიან სიბრტყეზე წერტილების მდებარეობის განსაზღვრისათვის. კავშირი დეკარტისა და პოლარულ კოორდინატებს შორის ადვილად გამოიყვანება ნახაზიდან:

$$x = r \cdot \cos \varphi,$$

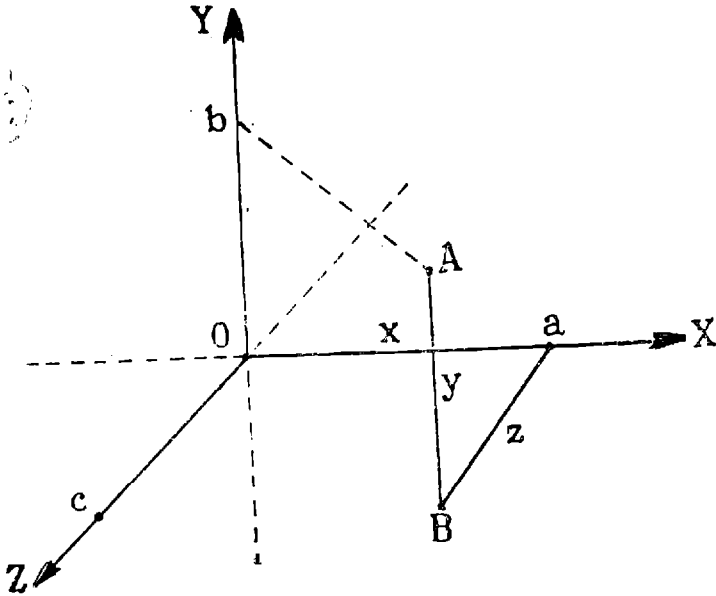
$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

როგორი კოორდინატებიც არ უნდა გამოვიყენოთ სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის — დეკარტისა თუ პოლარული ან კიდევ სხვა, ყველა შემთხვევაში საჭიროა ორი კოორდინატი და არა ერთი, როგორც ეს საკმარისი იყო სწორი ხაზის შემთხვევაში. ამიტომაც ამბობენ, რომ სიბრტყე ორგანზომილებიანია.

გადავიდეთ ახლა მდებარეობის განსაზღვრაზე სივრცეში. ამ შემთხვევაში ათვლის სისტემის O სათავიდან ავლებენ სამ ურთი-

ერთმართობ OX , OY და OZ ღერძს და წერტილის მდებარეობას სასაზღვრავ საში კოორდინატით — x , y და z , რომლებიც წარმოადგენენ ამ ღერძებზე A წერტილის პროექციებიდან — a , b და c წერტილებიდან — სათავემდე მანძილებს, აღებული სათანადო ნიშნით (ნახ. 4).

x , y და z კოორდინატები შემდეგნაირადაც შეიძლება განისაზღვროს. A წერტილიდან XOZ სიბრტყეზე დავუშვათ AB მარ-



ნახ. 4.

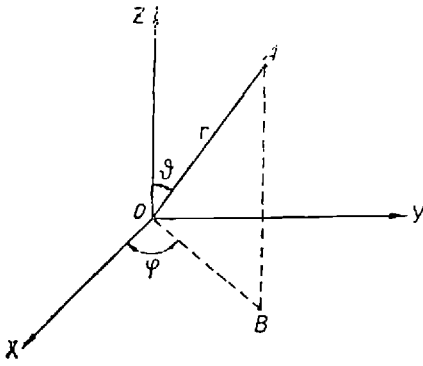
თობი. B წერტილიდან — რომელიც XOZ სიბრტყეზე მდებარეობს, დავუშვათ მართობი OX ღერძზე. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ Oa არის x კოორდინატი, $AB = Ob = y$ კოორდინატი, ხოლო $Ba = Oc$ კი z კოორდინატი.

ისევე როგორც სიბრტყის შემთხვევაში, აქაც შესაძლებელია სხვა კოორდინატთა სისტემის შემოღება.

განვიხილოთ, მაგალითად, სფერული კოორდინატების სისტემა (ნახ. 5), რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება. ერთ-ერთი კოორდინატი არის r მანძილი კოორდინატთა სათავედან A წერტილამდე, მეორე კოორდინატი არის φ კუთხე, რომელსაც OA მონაკვეთი ქმნის OZ ღერძთან, ხოლო მესამე არის θ კუთხე, რომელსაც OA მონაკვეთის OB პროექცია XOY სიბრტყეზე ადგენს OX ღერძთან. ეს სამი სიდიდე სავსებით საზღვრავს A წერტილის მდებარეობას სივრცეში. r , φ და θ კოორდინატების ცვლილების საზღვრები შემდეგია:

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

გარდა დეკარტისა და სფერულ კოორდინატთა სისტემებისა, ხშირად გამოიყენება ცილინდრული კოორდინატების სისტემა, რომელშიც კოორდინატებად მიღებულია ρ კოორდინატი (AB მონაკვეთი), φ კოორდინატი— OB მანძილის ტოლი და θ კუთხე (ნახ. 5).



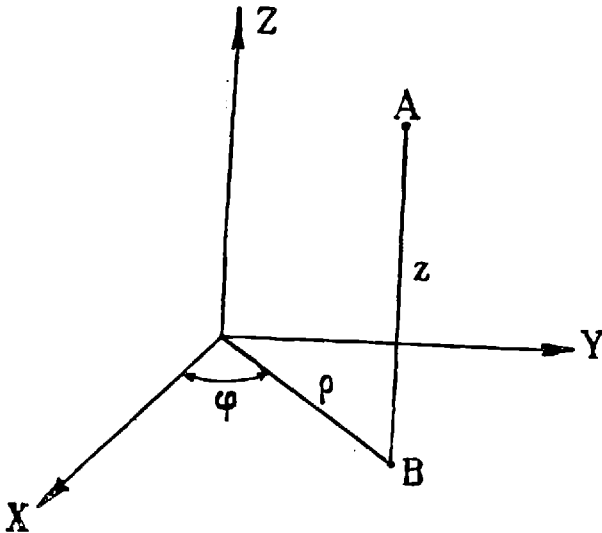
ნახ. 5.

კავშირი ამ კოორდინატებს შორის ასეთია:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. & z &= z. \end{aligned}$$

დამოუკიდებლად იმისაგან, თუ რომელი კოორდინატთა სისტემა იქნება არჩეული, სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა სამი კოორდინატი. ამიტომაც ამბობენ, რომ სივრცე სამგანზომილებიანია.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში შესაძლებელია ღერძების ორნაირი განლაგება —

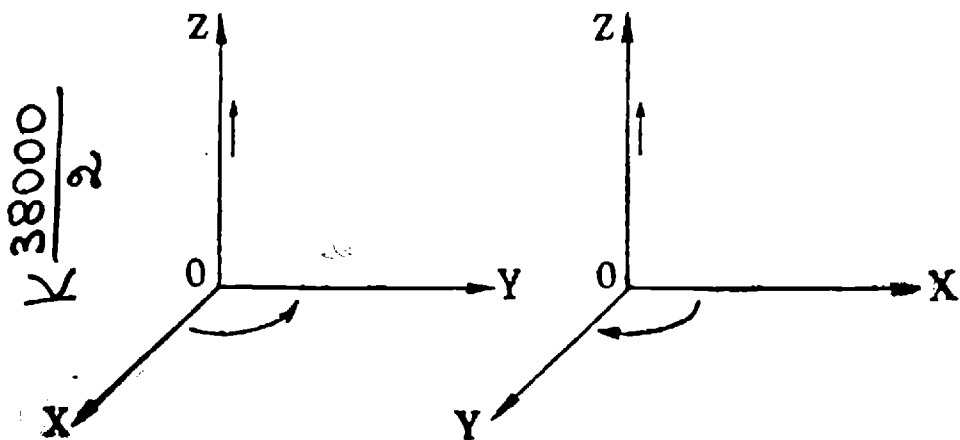


ნახ. 6.

ე. წ. მარჯვენა და მარცხენა კოორდინატთა სისტემები. პირველ შემთხვევაში ღერძები ისეა განლაგებული, რომ როდესაც მაგალითად, OZ ღერძის დადებითი მიმართულებიდან დავხედავთ XOY სიბრტყეს OX ღერძის დამთხვევისათვის OY ღერძზე, უმცირესი

კუთხის მიმართულებით, საჭირო იქნება მისი მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მარცხენა სისტემის შემთხვევაში ასეთი დამთხვევისათვის საჭირო იქნება მობრუნება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ცხადია, რომ ერთი სისტემა, მიიღება მეორიდან ერთ-ერთი ღერძის მიმართულების შეცვლით. ჩვენ თითქმის ყოველთვის გამოვიყენებთ მარჯვენა სისტემას. მარჯვენა სისტემა მას იმიტომ ეწოდება, რომ მარჯვენა ბურღის წვერის გადასანაცვლებლად OZ ღერძის გასწვრივ საჭიროა ბურღის ტარის ბრუნვა OX ღერძიდან OY ღერძისაკენ (ნახ. 7).

გადავიდეთ ახლა დროის განხილვაზე. ცხადია, რომ სხეულების მოძრაობის შესწავლისათვის, გარდა მდებარეობისა, საჭიროა ვიცოდეთ რომელ მომენტში აქვს ნაწილაკს ესა თუ ის მდებარეობა. ისევე როგორც სივრცეში მდებარეობის განსაზღვრის შემთხვევაში, დროის მომენტის განსაზღვრა მოითხოვს დროის რალაც საწყისი



ნახ. 7.

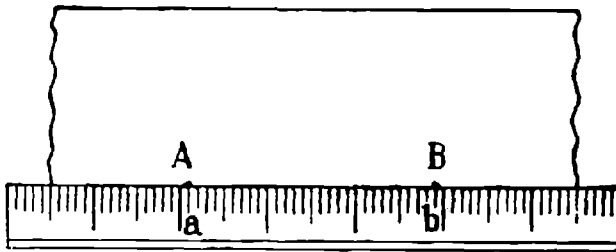
მომენტის არჩევას. ვუწოდოთ დროის ამ მომენტს ნულოვანი მომენტი. ყოველდღიურ ცხოვრებაში, დღე-ღამის განმავლობაში დროის განსაზღვრისათვის ასეთ მომენტად შუალამეა მიღებული. იმის შემდეგ რაც არჩეულია დროს საწყისი მომენტი, დროის სხვა მომენტების განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ რა დრო გავიდა განსახილველ მომენტამდე (ან განსახილველი მომენტიდან) საწყისი მომენტიდან (საწყისი მომენტამდე). საწყისი მომენტიდან განსახილველ მომენტამდე გავლილ დროს აღნიშნავენ t ასოთი და თვლიან მას დადებითად, თუ განსახილველი მომენტი საწყისი მომენტის შემდეგ არის (მომავალი საწყისი მომენტის მიმართ), და უარყოფითად, თუ იგი საწყისი მომენტამდეა (წარსული საწყისი მომენტის მიმართ).

საქართველოს სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ფიზიკის ფაკულტეტი
1971

მიმართ). ეს ერთი t სიდიდით სავსებით საკმარისია დროის ნომენტის განსაზღვრისათვის, თუკი არჩეულია ათვლის სისტემა (სხეული, საიდანაც წარმოებს დროის გაზომვა) და დროის საწყისი მომენტი. ამიტომაც ამბობენ, რომ დრო ერთგანზომილებიანია. გრაფიკულად მას წარმოადგენენ ღერძის სახით, რომელზედაც არჩეულია საწყისი მომენტი და მომავლისა და წარსულის მიმართულებები. ისევე როგორც სივრცის წერტილები თავისთავად არაფრით არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, არც დროის მომენტებს შორის არის რაიმე შინაგანი განსხვავება. ამიტომაც როგორც კოორდინატთა სათავის, ისე დროის საწყისი მომენტის არჩევა სავსებით ნებისმიერია.

§ 2. სივრცისა და დროის გაზომვა. ერთდროულობა

როგორც ზემოთ ვნახეთ, მას შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა და დროის საწყისი მომენტი, ნაწილაკის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა გაიზომოს x , y , z სივრცული კოორდინატები, ხოლო მოვლენის მოხდენის მომენტის განსაზღვრისათვის — საწყისი მომენტიდან განსახილველ მომენტამდე გავლილი t დრო. გამოვარკვეოთ, თუ როგორ ხდება ამ სიდიდეების გაზომვა. გაზომვის პრაქტიკულ ხერხებს ჩვენ არ გავარჩევთ. მათი განხილვა და შესწავლა უნდა მოხდეს პრაქტიკული და ლაბორატორიული მუშაო-



ნახ. 3.

ბის დროს. ჩვენ განვიხილავთ გაზომვებთან დაკავშირებულ მხოლოდ ზოგიერთ პრინციპულ საკითხს.

გავიხსენოთ როგორ ხდება პრაქტიკულად ორ წერტილს შორის მანძილის ან რაიმე სხეულის სიგრძის გაზომვა. ვთქვათ, საჭიროა გაიზომოს მანძილი სხეულის ორ, A და B წერტილს შორის (ნახ. 8). ამისათვის პირველ ყოვლისა, ირჩევენ სიგრძის ეტალონს, ე. ი. ისეთ სხეულს, რომლის გარკვეული a და b წერტილებს შორის მანძილი მიღებულია ერთეულად. ჩვეულებრივად ამ ეტალონს აქვს ბრტყელი ღეროს ფორმა (სახაზავი, მეტრი, საზომი ლენტი და სხვა). ეტალონს შეახებენ განსახილველ სხეულს ისე, რომ ეტალო-

ნის „წერტილი თანხედეს სხეულის A წერტილს. თუ ეტალონის b წერტილი თანხედა სხეულის B წერტილს, ჩვენ ვიტყვით, რომ AB მანძილი ერთი ერთეულის ტოლია (თუ რა ერთეულია, ამას ჩვენთვის ახლა მნიშვნელობა არა აქვს). მაგრამ საზოგადოდ ეტალონის b წერტილი შეიძლება არ თანხედეს სხეულის B წერტილს. ამ შემთხვევაში ეტალონს რამდენჯერმე გადაზომავენ A და B წერტილებს შორის (იმ შემთხვევაში, როცა AB მანძილი ეტალონის სიგრძეზე მეტია) ან ყოფენ მას წილად ნაწილებად და ამ ნაწილების საშუალებით ახდენენ გაზომვას (მაგალითად, მეტრი იყოფა დეციმეტრებად, სანტიმეტრებად და ა. შ.). ამ გაზომვის შედეგად მიღებული რიცხვი (მთელი ან წილადი), რომელიც გვიჩვენებს რამდენჯერ მეტია გასაზომი მანძილი ეტალონის სიგრძეზე, იქნება სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობა. სიგრძის გაზომვა, ისე როგორც ყოველი გაზომვა, ნიშნავს გასაზომი სიდიდის შედარებას არჩეული ეტალონის სიდიდესთან.

როგორ უნდა შევარჩიოთ სხეულების სიგრძის გასაზომად გამოსადეგი ეტალონი? ცხადია, ეტალონი ისეთი მასალისაგან უნდა იყოს დამზადებული, რომ იგი არ განიცდიდეს შესამჩნევ ცვლილებებს გარეშე მოქმედების შედეგად; ეს იმას ნიშნავს, რომ ეტალონი მყარ სხეულს უნდა წარმოადგენდეს. პრაქტიკულად ეტალონს ამზადებენ ან ფოლადისაგან, ან რაც შეიძლება მაგარი შენადნობისაგან. მაგრამ აქ ასეთი კითხვა ისმის — როგორ გავიგოთ, ეტალონის სიგრძე უცვლელია თუ არა? ამისათვის, ცხადია, საჭიროა მისი სიგრძის გაზომვა და დადგენა იმისა, რომ გარეშე მოქმედებანი ვერ ცვლიან მას. მაგრამ არჩეული ეტალონის სიგრძის გაზომვა თვითონ შოიბოვს ახალ ეტალონს, რომლის მიმართაც ისეთივე მოთხოვნა უნდა იქნეს წაყენებული როგორც პირველის მიმართ. ვლებულობთ ლოგიკურ წრეს: სიგრძის გასაზომად საჭიროა ისეთი ეტალონის არჩევა, რომლის სიგრძე უცვლელი იქნება, მაგრამ იმის დასადგენად, რომ ეტალონის სიგრძე უცვლელია, საჭიროა მისი გაზომვა. როგორც ვხედავთ, სიგრძის გაზომვა პრინციპული თვალსაზრისით საკმაოდ რთულ ოპერაციას წარმოადგენს. დასმული საკითხის დეტალური განხილვა ძალიან შორს წაგვიყვანდა. ჩვენ შევეცდებით მხოლოდ ზოგადად გამოვარკვიოთ რა გარემოება იწვევს აღნიშნულ სიძნელეს.

კარგად უნდა იქნეს გაგებული, რომ თვით საკითხის დასმა ამა თუ იმ სიდიდის (ჩვენს შემთხვევაში სიგრძის) ცვალებადობის ან უცვლელობის შესახებ იმის აღუნიშნავად, თუ რომელი მეორე სიდიდის მიმართ განიხილება ეს ცვალებადობა, სრულიად უაზროა.

როდესაც ჩვენ ვამბობთ, რომ აღებული სხეულის სიგრძე გაიზარდა, აუცილებლად ვგულისხმობთ, რომ ეს გაზრდა მოხდა რაღაც სხვა სხეულთან შედარებით. არ შეიძლება ლაპარაკი ერთი, ცალკე აღებული სხეულის სიგრძის ცვლილებაზე; ამიტომაც იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ სიგრძის უცვლელობა, საჭიროა ორი სხეულის განხილვა. თუ ორი ეტალონი ისეთი თვისებისაა, რომ მათი სიგრძეები ტოლია, რომელ მომენტში ან რომელ მდგომარეობაშიც არ უნდა ვაღარებდეთ მათ ერთმანეთს, ჩვენ ვიტყვით, რომ მათი სიგრძე უცვლელია. რასაკვირველია, აბსოლუტურად უცვლელი სიგრძის სხეულები ბუნებაში არ არის, მაგრამ ამა თუ იმ მიახლოებით ყოველთვის შეიძლება ასეთი ეტალონების დამზადება.

ყველაფერი, რაც ჩვენ ვთქვით სიგრძის გაზომვასთან დაკავშირებული პრინციპული სიძნელების შესახებ, იგივე შეიძლება ითქვას დროის გაზომვის შესახებაც. ჩვენ ვიცით, რომ დრო პრაქტიკულად იზომება საათის საშუალებით. საათის (როგორც დროის საზომი იარაღის) დამახასიათებელი ის არის, რომ მასში მიმდინარეობს განმეორებადი პროცესი და დროის შუალედი ყოველ მომდევნო განმეორებათა შორის მიღებულია ერთეულად. პრინციპულად არა აქვს მნიშვნელობა იმას, თუ რომელ განმეორებად პროცესს ავარჩევთ დროის გასაზომად. ასეთ პროცესად შეიძლება ავარჩიოთ დედამიწის ბრუნვა ღერძის ირგვლივ ან, რაც იგივეა, ვარსკვლავების დღეღამური მოძრაობა, საქანის რხევა, სინათლის პერიოდული გავრცელება ორ უძრავ სარკეს შორის, ქვიშის ჩამოყრა ქვიშის საათში და სხვა. იმის შემდეგ, რაც არჩეულია დროის ეტალონი, დროის შუალედის გაზომვა ხდება ამ შუალედის საწყისი და ბოლო მომენტების და ეტალონის სათანადო მომენტების თანხვედრის დადგენით; ამ შემთხვევაშიც შეიძლება დაისვას კითხვა, გვიჩვენებს თუ არა საათი დროის ერთსა და იმავე შუალედს ყოველ ორ განმეორებას შორის. შუალედების ეს ტოლობა საჭიროა იმისათვის, რომ საათმა შესძლოს თავისი დანიშნულების შესრულება. მაგრამ შემოწმება იმისა, რომ საათის მიერ ნაჩვენები დროის შუალედები ტოლი სიდიდისაა, ისევ მოითხოვს მათ გაზომვას, ე. ი. შედარებას მეორე საათის ჩვენებასთან; ამიტომაც ამ შემთხვევაშიც უაზროა ლაპარაკი საათის ჩვენების სისწორეზე, თუ არ არის მეორე საათი (ე. ი. პერიოდული მოვლენა), რომელთანაც ხდება პირველი საათის შედარება. ჩვენ ვერ დავსვამთ კითხვას იმის შესახებ, მოძრაობს თუ არა საათის ისარი თანაბრად, სანამ არ იქნება აღნიშნული რომელ მეორე საათთან ხდება ამ საათის შედარება.

ისე როგორც სიგრძის შემთხვევაში, აქაც საჭიროა ორი საათის

გამოყენება. თუ ორი საათი ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებს, როგორ პირობებშიც არ უნდა ვამყოფოთ ისინი, ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მათი ისრები თანაბრად მოძრაობენ ერთმანეთის მიმართ. მაგრამ სიგრძისაგან განსხვავებით აქ წარმოიშვება კიდევ ერთი საკითხი. ის ფაქტი, რომ ორი საათი ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებს, ადვილი დასადგენია იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე საათი სივრცის ერთსა და იმავე ადგილასაა. მაგრამ, თუ ისინი დაშორებულია ერთმანეთისაგან, მათი ჩვენების ერთდროულობა უკვე მოითხოვს დამატებით განსაზღვრას. მართლაც, რას ვგულისხმობთ, როდესაც ვამბობთ, რომ, მაგალითად, ერთი მოვლენა დედამიწაზე, ხოლო მეორე მოვლენა მზეზე ერთდროულად მოხდა? მზეზე მომხდარი მოვლენის დანახვა რაიმე მომენტში, რომელიც დედამიწაზე მოთავსებული საათით არის აღნიშნული, სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ ეს მოვლენა სწორედ ამ მომენტში მოხდა, ვინაიდან სინათლის სხივს გარკვეული დრო სჭირდება იმისათვის, რომ მზიდან მოაღწიოს დედამიწამდე. მაშასადამე, მზეზე ეს მოვლენა მომხდარა უფრო ადრე, ვიდრე მის შესახებ ცნობა მოვიდა დედამიწაზე. იმის გასაგებად, თუ რამდენად ადრე მოხდა მოვლენა, საჭიროა ვიცოდეთ სინათლის გავრცელების სიჩქარე. მეორე მხრივ, სინათლის გავრცელების სიჩქარის განსაზღვრისათვის უნდა ვიცოდეთ რას ნიშნავს სხვადასხვა ადგილას მოთავსებული საათების ჩვენებათა ერთდროულობა. სხვადასხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა ფრიად მნიშვნელოვანი ცნებაა. მისი განსაზღვრის გარეშე არ შეიძლება, მაგალითად, ისეთი ძირითადი ცნების განსაზღვრა როგორც არის სიჩქარე. ვთქვათ, A წერტილიდან რომელიმე B წერტილამდე მოძრაობს სხეული. ჩვეულებრივად სიჩქარის გასაგებად საჭიროა A და B წერტილებს შორის მანძილის გაყოფა დროზე, რომელიც დასჭირდა სხეულს B წერტილში მისვლისათვის. A -დან გასვლის მომენტი ჩვენთვის ცნობილია A -ში მდებარე საათის საშუალებით. როგორ გავიგოთ, როდის მივიდა სხეული B წერტილში ან, რაც იგივეა, როგორ გავიგოთ, რომ B წერტილში მდებარე საათი გვიჩვენებს იმავე დროს, რასაც A -ში მდებარე საათი? საქმე იმაშია, რომ ამის დადგენა შეუძლებელია, სანამ არ იქნება განსაზღვრული რას ნიშნავს სხვადასხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა; ამ განსაზღვრის გამოყვანა კი სიგრძის და ერთ ადგილას დროის განსაზღვრებიდან შეუძლებელია. ჩვეულებრივად თვლიან, რომ ერთდროულობა შემდეგნაირად შეიძლება დავადგინოთ. ავიღოთ ორი საათი, რომლებიც ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებენ აღებულ ადგილას. გადავიტა-

ნოთ ერთ-ერთი მათგანი სივრცის მეორე ადგილას. მივიღოთ განსაზღვრის სახით, რომ ასე გადატანილი საათი გვიჩვენებს იმავე დროს, რასაც დარჩენილი საათი. შეიძლება შემოვიღოთ სხვა განსაზღვრაც—რაღაც განსაზღვრა აუცილებლად საჭიროა.

ყოველივე ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ სივრცესა და დროში მოვლენების მიმდინარეობის შესამჩნევად საჭიროა სამი ცნების განსაზღვრა: სიგრძის, დროის ინტერვალისა და სხვადასხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობისა. სიგრძის საშუალებით ჩვენ ვსაზღვრავთ მანძილებს სივრცეში, დროის ინტერვალი საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ერთ ადგილას მომხდარი მოვლენების თანამიმდევრობა, ხოლო სხვადასხვა ადგილას მომხდარი მოვლენების ერთდროულობა ერთმანეთთან აკავშირებს სხვადასხვა ადგილას მიმდინარე დროს. ერთდროულობის განსაზღვრის შემდეგ ჩვენ შევძლებთ ერთმანეთთან დავაკავშიროთ სხვადასხვა ადგილას მდებარე საათები და მოვმართოთ ისინი ისე, რომ გვიჩვენებდნენ ერთსა და იმავე დროს; ასეთი საათების შესახებ ამბობენ, რომ ისინი სინქრონიზებულია.

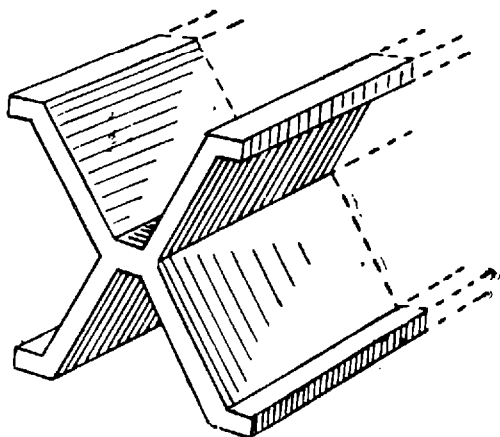
§ 3. სივრცისა და დროის ეტალონები და ერთეულები

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სიგრძისა და დროის გაზომვისათვის საჭიროა გარკვეული ეტალონების არჩევა. ყოველდღიური ცხოვრების საჭიროებისათვის სხვადასხვა ხალხს მრავალი სხვადასხვა ეტალონი ჰქონდა (არშინი, ფუტი, ადლი, მილი და სხვ.); ზოგ მათგანს ახლაც ხშირად იყენებენ, მაგრამ საბოლოოდ როგორც მეცნიერებაში, ისე ყოველდღიურ ცხოვრებაში არჩეულ იქნა სავსებით გარკვეული ეტალონები, რომლებიც საერთაშორისო ეტალონებადაა მიჩნეული.

სიგრძის ეტალონად არჩეულია მეტრი. დასაწყისში მეტრი განსაზღვრული იყო როგორც დედამიწის მერიდიანის სიგრძის მეორმოცმილიონედი ნაწილი. მის დასადგენად საფრანგეთის აკადემიის კომისიამ (1791—1799 წლებში) წინათ არსებული სიგრძის ერთეულით (ტუაზით) გაზომა მერიდიანის გარკვეული ნაწილი, გამოთვალა მთელი მერიდიანის სიგრძე და დაამზადა ეტალონი ე. წ. არქივული მეტრი, რომლის ბოლოებს შორის მანძილი წარმოადგენდა (იმდროინდელი სიზუსტით) მერიდიანის სიგრძის მეორმოცმილიონედ ნაწილს. მაგრამ შემდგომმა, უფრო ზუსტმა, გაზომვებმა ცხადჰყვეს, რომ ასეთნაირად დამზადებული მეტრის სიგრძე არ უდრის ზუსტად მერიდიანის სიგრძის მეორმოცმილიონედ ნაწილს. თუ შენარჩუნებული იქნებოდა მეტრის პირვანდელი განსაზღვრა,

საჭირო გახდებოდა ახალი, უფრო ზუსტი, ეტალონების დამზადება და ასეთი განუწყვეტელი შეცვლა ეტალონისა საჭირო იქნებოდა გაზომვის სიზუსტის ყოველი გადიდების დროს. ასეთი ცვლილებების საჭიროების თავიდან ასაცილებლად 1872 წელს მიღებულ იქნა საერთაშორისო შეთანხმება, რომ მეტრი ეწოდოს არა მერიდიანის მეორმოცმილიონედ ნაწილს, არამედ ერთხელ და სამუდამოდ დამზადებული ეტალონის ორ დანაყოფს შორის მანძილს. ამისათვის დამზადებულ იქნა არქივული მეტრის 31 ასლი (უკვე სხვა ფორმის და სხვა მასალისაგან), რომლებიც შედარებულ იქნა ერთმანეთთან და არქივულ მეტრთან. გამოიჩვენა, რომ ერთ-ერთი მათგანი ტემპერატურის 0-ზე ზუსტად არქივული მეტრის ტოლი იყო. ზომითა და წონათა პირველი გენერალური კონფერენციის დადგენილებით (1889 წ.) იგი მიღებულ იქნა მეტრის საერთაშორისო ეტალონად. მაშასადამე, მეტრი ახლა ასე განისაზღვრება: მეტრი არის მანძილი იმ ეტალონის ორ გარკვეულ დანაყოფს შორის, რომელიც ინახება ზომათა და წონათა საერთაშორისო ბიუროში ქ. სევრში (პარიზის მახლობლად). საერთაშორისო მეტრი დამზადებულია 90% პლატინისა და 10% ირიდიუმის შემცველი შენადნობისაგან და მას აქვს მე-9 ნახაზზე ნაჩვენები ფორმა.

ასეთი ფორმის დეროს ჩაღრმავებული ჰორიზონტალური ზედაპირი განსაკუთრებით ძლიერად ეწინააღმდეგება გაღუნვას. შტრიხები (რომელთა შორის მანძილიც არის მეტრი) გაკეთებულია ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, რომელიც ზედა ჩაღრმავების ფსკერს წარმოადგენს.



ნახ. 9.

დარჩენილი 30 ასლიდან ორი დატოვებულ იქნა საერთაშორისო ბიუროში ძირითადი ეტალონის საკონტროლოდ, ხოლო 28 ეტალონი კენჭის ყრით განაწილდა სხვადასხვა სახელმწიფოს შორის. რუსეთს ერგო ორი ეტალონი — № 11 და № 18. უკანასკნელი მიღებულია საბჭოთა კავშირისათვის მეტრის ძირითად ეტალონად. მისი სიგრძე ცელსიუსის 0-ზე მხოლოდ 0,5 μ -ით განსხვავდება საერთაშორისო მეტრის სიგრძისაგან (μ ასოთი აღინიშნება მიკრონი — მილიმეტრის მეათასედი ნაწილი).

ვინაიდან ხშირად საჭიროა როგორც ძალიან მცირე, ისე დიდი სიგრძეების გაზომვა, შემოღებულია მეტრის ჯერადი ერთეულები. ეს ერთეულებია: დეციმეტრი — მეტრის მეათედი, სანტიმეტრი — მეტრის მეასედი, კილომეტრი — ათასი მეტრი და ა. შ. 1-ლ

ცხრილი 1

სიგრძის ზომა	საერთა-შორისო აღნიშვნა	ფარდობა ძირითად ერთეულთან
მეტრი	m	1
კილომეტრი	km	10^3
დეციმეტრი	dm	10^{-1}
სანტიმეტრი	cm	10^{-2}
მილიმეტრი	mm	10^{-3}
მიკრონი	μ	10^{-6}
მილიმიკრონი	m μ	10^{-9}
ანგსტრემი	Å	10^{-10}

ცხრილში მოყვანილია მეტრის ჯერადი და წილადი ერთეულები.

ბოლო წლებში მიზანშეწონილად ითვლება სიგრძის ეტალონის შეცვლა. ვინაიდან მოსალოდნელია საერთაშორისო მეტრის სიგრძის შეცვლა (ლითონში მიმდინარე პროცესების ან გარეშე მექანიკური და სითბური მოქმედების გამო), უფრო ხელსაყრელი იქნება სიგრძის ეტალონად ავირჩიოთ ბუნებაში განხორციელებული და ადვილად აღსადგენი სიგრძის ერთეული, რომლის ცვლა უფრო ნაკლებად მოსალოდნელია, ვიდრე ნივთიერი მეტრისა. ასეთ ეტალონად ფიქრობენ აირჩიონ გარკვეული სიხშირის მქონე სინათლის ტალღის სიგრძე. მაგალითად, კადმიუმის ერთ-ერთი სპექტრული ხაზის სათანადო ტალღის სიგრძე. უფრო დაწვრილებით ეს საკითხი განიხილება ოპტიკისადმი მიძღვნილ ნაწილში.

ახლა განვიხილოთ დროის ეტალონი. ძირითად განმეორებად მოვლენას, რომელიც გამოიყენება დროის ეტალონის დასადგენად, წარმოადგენს დედამიწის ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. ვინაიდან დედამიწის ბრუნვის დამზერა შეიძლება მხოლოდ ციურ სხეულებზე დაკვირვების საშუალებით, დროის ეტალონი განისაზღვრება ან ვარსკვლავების, ან მზის მოძრაობის საშუალებით. ვარსკვლავიერი დღე-ღამე განისაზღვრება როგორც დრო დედამიწის ერთხელ შემობრუნებისა ვარსკვლავების მიმართ. ირჩევა ისეთი ვარსკვლავი, რომელსაც არა აქვს შესამჩნევი საკუთარი მოძრაობა. მაგრამ ტექნიკური მიზეზების გამო ვარსკვლავიერი დრო განისაზღვრება არა დედამიწის ბრუნვით ვარსკვლავების მიმართ, არამედ გაზაფხულის ბუნობის წერტილის მიმართ (იხ. ასტრონომიის კურსი). ვარსკვლავიერი დღე-ღამე იყოფა 24 საათად. ყოველი საათი იყოფა 60 მინუტად (წუთად), ხოლო მინუტი 60 სეკუნდად (წამად).

ჩვეულებრივი მიზნებისათვის (ყოველდღიური გამოყენებისათვის) ვარსკვლავიერი დრო არ გამოდგება. ვინაიდან იგი არ ეთანხმება მზის ხილულ მოძრაობას, ამიტომაც შემოღებულია ე. წ. საშუალო

მზიური დრო. მისი განსაზღვრა შემდეგნაირად წარმოებს. ე. წ. ტროპიკული წლის განმავლობაში (გაზაფხულის ბუნიობის წერტილის მიმართ) დედამიწა ასრულებს 366,2422 ბრუნს თავისი ღერძის ირგვლივ. ამ დროის განმავლობაში დედამიწა ერთხელ შემოუვლის მზეს, რის გამოც მისი ბრუნთა რიცხვი მზის მიმართ ერთით ნაკლები იქნება. მაშასადამე, მზის მიმართ იგი შეასრულებს 365,2422 ბრუნს; აქედან ვღებულობთ შემდეგ კავშირს:

$$366,2422 \text{ ვარსკვლავიერი დღე-ღამე} = 365,2422 \text{ საშუალო მზიური დღე-ღამე}$$

ან

$$24 \text{ ვარსკვლავიერი საათი} = 23 \text{ სთ, } 54 \text{ მინ, } 4,091 \text{ სეკ საშუალო მზიური დროისა.}$$

ფიზიკაში დროის ერთეულად აღებულია საშუალო მზიური დღე-ღამის $1/86400$ ნაწილი. დროის ამ შუალედს ეწოდება სეკუნდი (იგი ცოტათი მეტია, ვიდრე ვარსკვლავიერი სეკუნდი). მისგან შეიძლება მივიღოთ წარმოებული ერთეულები (ცხრ. 2).

ბოლო ხანებში გამოითქვა მოსაზრება იმის შესახებ, რომ დედამიწის დღელამური ბრუნვის მაგიერ უფრო მიზანშეწონილია ეტალონად სხვა განმეორებადი პროცესის აღება. ეს იმით საბუთდება, რომ მექანიკის კანონების თანახმად დედამიწის შიგნით ან მის ზედაპირზე მასების ყოველმა გადაანაცვლებამ უნდა გამოიწვიოს დედამიწის ბრუნვის სიჩქარის შეცვლა. ვინაიდან მასების ასეთი გადაანაცვლება ყოველთვის წარმოებს, დედამიწის ბრუნვა არ უნდა იყოს თანაბარი. ამიტომაც ახლა ცდილობენ დროის ეტალონად გამოიყენონ კრისტალების მექანიკური რხევები (კვარცის საათი) ან მოლეკულების ოპტიკური რხევები (ატომური საათი); ამ ეტალონების განხორციელების საკითხს ჩვენ განვიხილავთ კურსის სათანადო ნაწილში.

ცხრილი 2

დრო	საერთაშორისო აღნიშვნა
დღე-ღამე	--- 86400 სეკ
საათი	--- 3600 "
მინუტი	--- 60 "
სეკუნდი	--- 1 "
მილისეკუნდი	--- 0.001 "
მიკროსეკუნდი	--- 10^{-6} "
	h min sec msec μsec

§ 4. ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება და ერთეულთა სისტემები

ფიზიკური მოვლენების განხილვის დროს ჩვენ გვჭირდება სხვადასხვაგვარი სიდიდეების შემოღება (სიჩქარე, აჩქარება, მასა, ძალა, ენერჯია და ა. შ.) და მათ შორის კავშირის დამყარება. როგორც

ირკვევა, ყოველი ახალი სიდიდე უკავშირდება წინათ შემოღებულ სიდიდეებს ან განმსაზღვრელი ფორმულით, ან ახალი ექსპერიმენტული კანონით. ფიზიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია, მაგალითად, რომ სიჩქარე გამოიხატება მანძილისა და დროის საშუალებით, კინეტიკური ენერჯია მასისა და სიჩქარის საშუალებით და ა. შ. ასეთი ურთიერთკავშირები ფიზიკურ სიდიდეებს შორის გვიჩვენებენ, რომ ყოველი მათგანი შეიძლება გამოვხატოთ რამდენიმე წინასწარ არჩეული სიდიდის საშუალებით. იმ ფიზიკურ სიდიდეებს, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება გამოიხატოს ყოველი ფიზიკური სიდიდე, ძირითადი სიდიდეები ეწოდებათ. დანარჩენი სიდიდეები კი წარმოადგენენ ე. წ. წარმოებულ სიდიდეებს. ძირითადი სიდიდეები აღარ შეიძლება გამოვხატოთ სხვა სიდიდეების საშუალებით, მათი განსაზღვრა შეიძლება მხოლოდ ეტალონების საშუალებით.

რამდენი ფიზიკური სიდიდე უნდა ავიღოთ როგორც ძირითადი? ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა კავშირი არსებობს სხვადასხვა ფიზიკურ სიდიდეებს შორის. როგორც ფიზიკურ კანონზომიერებათა ანალიზი გვიჩვენებს, ყველაზე უფრო მიზანშეწონილია სამი ძირითადი სიდიდის არჩევა. რასაკვირველია, ამ ძირითადი სიდიდეების არჩევა ნაწილობრივ ნებისმიერია, მაგრამ ისტორიულად ასეთ სიდიდეებად არჩეული იყო — სიგრძე, დრო და მასა. მათი არჩევა ძირითად სიდიდეებად საკმაოდ მიზანშეწონილია, ვინაიდან ისინი წარმოადგენენ მატერიალური სამყაროს შინაარსისა და ფორმების — მატერიის, სივრცისა და დროის დამახასიათებელ ფიზიკურ სიდიდეებს. ერთეულთა სისტემას, რომელშიც ძირითად ერთეულებად აღებულია სიგრძე, დრო და მასა, ერთეულთა აბსოლუტური სისტემა ეწოდება.

გამოსახულებას, რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ არის დამოკიდებული განსახილველი სიდიდის ერთეული ძირითადი სიდიდეების ერთეულებზე, ეწოდება ამ სიდიდის განზომილება და აღნიშნება კვადრატულ ფორჩხილებში ჩასმული სიდიდის სიმბოლოთი; მაგალითად, სიგრძის განზომილება იქნება $[l]$, დროის განზომილება $[t]$, იმპულსის განზომილება $[mv]$ და ა. შ. გამარტივების მიზნით ძირითადი სიდიდეების განზომილებისათვის შემოღებულია აღნიშვნა სათანადო დიდი ასოთი:

$$[l] = L, [t] = T, [m] = M.$$

სხვა სიდიდეების განზომილება შეიძლება გამოისახოს მათი საშუალებით. თუ რაიმე A ფიზიკური სიდიდე ძირითადი სიდიდეების საშუალებით შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$A = k_1 \alpha_1^2 m \gamma, \quad (I,1)$$

სადაც k_1 პროპორციულობის კოეფიციენტი, მისი განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[A] = [k_1] L^2 T^2 M^{-1}; \quad (I,2)$$

ამ ფორმულაში შედის k_1 კოეფიციენტის განზომილება, ვინაიდან ზოგ შემთხვევაში იგი შეიძლება არ იყოს განყენებული სიდიდე: ასეთია ზოგადი ფორმულა განზომილებისათვის. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი. სიჩქარისა და აჩქარების განზომილებანი ადვილად მიიღებიან მათი განმსაზღვრელი ფორმულებიდან:

$$[v] = LT^{-1}; [a] = LT^{-2}.$$

ასევე გამოიყვანება კუთხური სიჩქარისა და აჩქარების განზომილებები:

$$[\omega] = T^{-1}, [\epsilon] = T^{-2}.$$

ადვილად შეიძლება მოიძებნოს იმპულსის განზომილება

$$[mv] = MLT^{-1}$$

და სხვა ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება.

ხშირად ხდება, რომ აღებული ფიზიკური სიდიდე ორი სხვადასხვა ფორმულით არის დაკავშირებული სხვა ფიზიკურ სიდიდეებთან (მაგალითად, ძირითად სიდიდეებთან)

$$A = k_1 \alpha_1^2 m \gamma$$

და

$$A = k_2 \alpha_2^2 m \gamma_1;$$

აქედან განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[A] = [k_1] L^2 T^2 M^{-1},$$

$$[A] = [k_2] L^2 T^2 M^{-1}.$$

ეს ფორმულები ნათლად გვიჩვენებენ, რომ k_1 და k_2 კოეფიციენტებს არ შეიძლება ჰქონდეს ერთი და იგივე განზომილება. თუ, მაგალითად, პირველი ფორმულის k_1 კოეფიციენტი განყენებულ სიდიდედ ჩავთვალოთ, k_2 კოეფიციენტის განზომილებისათვის მივიღებთ:

$$[k_2] = L^2 T^2 M^{-1}.$$

განვიხილოთ მაგალითისათვის ძალის გამომსახველი ორი ფორმულა: ერთი, რომელიც ძალას აკავშირებს მასასა და აჩქარებასთან

$$F = ma \text{ (ნიუტონის მეორე კანონი),}$$

და მეორე, რომელიც გამოხატავს სხეულებს შორის მოქმედ გრავიტაციულ ძალას

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{ნიუტონის მიზიდულობის კანონი});$$

პირველ ფორმულაში პროპორციულობის კოეფიციენტი განყენებული სიდიდეა და რიცხობრივად ერთის ტოლია. ამიტომ მეორე ფორმულის γ კოეფიციენტი გარკვეული განზომილების მქონე უნდა იყოს. იგი მიიღება შემდეგი ფორმულიდან:

$$[\gamma] \frac{[m_1][m_2]}{[r]^2} = [m][a],$$

საიდანაც გვექნება

$$[\gamma] = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

თუ γ კოეფიციენტს განყენებულ სიდიდედ ჩავთვლით, პირველ ფორმულაში საჭირო იქნება კოეფიციენტის შემოღება და მისთვის განზომილების მიწერა.

ფიზიკური სიდიდეების განზომილებათა განხილვის დროს უნდა მიექცეს ყურადღება ერთ მნიშვნელოვან გარემოებას. ვთქვათ, რაიმე A ფიზიკური სიდიდის განზომილება ცნობილია და ჩვენ ვეძებთ ამ სიდიდის დამოკიდებულებას სხვა ფიზიკურ სიდიდეებზე: $B, C, D \dots$ დავუშვათ, რომ ეს დამოკიდებულება შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$A = k B^\alpha C^\beta D^\gamma \dots$$

ამ ფორმულის სისწორისათვის აუცილებელია (მაგრამ საკმარისი არ არის) რომ მის ორივე მხარეს ერთნაირი განზომილება ჰქონდეს

$$[A] = [k] [B]^\alpha [C]^\beta [D]^\gamma \dots$$

არ შეიძლება მართებული იყოს ფორმულა, რომლის მარცხენა და მარჯვენა მხარე სხვადასხვა განზომილებისაა. ორი მხარის განზომილებებს შორის განსხვავება იმისი მაჩვენებელი იქნება, რომ ფორმულა არ არის სრული; რომ დავიწყებულია დამოკიდებულება რაღაც სხვა ფიზიკურ სიდიდეზე.

ის გარემოება, რომ ტოლობის ორივე მხარეს ერთი და იგივე განზომილება უნდა ჰქონდეს, ხშირად გამოიყენება ტოლობის სახის დასადგენად, ე. ი. ფიზიკურ სიდიდეებს შორის გარკვეული დამოკიდებულების დასამყარებლად. ამისათვის საჭიროა დაშვებულ ან დადგენილ იქნეს, თუ რა სიდიდეებზეა დამოკიდებული განსახილველი სიდიდე. მაგრამ განზომილების ტოლობის პირობა არ გვაძ-

ლევს შესაძლებლობას განვსაზღვროთ ფორმულაში შემავალი განზომილების არმქონე სიდიდეები (განყენებული რიცხვები). მაგალითისათვის განვიხილოთ მათემატიკური საქანის ფორმულა. ცნობილია და ჩვენ მიერაც იქნება შემდეგში დადგენილი, რომ l სიგრძის მქონე მათემატიკური საქანის პერიოდი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

სადაც g არის სიმძიმის ძალის აჩქარება. ვნახოთ, ხომ არ შეიძლება ამ ფორმულის სახის დადგენა განზომილების ტოლობის პირობის საშუალებით. დავუშვათ, რომ პერიოდი დამოკიდებულია სიგრძეზე, აჩქარებაზე და საქანის მასაზე. თუ მასას m -ით აღვნიშნავთ, ეს დამოკიდებულება გამოისახება შემდეგი ზოგადი ფორმულით:

$$T = kl^\alpha m^\beta g^\gamma. \quad (I,3)$$

α , β და γ ხარისხის მაჩვენებლები ისე უნდა შეირჩეს, რომ ორივე მხარეს ერთი და იგივე განზომილება ჰქონდეს. განზომილებათა ჩასმა მოგვცემს

$$T = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma};$$

აქედან შემდეგ პირობებს ვღებულობთ:

$$\beta = 0, \quad \alpha = -\gamma, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

მხოლოდ ასეთ შემთხვევაში ექნება მარჯვენა მხარეს დროის განზომილება. (IV,19) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$T = kl^{1/2} g^{-1/2}$$

ან

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (I,4)$$

სადაც k განზომილების არმქონე სიდიდეა (როდესაც განზომილების ფორმულიდან თვით სიდიდეების დამაკავშირებელ ფორმულაზე გადავდივართ, აუცილებლად შემოვა განზომილების არმქონე სიდიდე). ჩვენ მივიღეთ საქანის პერიოდის ფორმულა, მაგრამ არა სრული სახით. განზომილებათა შედარებით k სიდიდის რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრა შეუძლებელია. ის ფაქტი, რომ იგი 2π -ს ტოლია, შეიძლება დადგინდეს მხოლოდ მოძრაობის განტოლებების განხილვის შედეგად. თვით ის გარემოებაც, რომ (I,4) ფორმულას ისეთივე სახე აქვს, როგორიც ზუსტ ფორმულას, იმასთანაა დაკავ-

შირებულნი, რომ პერიოდი ჩვენ ჩავთვალეთ მხოლოდ სიგრძეზე, მასაზე და სიმძიმის ძალის აჩქარებაზე დამოკიდებულია. რომ დაგვეშვა აგრეთვე დამოკიდებულება რხევის x ამპლიტუდაზე, სულ სხვა შედეგს მივიღებდით, მართლაც, ამ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$T = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} x^{\delta},$$

ხოლო განზომილებისათვის

$$T = L^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} T^{-\beta} L^{\delta};$$

საიდანაც მივიღებდით:

$$\beta = 0,$$

$$\gamma = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha + \delta = \frac{1}{2}.$$

და α და δ ხარისხის მაჩვენებლების შერჩევა ნაწილობრივ ნებისმიერი იქნებოდა. სხვადასხვა არჩევის მიხედვით მივიღებთ სულ სხვადასხვა ფორმულებს:

$$T = k \sqrt{\frac{l^2}{gx}}, \quad T = k \sqrt{\frac{x^2}{gl}} \text{ და ა. შ.}$$

რასაკვირველია, ყველა ამ ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}} f\left(\frac{x}{l}\right),$$

სადაც $f\left(\frac{x}{l}\right)$ არის განზომილების არმქონე $\left(\frac{x}{l}\right)$ სიდიდის ნებისმიერი ფუნქცია, რომლის სახის განსაზღვრა განზომილებათა შედარებით შეუძლებელია.

ახლა განვიხილოთ საკითხი ფიზიკური სიდიდეების ერთეულების შესახებ. ფიზიკაში სიგრძისა და დროისათვის ძირითადად შემდეგი ერთეულებია შერჩეული; 1. აბსოლუტურ თეორიულ სისტემაში — სიგრძისათვის სანტიმეტრი (*cm*) და დროისათვის სეკუნდი (*sec*).

2. აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში — სიგრძისათვის მეტრი (*m*) და დროისათვის სეკუნდი (*sec*).

იმისათვის, რომ მივიღოთ ძირითად ერთეულთა სრული სისტემები, ამ ერთეულებს უნდა დავმატოვოთ მასის ერთეული. აბსოლუტურ თეორიულ სისტემაში მასის ერთეულად ირჩევენ გრამს (*gr*), ხოლო აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში — კილოგრამა (*kgr*).

მაშასადამე, ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ ორ აბსოლუტურ სისტემას: აბსოლუტურ თეორიულ სისტემას ძირითადი ერთეულებით—სანტიმეტრი, გრამი და სეკუნდი (CGS) და აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემას ძირითადი ერთეულებით—მეტრი, კილოგრამი და სეკუნდი (MKS). დანარჩენი ფიზიკური სიდიდეების ერთეულები განისაზღვრება ამ ძირითადი ერთეულების საშუალებით. გარდა აღნიშნული აბსოლუტური სისტემებისა, ხშირად გამოიყენება ერთეულთა სხვა სისტემები. პრინციპულად არა აქვს მნიშვნელობა, თუ რომელ სისტემას ავარჩევთ, ვინაიდან ერთეულების არჩევა სრულიად ნებისმიერია. რასაკვირველია, მიზანშეწონილია ისეთი ერთეულთა სისტემის არჩევა, რომ მისი საშუალებით გაზომილი ფიზიკური სიდიდეების მნიშვნელობანი არ გამოიხატებოდნენ ძალიან დიდი ან ძალიან მცირე რიცხვებით. პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით აბსოლუტური პრაქტიკული სისტემა სავსებით დამაკმაყოფილებელია და ამიტომ მისი გამოყენების არე თანდათან ფართოვდება. მიუხედავად ამისა, ჯერ კიდევ ხშირად გამოიყენება მესამე აბსოლუტური სისტემა, ე. წ. MKS სისტემა, რომელშიც კილოგრამის მაგიერ მასის ერთეულად მიღებულია ტონა, და ერთეულთა ტექნიკური სისტემა, რომელშიც მასის მაგიერ ძირითად სიდიდედ მიღებულია ძალა, ხოლო ძირითად ერთეულებად—მეტრი, კილოგრამ-ძალა და სეკუნდი (კილოგრამ-ძალა განისაზღვრება როგორც ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს ერთი კილოგრამი მასის სხეულს); ამ სისტემაში მასა უკვე წარმოებულ სიდიდეს წარმოადგენს და მისი ერთეული (მასის ტექნიკური ერთეული) განისაზღვრება როგორც მასა, რომელსაც ერთი კილოგრამ-ძალა ანიჭებს ერთ m/sec^2 აჩქარებას. კილოგრამ-ძალის აღნიშვნა არის kg . ჩვენ შემდეგში გამოვიყენებთ მხოლოდ აბსოლუტურ თეორიულ და აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემებს.

**მოძრაობის კინემატიკური აღმსარებელი.
სიჩქარე და აჩქარება**

§ 5. შ ე ს ა ვ ა ლ ი

როგორც წინა თავში აღვნიშნეთ, კურსს დავიწყებთ ნივთიერი წერტილების მოძრაობის შესწავლით და ამ მოძრაობის კანონების დადგენით. ფიზიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი წერტილების და მათგან შემდგარი სისტემების მოძრაობას, მექანიკა ეწოდება. უნდა აღინიშნოს, რომ მექანიკა ამყარებს ნივთიერი წერტილების მოძრაობისა და ურთიერთქმედების ზოგად კანონებს; იგი არ არის შეზღუდული ამ ურთიერთქმედების რაიმე კერძო სახით. ამიტომაც არის შესაძლებელი მექანიკის ზოგადი კანონების გამოყენება ფიზიკის დანარჩენ დარგებში, ვინაიდან როგორი ხასიათისაც არ უნდა იყოს ურთიერთქმედება: (გრავიტაციული, ელექტრომაგნიტური, ბირთვული და სხვა), მისი შედეგი ყოველთვის გამოიხატება ნაწილაკების სივრცულ გადაადგილებაში.

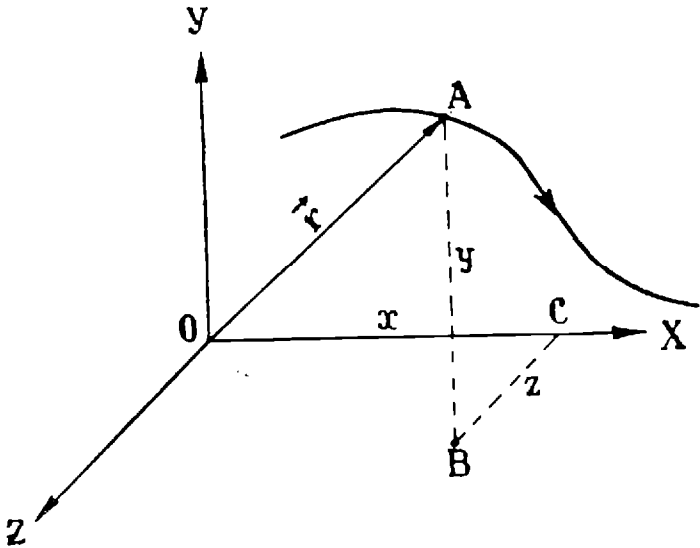
მექანიკის წინაშე ისმის ორი ამოცანა. პირველ ყოვლისა, საჭიროა ნივთიერი წერტილის ან სხეულის მოძრაობის აღწერა სივრცეში. საჭიროა შემოღება მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეებისა, კავშირის დამყარება მათ შორის და კერძო სახის მოძრაობების განხილვა. ამ ამოცანას წყვეტს მექანიკის ის დარგი, რომელსაც კინემატიკა ეწოდება. იგი არ ეხება საკითხს, თუ რა ურთიერთქმედებამ გამოიწვია ესა თუ ის მოძრაობა და არ არკვევს კავშირს მოძრაობასა და ურთიერთქმედებას შორის; ამ უკანასკნელს განიხილავს მექანიკის მეორე დარგი — დინამიკა. მისი ამოცანაა ნაწილაკთა ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდეების შესწავლა, მათი დაკავშირება მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებთან (მოძრაობის განტოლების დადგენა) და ამა თუ იმ კერძო სახის ურთიერთქმედებით გამოწვეული მოძრაობის შესწავლა.

ზოგჯერ გამოყოფენ მექანიკის კიდევ ერთ დარგს — სტატიკას, რომელიც შეისწავლის ნივთიერი წერტილებისა და სხეულების წონა-

სწორობის პირობებს, ე. ი. არკვევს საკითხს, თუ როგორი უნდა იყოს ურთიერთქმედება, რომ ნივთიერი წერტილი ან სხეული წონასწორობაში იყოს. ვინაიდან წონასწორობა არის მოძრაობის კერძო შემთხვევა, ცხადია, რომ სტატეკა წარმოადგენს დინამიკის კერძო შემთხვევას და ამიტომ წონასწორობის საკითხს ჩვენ განვიხილავთ დინამიკის განხილვის დროს.

§ 6. მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები და ტრამპტორია

აგარჩიოთ გარკვეული ათვლის სისტემა და განვიხილოთ ამ ათვლის სისტემის მიმართ რაიმე ნივთიერი წერტილის მოძრაობა (ნახ. 10). ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ნივთიერი წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება ან კოორდინატთა სათავედან გავლებული



ნახ. 10.

\vec{r} რადიუს-ვექტორით ან x, y, z კოორდინატებით. თუ ნაწილაკი მოძრაობს, მაშინ როგორც რადიუს-ვექტორი, ისე კოორდინატები იქნებიან დროის გარკვეული ფუნქციები და მოძრაობა დახასიათდება სრულად, თუ მოცემულია ამ ფუნქციების სახე.

განტოლებებს:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{II,1}$$

ან

$$\vec{r} = \vec{F}(t) \tag{II,2}$$

ეწოდებათ მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები. მათი საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ ნივთიერი წერტილის მდებარეობა

დროის ყოველი მომენტისათვის. სამი სკალარული განტოლება ეკვივალენტურია ერთი ვექტორული განტოლებისა, ვინაიდან ისინი მიიღებიან (II,2) განტოლებიდან კოორდინატთა ღერძებზე \vec{r} -ის დაგეგმილებით. მოძრაობის განტოლებანი საზღვრავენ როგორც მრუდ წირს, რომელსაც შემოწერს ნაწილაკი მოძრაობის დროს, ისე ნაწილაკის მოძრაობას ამ წირზე. წირს, რომელსაც შემოწერს ნივთიერი წერტილი მოძრაობის დროს, ეწოდება ტრანექტორია; მისი განტოლება მიიღება მოძრაობის განტოლებებიდან დროის გამორიცხვით და კოორდინატების დაკავშირებით ერთმანეთთან. შეიძლება, მაგალითად, მოძრაობის მესამე განტოლებიდან ვიპოვოთ t , როგორც z -ის ფუნქცია, და ჩავსვათ პირველ ორ განტოლებაში. მივიღებთ x და y კოორდინატებს როგორც z კოორდინატის ფუნქციებს:

$$x = \varphi_1(z), \quad y = \varphi_2(z), \quad (II,3)$$

ეს განტოლებანი კი გამოსახვენ მრუდ წირს სივრცეში, ე. ი. მოძრაობის ტრანექტორიას.

ხშირად ტრანექტორია ცნობილია და საჭიროა მხოლოდ იმის განსაზღვრა, თუ როგორ მოძრაობს ნაწილაკი ამ ტრანექტორიაზე. ამისათვის შემდეგნაირად იქცევებიან. აირჩევენ ტრანექტორიაზე რაიმე O_1 წერტილს და ნაწილაკის მდებარეობას ტრანექტორიაზე საზღვრავენ O_1 წერტილიდან ნაწილაკამდე გაზომილი რკალის სიგრძით. თუ ამ რკალის სიგრძეს s -ით აღვნიშნავთ, მოძრაობა მოცემულ ტრანექტორიაზე გამოიხატება შემდეგი განტოლებით:

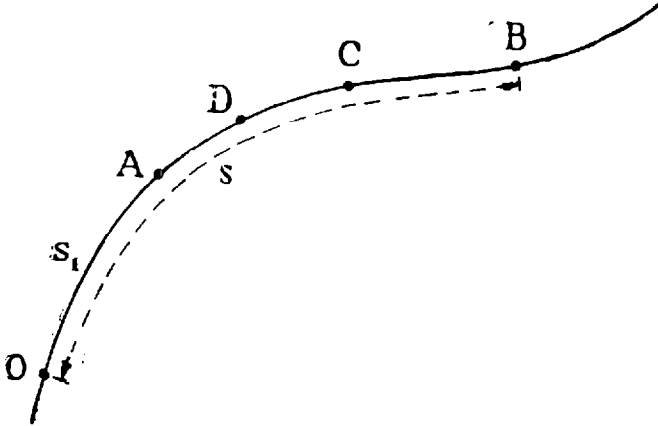
$$s = \varphi(t). \quad (II,4)$$

მოძრაობის განტოლების ასეთი სახით წარმოდგენა საშუალებას მოგვცემს გავარჩიოთ და განვაზოგადოთ ნაწილაკების მიერ გავლილი გზის ცნება, რაც, თავის მხრივ, გავვიადვილებს სიჩქარის ცნების დაზუსტებას.

ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ხშირად ვხმარობთ გამოთქმებს „მატარებელი მოძრაობს ამა და ამ სიჩქარით“, „თვითმფრინავის სიჩქარე არის 800 კმ საათში“, „სინათლე სივარდიელში ვრცელდება 300000 კმ სიჩქარით სეკუნდში“ და ა. შ. ყველასათვის გასაგებია რა აზრი აქვს ამ გამოთქმებს; მაგალითად, თვითმფრინავის შემთხვევაში ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთ საათში იგი გადის 800 კმ. ასევეა სხვა შემთხვევაშიც. მაშასადამე, ჩვეულებრივი გაგებით სიჩქარე გვიჩვენებს, თუ რა მანძილს გადის სხეული დროის ერთეულში (საათში, მინუტში და ა. შ.). მაგრამ მეცნიერული თვალსაზრისით აუცილებლად საჭიროა ამ ცნების დაზუსტება და ზოგ შემთხვევაში

განზოგადება, რათა შესაძლებელი იყოს მისი მათემატიკური გამო-
სახვა და ისეთი შემთხვევებისათვის გამოყენება, რომელთათვისაც
ჩვეულებრივი განმარტება საკმარისი არ არის. ამისათვის, პირველ
ყოვლისა, საჭიროა გავერკვეთ იმაში რას ნიშნავს სხეულის მიერ
გავლილი მანძილი.

ვთქვათ, ნაწილაკი მოძრაობს რაიმე მრუდზე და გარკვეული
დროის განმავლობაში გადადის A წერტილიდან B წერტილში
(ნახ. 11). თუ A წერტილისათვის OA ტოლია s_1 -ისა, ხოლო B წერ-



ნახ. 11.

ტილისათვის OB ტოლია s_2 -ისა, AB რკალის სიგრძე იქნება
 $s = s_2 - s_1$; ამ სიდიდეს ეწოდება მანძილი A და B წერტილებს
შორის, აღებული მრუდის გასწვრივ. შეიძლება თუ არა ამ სიდი-
დეს ვუწოდოთ ნაწილაკის მიერ გავლილი მანძილი? ცხადია, თუ
ნაწილაკი ყოველთვის ერთი მიმართულებით, მაგალითად, A წერ-
ტილიდან B წერტილისაკენ მოძრაობს, s მართლაც იქნება ნაწი-
ლაკის მიერ გავლილი მანძილი. მაგრამ, თუ ნაწილაკი მოძრაობს
ხან ერთი და ხან მეორე მიმართულებით, მაშინ იგი გაცილებით
შეტ მანძილს გაივლის ჩვეულებრივი გაგებით, ვიდრე AB რკალის
სიგრძეა. მაგალითად, ნაწილაკი შეიძლება გადავიდეს A წერტილი-
დან C წერტილში, შემდეგ დაბრუნდეს D წერტილში, ისევ შეი-
ცვალოს მოძრაობის მიმართულება და, ბოლოს, სივლიდეს B წერ-
ტილში. ჩვეულებრივი გაგებით ნაწილაკს გაუვლია შემდეგი მან-
ძილი:

$$AC + CD + DC + CB, \quad (II,5)$$

ე. ი. გავლილი მანძილის გამოსათვლელად უნდა შევკრიბოთ ტრაექ-
ტორიის ყველა მონაკვეთის სიგრძეები, მიუხედავად იმისა, რა

მიმართულებით მოძრაობდა ნაწილაკი ამ მონაკვეთებზე (AC , DC და CB მონაკვეთებზე ნაწილაკი მოძრაობდა ერთი მიმართულებით, CD მონაკვეთზე კი საწინააღმდეგო მიმართულებით). გავლილი მანძილის ასეთი განმარტება არ არის გამოსადეგი. ფიზიკური მოვლენების განხილვისას. გაცილებით უფრო მიზანშეწონილია ნაწილაკის მიერ გავლილ მანძილს მივუწეროთ დადებითი ან უარყოფითი ნიშანი იმის მიხედვით, თუ რა მიმართულებით ხდება მისი გავლა. თუ, მაგალითად, დავუშვებთ, რომ A წერტილიდან B წერტილისაკენ მოძრაობის დროს მანძილი ითვლება დადებითად, ხოლო საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობისას — უარყოფითად, ზემოთ განხილული მაგალითის შემთხვევაში ნაწილაკის მიერ გავლილი მანძილი იქნება

$$AC + CB = AB, \quad (II, 6)$$

ვინაიდან $CD = -DC$ (ერთი და იგივე მონაკვეთი ორჯერ არის გავლილი საწინააღმდეგო მიმართულებით). ამიტომაც შემდეგში ნაწილაკის მიერ გავლილ მანძილს ჩვენ განვსაზღვრავთ როგორც ტრაექტორიის სათანადო რკალის სიგრძეს, აღებულს სათანადო ნიშნით.

ყოველივე ზემოთქმული ნათლად გვიჩვენებს, რომ შესაძლებელია სიჩქარის ორნაირი განსაზღვრა. შეიძლება ვთქვათ, რომ სიჩქარე იზომება დროის ერთეულში გავლილი მანძილით, დამოუკიდებლად მოძრაობის მიმართულებისაგან. ასეთნაირად განსაზღვრული სიჩქარე ყოველთვის დადებითი სიდიდე იქნება. შეიძლება სიჩქარე განისაზღვროს როგორც ნაწილაკის მიერ დროის ერთეულში გავლილი რკალის სიგრძე. ასე განსაზღვრული სიჩქარე შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი იმის მიხედვით, თუ რა მიმართულებით მოძრაობს ნაწილაკი. შემდეგში ჩვენ ყოველთვის გამოვიყენებთ სიჩქარის ასეთ გაგებას.

§ 7. წრფივი მოძრაობის სიჩქარე

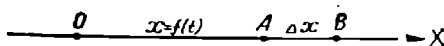
განვიხილოთ მოძრაობის უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც ნივთიერი ნაწილაკი მოძრაობს სწორ ხაზზე. მსჯელობის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს OX ღერძის გასწვრივ (ნახ. 12). ამ შემთხვევაში მისი მდებარეობა განისაზღვრება x კოორდინატით, რომელიც ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შემთხვევაში იქნება დროის ფუნქცია და შეიძლება გამოისახოს შემდეგი ფორმულით:

$$x = f(t); \quad (II, 7)$$

ამ ფუნქციის სახე დამოკიდებულია მოძრაობის ხასიათზე. ჩვენ განვიხილავთ ყველაზე მარტივ შემთხვევას, ე. წ. თანაბარ მოძრაობას. ეს მოძრაობა შემდეგი თვისებით ხასიათდება: როგორი დროის შუალედიც არ უნდა ავიღოთ, ამ დროის განმავლობაში გავლილი Δx მანძილის შეფარდება დროს Δt შუალედთან ყოველთვის ერთი და იგივეა

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{const.} \quad (\text{II,8})$$

ამ სიდიდეს, ე. ი. გავლილი მანძილის შეფარდებას სათანადო დროის შუალედთან, ეწოდება თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე. ცხადია, იგი მუდმივი სიდიდეა, ე. ი. არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მომენტში ან დროის რა შუალედის საშუალებით ხდება მისი განსაზღვრა. სიჩქარე აღინიშნება v ასოთი და ამიტომ შეიძლება დაიწეროს



ნახ. 12.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (\text{II,9})$$

ხშირად, გავლილ მანძილს, მით უმეტეს თუ იგი სასრულია, s -ით აღნიშნავენ, ხოლო მის გასაგეღლად საჭირო დროს — t -თი და წინა ფორმულას შემდეგნაირად წერენ:

$$v = \frac{s}{t}. \quad (\text{II,10})$$

სიჩქარის ნიშანი დამოკიდებულია Δx -ის ნიშანზე, ე. ი. იმაზე, თუ რა მიმართულებით ხდება მოძრაობა. თუ $\Delta x > 0$, ე. ი. x კოორდინატი იზრდება, v სიჩქარე დადებითი იქნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უარყოფითი.

(II,9), (II,10) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ თანაბარი მოძრაობის დროს გავლილი მანძილი, თუ ცნობილია სიჩქარე და დრო:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t$$

ან

$$s = v \cdot t.$$

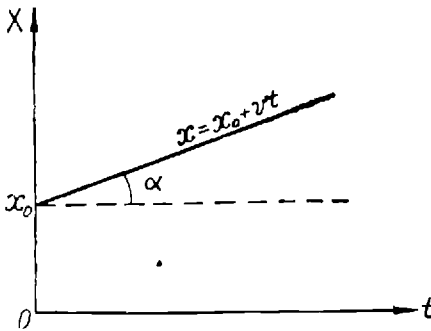
თანაბრად მოძრავი ნაწილაკის მდებარეობის განსაზღვრისათვის, ე. ი. მისი კოორდინატის განსაზღვრისათვის რაიმე t მომენტში, საჭიროა ვიცოდეთ როგორი იყო მისი კოორდინატი დროის საწყის მომენტში.

ვთქვათ, $t=0$ მომენტში ნაწილაკის კოორდინატი იყო x_0 . თუ კოორდინატს t მომენტში x -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ.

$$x = x_0 + vt. \quad (II,11)$$

ასეთი სახე აქვს x კოორდინატს, როგორც დროის ფუნქციას, თანაბარი მოძრაობის დროს. როგორც ვხედავთ, თანაბარი მოძრაობის დროს კოორდინატი არის დროის წრფივი ფუნქცია.

ზოგჯერ მოძრაობის თვალსაჩინოდ წარმოდგენისათვის ხელსაყრელია მისი გამოხატვა გრაფიკის საშუალებით. ჩვეულებრივად



ნახ. 13.

გამოიყენება ორი გრაფიკი. პირველი მათგანისათვის აბსცისთა ღერძზე გადაზომავენ დროს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე — x კოორდინატს (გავლილ გზას). ამ გრაფიკს ეწოდება გზის გრაფიკი. თანაბრად მოძრაობის ნაწილაკისათვის იგი მოცემულია მე-13 ნახაზზე და წარმოადგენს სწორ ხაზს,

რომელიც კვეთს ორდინატითა ღერძს x_0 ორდინატის მქონე წერტილში და რომლის აბსცისთა ღერძთან დახრილობის α კუთხის ტანგენსი მოძრაობის v სიჩქარის ტოლია.

გამოიყენება აგრეთვე მეორე ე. წ. სიჩქარის გრაფიკი, რომელიც გამოხატავს სიჩქარის დამოკიდებულებას დროზე. ამ შემთხვევაში ორდინატთა ღერძზე გადაზომილია არა x კოორდინატი, არამედ სიჩქარე. თანაბარი მოძრაობისათვის ეს გრაფიკი მოცემულია მე-14 ნახაზზე. ვინაიდან ამ შემთხვევაში სიჩქარე მუდმივია, მისი გრაფიკი წარმოადგენს აბსცისთა ღერძის პარალელურ ხაზს, რომლის ყოველი წერტილის ორდინატი v -ს ტოლია.

გზის გრაფიკის განხილვისას ჩვენ ვნახეთ, რომ მისი ყოველი წერტილის ორდინატი გამოხატავს x კოორდინატს, ხოლო აბსცისთა ღერძისადმი კუთხის ტანგენსი — სიჩქარეს. სიჩქარის გრაფიკის შემთხვევაში კი ორდინატი გამოხატავს სიჩქარეს. ბუნებრივად დაისვას საკითხი, თუ როგორ გამოიხატება გეომეტრიულად სიჩქარის გრაფიკზე x კოორდინატი, ე. ი. გავლილი მანძილი. ვინაიდან (II,11) ფორმულის თანახმად

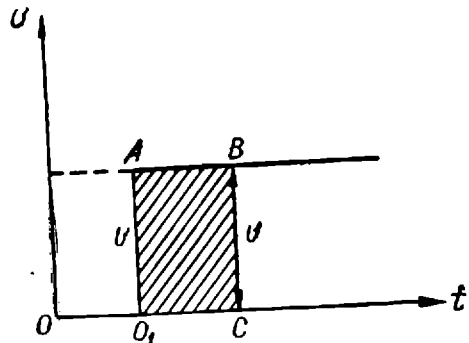
$$x = x_0 + vt,$$

ცხადია, რომ მოცემული მომენტისათვის $x = x_0$ მანძილი გეომეტ-

რიულად გამოიხატება O_1ABC მართკუთხედის ფართობით, რომლის ფუძე არის $O_1C = t$, ხოლო სიმაღლე— $O_1A = v$.

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი ხასიათის სწორხაზოვანი მოძრაობა. პირველ ყოვლისა, შემოვიღოთ ე. წ. საშუალო სიჩქარის ცნება. ვთქვათ, დროის რაიმე Δt შუალედში, რომელიც t მომენტიდან იწყება, ნივთიერმა წერტილმა გაიარა Δx მანძილი (ნახ. 12). მაშინ სიდიდეს

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (\text{II}, 12)$$



ნახ. 14.

ე. ი. გავლილი მანძილის შეფარდებას სათანადო დროსთან, ეწოდება საშუალო სიჩქარე გზის Δx მონაკვეთზე. ვინაიდან მოძრაობა არ არის თანაბარი, საშუალო სიჩქარე დამოკიდებული იქნება არა მარტო დროის შუალედის დაწყების t მომენტზე, არამედ თვით შუალედზედაც. გზის Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილში ნაწილაკი შეიძლება სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობდეს; საშუალო სიჩქარე გვიჩვენებს რა თანაბარი სიჩქარით უნდა ემოძრავა ნაწილაკს, რომ Δt დროში გაეგლო Δx მონაკვეთი.

სახელწოდება „საშუალო სიჩქარე“ გამოწვეულია იმით, რომ Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილზე წერტილი შეიძლება სულ სხვადასხვანაირად მოძრაობდეს. შეიძლება დასაწყისში მისი მოძრაობა იყოს სწრაფი, შემდეგ—უფრო ნელი, მაგრამ v_m სიდიდე ამის შესახებ არაფერს არ გვეუბნება, ვინაიდან იგი განისაზღვრება მხოლოდ გავლილი მანძილით და სათანადო დროით. ასე, მაგალითად, ორ სადგურს შორის მატარებლის მოძრაობის საშუალო სიჩქარეს გამოთვლიან მთელი მანძილის გაყოფით დროზე, მიუხედავად იმისა, რომ გზის სხვადასხვა ნაწილზე მატარებელი სხვადასხვა სიჩქარით მოძრაობს.

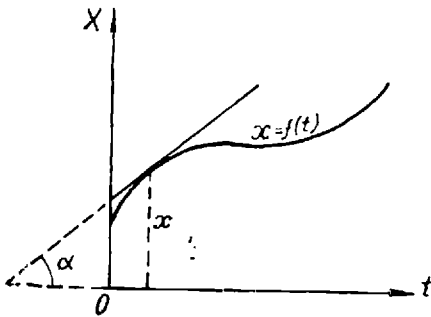
იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნივთიერი წერტილის სიჩქარე აღებულ t მომენტში, უნდა შემდეგნაირად მოვიქცეთ. თანდათანობით ვამცირით Δt შუალედი, ე. ი. ვამცირით Δx მონაკვეთიც B წერტილის A წერტილთან მიახლოებით. რაც უფრო მცირე იქნება Δt და Δx შუალედები, მით უფრო ნაკლებად შეიცვლება სიჩქარე ამ შუალედის განმავლობაში და მით უფრო მეტი სიზუსტით მოგვეცემს

v_m სიდიდე წერტილის ნამდვილ სიჩქარეს t მომენტში. სრული სიზუსტისათვის საჭიროა გადასვლა ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამ ზღვარს ეწოდება ნივთიერი წერტილის ნამდვილი სიჩქარე t მომენტში. თუ მას v ასოთი აღვნიშნავთ გვექნება

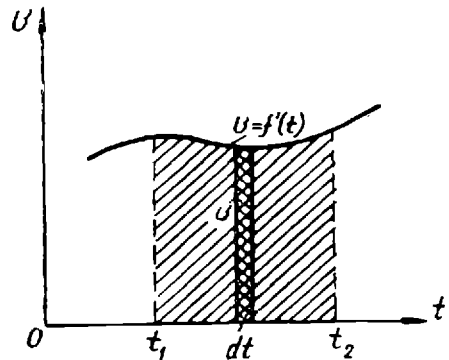
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (\text{II}, 13)$$

ეს განსაზღვრა გვიჩვენებს, რომ ნამდვილი სიჩქარე არის კოორდინატის წარმოებული დროით. როგორც ვხედავთ, ნებისმიერი (არათანაბარი) ხასიათის სწორხაზოვანი მოძრაობისათვის ადვილად შეიძლება ნამდვილი სიჩქარის პოვნა, თუ ცნობილია x კოორდინატი როგორც დროის ფუნქცია. ამისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია დროის მიმართ.

განვიხილოთ ახლა გზისა და სიჩქარის გრაფიკები ნებისმიერი სწორხაზოვანი მოძრაობისათვის. ცხადია, გზის გრაფიკი გამოიხატება არა სწორი ხაზით, როგორც თანაბარი მოძრაობის დროს,



ნახ. 15.



ნახ. 16.

არამედ მრუდი ხაზით, რომლის განტოლება იქნება $x=f(t)$. ამ მრუდის ორდინატები გვიჩვენებენ x კოორდინატის მნიშვნელობებს დროის სხვადასხვა მომენტისათვის. სიჩქარე კი, როგორც კოორდინატის წარმოებული, გამოიხატება იმ კუთხის ტანგენსით, რომელსაც მრუდის ადგილზე წერტილში გავლებული მხები ადგენს აბსცისთა ღერძთან (ნახ. 15). სიჩქარის გრაფიკის ასაგებად უნდა ვიპოვოთ სიჩქარე როგორც დროის ფუნქცია

$$v = f'(t)$$

და ავავოთ ამ ფუნქციის სათანადო მრუდი (ნახ. 16). ამ მრუდის ორდინატი გამომსახველი იქნება სიჩქარისა. გამოვარკვიოთ როგორ

გამოიხატება ამ გრაფიკზე x კოორდინატი ან, უფრო სწორედ, t_1 და t_2 მომენტებს შორის გავლილი მანძილი. დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში გავლილი მანძილი ტოლი იქნება $v \cdot dt$ ნამრავლისა, ხოლო ეს ნამრავლი გეომეტრიულად გამოიხატება dt ფუძის და v სიმაღლის მქონე ვიწრო ფართობის საშუალებით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, ორი მახლობელი ორდინატით და მრუდის მცირე რკალით.

ცხადია, მთელი გზა, გავლილი t_1 და t_2 მომენტებს შორის, გამოიხატება ინტეგრალით

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt, \quad (\text{II}, 14)$$

ხოლო გეომეტრიულად — ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, t_1 და t_2 მომენტების სათანადო ორდინატებით და სიჩქარის მრუდით.

§ 8. მრუდწირული მოძრაობის სიჩქარე

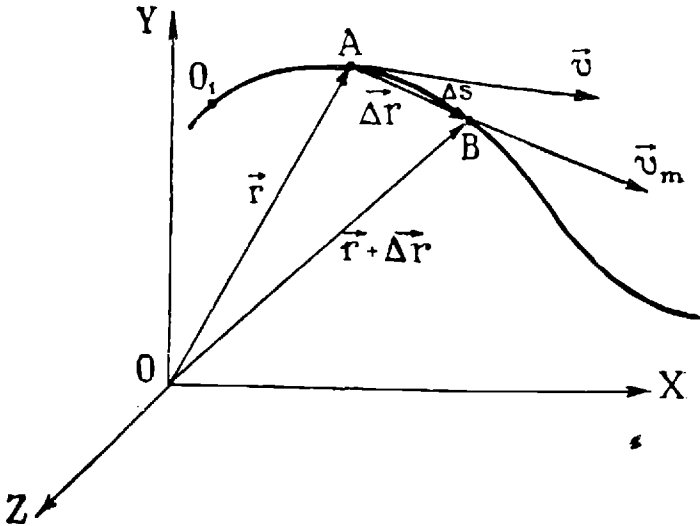
განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა წერტილის მრუდწირული მოძრაობისა სივრცეში. წერტილის მდებარეობა სივრცეში განვსაზღვროთ \vec{r} რადიუს-ვექტორით (ნახ. 17). ვთქვათ, რომელიმე t მომენტში ნივთიერ წერტილს A მდებარეობა ეკავა და მისი რადიუს-ვექტორი იყო \vec{r} . საკმაოდ მცირე Δt დროის შემდეგ, ე. ი. $t + \Delta t$ მომენტში წერტილი დაიკავებს ახალ B მდებარეობას და მისი რადიუს-ვექტორი იქნება $\vec{r} + \Delta \vec{r}$, სადაც $\Delta \vec{r}$ იქნება A -დან B -მდე გავლებული ვექტორი — რადიუს-ვექტორის ნაზრდი. სიდიდით იგი AB ქორდის ტოლია. რადიუს-ვექტორის ცვლილება დროის ერთეულში, ე. ი. შეფარდებას

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (\text{II}, 15)$$

ეწოდება ნივთიერი წერტილის საშუალო სიჩქარე Δt შუალედში. იგი წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც მიმართულია A -დან B -კენ გავლებული მკვეთის გასწვრივ. რომ ვიპოვოთ ნამდვილი სიჩქარე, ისევე უნდა მოვიქცეთ, როგორც სწორხაზოვანი მოძრაობის განხილვის დროს მოვიქცეთ. სახელდობრ, უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. მიღებულ ზღვრულ ვექტორს

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (\text{II,16})$$

ე. ი. რადიუს-ვექტორის წარმოებულს დროის მიმართ ეწოდება წერტილის ნამდვილი სიჩქარე t მომენტში. მისი მიმართულების განსაზღვრისათვის უნდა გამოვარკვიოთ



ნახ. 17.

მკვეთის ზღვრული მდებარეობა, როდესაც B წერტილი უსასრულოდ უახლოვდება A წერტილს. ცხადია, რომ ასეთი მიახლოების შედეგად მკვეთის მიმართულება იცვლება და ზღვარში მოგვცემს A წერტილში გავლებული მხების მიმართულებას, საიდანაც დავასკვნით, რომ წერტილის სიჩქარე მიმართულია ტრაექტორიის მხებად.

გავარკვიოთ ახლა კავშირი სიჩქარესა და წერტილის მიერ დროის ერთეულში გავლილ გზას შორის. ვინაიდან წერტილი მრუდ ხაზზე მოძრაობს, მის მიერ გავლილი მანძილი უნდა გაიზომოს ამ მრუდის, ე. ი. ტრაექტორიის გასწვრივ. ავარჩიოთ ტრაექტორიაზე რაიმე საწყისი წერტილი O_1 , საიდანაც ვაწარმოებთ რკალის სიგრძის გაზომვას, და აღვნიშნოთ s -ით რკალის სიგრძე O_1 წერტილიდან A წერტილამდე, ე. ი. ნაწილაკის მდებარეობამდე t მომენტში (ნახ. 17). ცხადია, რომ s არის დროის ფუნქცია. Δt დროის განმავლობაში ნაწილაკი გაივლის ტრაექტორიის Δs მონაკვეთს (Δt დროში გავლილი გზა). შევეფარდოთ Δs რკალი მისი სათანადო ქორდის სიდიდეს, რომელიც გამოიხატება როგორც $\Delta \vec{r}$ ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობა $|\Delta \vec{r}|$, და გადავიდეთ ზღვარზე, როდეს-

საც რკალის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის. როგორც ცნობილია, ეს ზღვარი ერთის ტოლია

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta s} = 1. \quad (\text{II}, 17)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ რაც უფრო მცირეა რკალი, მით უფრო უახლოვდება იგი თავისი სიდიდით ქორდის სიდიდეს. განვიხილოთ, მეორე მხრივ, საშუალო სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t}$$

(Δt ყოველთვის დადებითად ითვლება) და წარმოვიდგინოთ იგი შემდეგი სახით:

$$|\vec{v}_m| = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta s}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δt და, მაშასადამე, Δs -იც ნულისაკენ მიისწრაფვიან. თუ მივიღებთ მხედველობაში (II,17) ფორმულას, გვექნება

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\vec{v}_m| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (\text{II}, 18)$$

აქ $|\vec{v}|$ არის ნამდვილი სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა. როგორც ვხედავთ, სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა, ანუ სიჩქარის სიდიდე, რომელსაც ჩვენ შემდეგში სიმარტივისათვის v -თი აღვნიშნავთ, არის რკალის წარმოებული დროით. იგივე შეიძლება უფრო თვალსაჩინოდ, მაგრამ არაზუსტად ასე გამოითქვას: სიჩქარის სიდიდე დროის ერთეულში გავლილი მანძილის ტოლია.

ვიპოვოთ სიჩქარის პროექციები კოორდინატთა ღერძებზე. ამისათვის დავუბრუნდეთ ისევ საშუალო სიჩქარეს. მისი პროექცია OX ღერძზე მიიღება $\vec{\Delta r}$ ვექტორის პროექციის გაყოფით Δt დროზე.

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

ვინაიდან $\vec{\Delta r}$ -ის პროექციები ღერძებზე არის Δx , Δy და Δz . ზღვარზე გადასვლა გვაძლევს

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \quad (\text{II}, 19)$$

ანალოგიურად მივიღებთ პროექციებისათვის OY და OZ ღერძებზე:

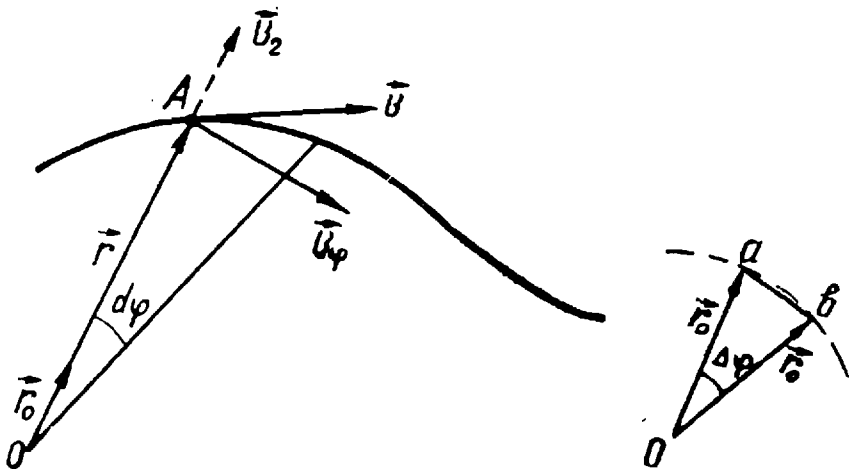
$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (\text{II}, 20)$$

მაშასადამე, სიჩქარის პროექციები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია სათანადო კოორდინატების წარმოებულებისა დროის მიმართ. სიჩქარის სიდიდისათვის შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ფორმულა:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (\text{II}, 21)$$

§ 9. სიჩქარის რადიალური და ბრუნვითი მდგენლები. კუთხუკი სიჩქარე

ხშირად ხელსაყრელია სიჩქარის დაშლა არა მდგენლებად კოორდინატთა ღერძების მიმართ, არამედ თვით ტრაექტორიის დამახასიათებელი მიმართულების მიმართ. განვიხილოთ მრუდწირული მოძრაობა (ნახ. 18). A წერტილში \vec{r} რადიუს-ვექტორით სიჩქარე



ნახ. 18.

მიმართულია ტრაექტორიისადმი მხებულად. იგი გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება \vec{r} რადიუს-ვექტორი დროის განმავლობაში. მაგრამ რადიუს-ვექტორმა შეიძლება შეიცვალოს როგორც სიდიდე, ისე მიმართულება. ამიტომაც, ცხადია, სიჩქარე ორი მდგენლისაგან უნდა შედგებოდეს. ერთი უნდა გვიჩვენებდეს, თუ როგორ იცვლება რადიუს-ვექტორის სიდიდე, მეორე კი—როგორ იცვლება მისი მიმართულება. ამ მდგენლების განსაზღვრისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. წარმოვადგინოთ რადიუს-ვექტორი, როგორც მის გასწვრივ

მიმართული ერთეულოვანი \vec{r}_0 ვექტორისა და მისი სკალარული სიდიდის ნამრავლი

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0. \quad (\text{II}, 22)$$

პირველი მამრავლი ახასიათებს რადიუს-ვექტორის სიდიდეს, ხოლო მეორე კი—მიმართულებას. სიჩქარის მისაღებად გავაწარმოოთ \vec{r} დროის მიმართ, გვექნება

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0 + r \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (\text{II}, 23)$$

ამ ფორმულით სიჩქარეები წარმოდგენილია ორი ვექტორის ჯამის სახით. გავარჩიოთ ეს შესაქრებები ცალ-ცალკე. პირველი მათგანი, რომელსაც ჩვენ \vec{v}_r -ით აღვნიშნავთ, მიმართულია თვით რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და გვიჩვენებს როგორ იცვლება რადიუს-ვექტორის სიდიდე დროის ერთეულში. თუ \vec{r} არ იცვლის სიდიდეს (ე. ი. თუ ნივთიერი წერტილი უცვლელ მანძილზეა კოორდინატთა სათავიდან), \vec{v}_r ნულის ტოლია $\left(\frac{dr}{dt} = 0\right)$; მისი მიმართულების გამო, მას რადიალური სიჩქარე ეწოდება:

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \vec{r}_0. \quad (\text{II}, 24)$$

მეორე მდგენელი დაკავშირებულია რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებასთან და მასში მამრავლად არის $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$, ე. ი. \vec{r}_0

ერთეულოვანი ვექტორის ცვლილება დროის ერთეულში; \vec{r}_0 კი მხოლოდ მიმართულებით შეიძლება იცვლებოდეს. მაშასადამე, სიჩქარის ეს მდგენელი ახასიათებს რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებას, ე. ი. მის შემობრუნებას O სათავის ირგვლივ. ამიტომაც ამ მდგენელს, რომელიც \vec{v}_φ -თი აღინიშნება, ბრუნვითი სიჩქარე ეწოდება

$$\vec{v}_\varphi = r \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \quad (\text{II}, 25)$$

გამოვარკვიოთ როგორია მისი სიდიდე და მიმართულება. ამისათვის განვიხილოთ ვექტორი $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს ვექტორი რადიუს-ვექტორის მართობია. მართლაც, ვინაიდან \vec{r}_0 ერთეულოვანი ვექტორია

$$r_0^- = 1,$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{r}_0 \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0,$$

ე. ი. $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ და \vec{r}_0 ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია;

ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ვექტორი \vec{r}_0 -ის და, მაშასადამე, თვით \vec{r} რადიუს ვექტორის მართობია; აქედან გამომდინარეობს, რომ ბრუნვითი სიჩქარე რადიუს-ვექტორის მართობია.

ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდის დასადგენად შემოვიღოთ კუთხური სიჩქარის ცნება. dt დროის განმავლობაში ნაწილაკი გადაინაცვლებს ტრაექტორიაზე და \vec{r} რადიუს-ვექტორი სათანადოდ მობრუნდება რაღაც $d\varphi$ კუთხით (ნახ. 18).

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{II,26})$$

სიდიდეს, ე. ი. კუთხის წარმოებულს დროით ან, უფრო მარტივად, დროის ერთეულში მობრუნების კუთხეს კუთხური სიჩქარე ეწოდება.

კუთხური სიჩქარის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვსახოთ ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდე. მართლაც, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ვექტორის სიდიდე კუთხური სიჩქარის ტოლია. მართლაც, რადიუს-ვექტორის მიერ $\Delta\varphi$ კუთხის შემოწერის დროს \vec{r}_0 ვექტორის ბოლო შემოწერს წრიულ (რადგან $|\vec{r}_0| = \text{const}$) \vec{ab} რკალს, რომელიც $\Delta\varphi$ კუთხის ტოლი იქნება

$$\vec{ab} = \Delta\varphi.$$

მაშასადამე, გვექნება

$$\frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} \cdot \frac{\vec{ab}}{\Delta t} = \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

ზღვარზე გადასვლის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{|d\vec{r}_0|}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (\text{II,27})$$

ვინაიდან

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}_0|}{\vec{ab}} = 1,$$

\vec{v}_φ ბრუნვითი სიჩქარის სიდიდისათვის ვღებულობთ

$$v_\varphi = r \cdot \omega. \quad (\text{II}, 28)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ ასეთ შედეგს. მრუდწირული მოძრაობის სიჩქარე ორი მდგენლისაგან შედგება.

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi. \quad (\text{II}, 29)$$

პირველი მათგანი, რადიალური სიჩქარე

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{r}_0$$

მიმართული რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, ახასიათებს მისი სიდიდის ცვლილებას და სიდიდით უდრის რადიუს-ვექტორის სიდიდის წარმოებულს დროით.

მეორე მდგენელი, ბრუნვითი სიჩქარე

$$\vec{v}_\varphi = r \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

მიმართული რადიუს-ვექტორის მართობულად ახასიათებს მისი მიმართულების ცვლილებას და უდრის რადიუს-ვექტორის სიდიდისა და კუთხური სიჩქარის ნამრავლს

$$v_\varphi = r\omega.$$

ვინაიდან \vec{v}_r და \vec{v}_φ ერთმანეთის მართობია, სიჩქარის სიდიდე შეიძლება ასეთი ფორმულით გამოვსახოთ:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2}. \quad (\text{II}, 30)$$

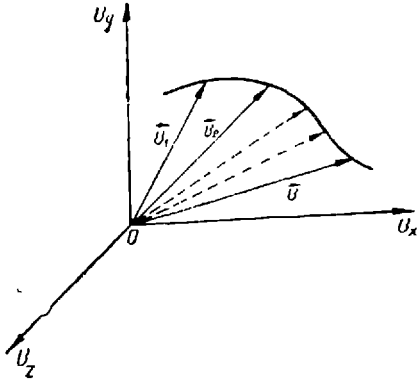
თუ მოძრაობა წრეხაზზე წარმოებს, რადიალური სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება და სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v = r\omega,$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში სიჩქარე ტოლი იქნება რადიუსის ნამრავლისა კუთხურ სიჩქარეზე.

მრუდწირული არათანაბარი მოძრაობის დროს სიჩქარე იცვლება როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით. სიჩქარის მიმართულება ტრანექტორიის ყოველ წერტილში განსაზღვრულია მხების მიმართულებით, რომელიც სხვადასხვაა სხვადასხვა წერტილში. ასევე შეიძლება სხვადასხვა იყოს მისი სიდიდე. სიჩქარის ცვალებადობის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად შემდეგნაირად იქცევიან. უძრავი

1) წერტილიდან, როგორც სათავიდან, ატარებენ \vec{Ov} ვექტორებს, რომლებიც გამოხატავენ მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარეებს დროის სხვადასხვა მომენტში (ნახ. 19). ამ ვექტორების ბოლო წერტილები მოგვცემენ მრუდ წირს, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიჩქარის ბოლო წერტილის მიერ დროის განმავლობაში შემოწერილი მრუდი. ცხადია, ეს მრუდი ისეთივე კავშირშია სიჩქარის ვექტორთან როგორც ტრაექტორია რადიუს-ვექტორთან; მას ეწოდება სიჩქარის ჰოდოგრაფი¹.



ნახ. 19.

მისი საშუალებით ნათლად შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორ იცვლება ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე სიდიდითა და მიმართულებით. შემდეგში, აჩქარების განვიხილვის დროს, ჩვენ გამო-

ვიყენებთ ჰოდოგრაფს აჩქარების გამოსათვლელად სხვადასხვა შემთხვევაში.

დასასრულ განვიხილოთ საკითხი—როგორ მოძრაობას შეიძლება ვუწოდოთ თანაბარი მოძრაობა? ჩვეულებრივად, თანაბარი მოძრაობა ისეთ მოძრაობას ეწოდება, როდესაც სიჩქარის სიდიდე უცვლელია, ე. ი. როდესაც დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედებში ნაწილაკი ტოლ მანძილებს გადის. ამ განსაზღვრის თანახმად მოძრაობის თანაბრობისათვის არა აქვს მნიშვნელობა ტრაექტორიის სახეს; იგი შეიძლება იყოს როგორც სწორი, ისე მრუდი ხაზი. მართალია, უკანასკნელ შემთხვევაში სიჩქარის მიმართულება ცვალებადია, მაგრამ მოძრაობის თანაბრობისათვის საჭიროა მხოლოდ სიჩქარის სიდიდის უცვლელობა. მაგრამ შეიძლება მოძრაობის თანაბრობა განვიხილოთ როგორც სიჩქარის უცვლელობა არა მარტო სიდიდით, არამედ მიმართულებითაც, ე. ი. როგორც უცვლელობა სიჩქარის ვექტორისა ($\vec{v} = \text{const}$). ამ შემთხვევაში მოძრაობის თანაბრობის პირობა, გარდა მოძრაობის თანაბრობის ჩვეულებრივი გაგებისა ($v = \text{const}$), მოითხოვს მოძრაობის სწორხაზოვნებასაც.

¹ ჰოდოს ბერძნულად ნიშნავს გზას. ჰოდოგრაფი უნდა ნიშნავდეს გზის შემომწერს, რაც, რასაკვირველია, შინაარსით არ გამოხატავს ჩვენი მრუდის ხასიათს.

შემდეგში მოძრაობის თანაბრობას ჩვენ განვიხილავთ როგორც სიჩქარის მხოლოდ სიდიდის უცვლელობას, ხოლო თანაბარ მოძრაობას სიჩქარის უცვლელი მიმართულებით (სწორხაზოვან თანაბარ მოძრაობას) ვუწოდებთ მოძრაობას მუდმივი სიჩქარით ($\vec{v} = \text{const}$).

§ 10. აჩქარება

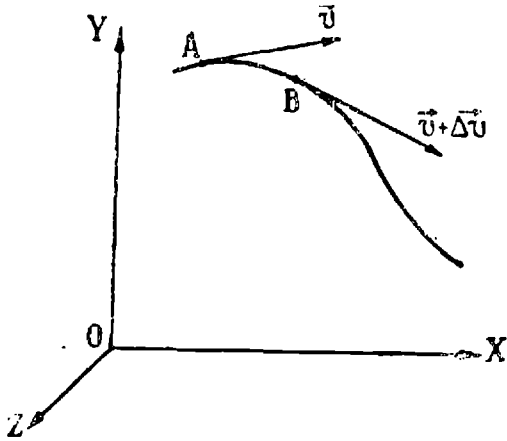
ბუნებაში არსებულ მოძრაობებზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ უმეტეს შემთხვევაში ნივთიერი წერტილების ან სხეულების სიჩქარეები ცვალებადია. ერთ მომენტში წერტილს ერთი ვარკვეული სიჩქარე აქვს, მეორეში—სხვა და ა. შ. ასეთი ცვლადი მოძრაობის საუკეთესო მაგალითს წარმოადგენს ვარდნილი ან ზევით ასროლილი სხეულის მოძრაობა. აღსანიშნავია, რომ სწორედ ამ მოძრაობის შესწავლის შედეგად ჩამოაყალიბა სირველად ცნობილმა იტალიელმა ფიზიკოსმა გალილეიმ აჩქარების ზუსტი ცნება და დაადგინა მოძრაობის განტოლება. ასეთივე ცვლადი სიჩქარით წარმოებს საქანის რხევა, მატარებლის, თვითმფრინავის და მრავალი სხვა სხეულის მოძრაობა.

ყველა ასეთი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოღებულია ახალი სიდიდე—აჩქარება. მისი განსაზღვრისათვის ჩვენ აღარ დავიწყებთ მარტივი სახის მოძრაობების განხილვას და პირდაპირ ზოგად შემთხვევას გავარჩევთ, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სივრცეში ნებისმიერ მრუდ წირზე (ნახ. 20). მოძრაობის დროს წერტილი შემოსწვრს გარკვეულ ტრაექტორიას, რომლის ყოველ წერტილში სიჩქარე გამოიხატება მხების გასწვრივ მიმართული \vec{v} ვექტორით. ვთქვათ, გარკვეულ t მომენტში სიჩქარე არის \vec{v} (ტრაექტორიის A წერტილში). საკმაოდ მცირე Δt დროის შემდეგ ნაწილაკი იქნება B წერტილში და მისი სიჩქარე გამოიხატება სხვა სიდიდისა და მიმართულების $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ ვექტორით, სადაც $\Delta\vec{v}$ იქნება სიჩქარის ნაზრდი. \vec{v} და $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ ვექტორების შესადარებლად უფრო ხელსაყრელია გავავლოთ მათი ტოლი ვექტორები O_1 უძრავი წერტილიდან, ე. ი. ავაგოთ სიჩქარის ჰოდოგრაფი (ნახ. 21), რომელიც გვიჩვენებს როგორ იცვლება სიჩქარე მოძრაობის დროს. ცხადია, ამ ჰოდოგრაფის A_1 და B_1 წერტილებს შორის გავლებული ვექტორი იქნება სიჩქარის $\Delta\vec{v}$ ნაზრდი. შეფარდებას

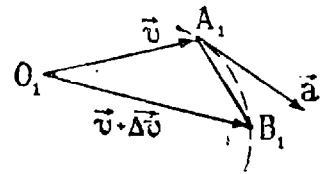
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{II}, 31)$$

ვუწოდოთ საშუალო აჩქარება დროის Δt შუალედში. ის მიმართული იქნება ჰოდოგრაფის მკვეთის გასწვრივ, ისე როგორც საშუალო

სიჩქარე მიმართული იყო ტრაექტორიის მკვეთის გასწვრივ და გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება სიჩქარე დროის ერთეულში. აქაც, როგორც სიჩქარის შემთხვევაში, ნამდვილი აჩქარების გასაგებად დავიწყეთ Δt შუალედის უსასრულოდ შემცირება, ე. ი. ტრაექტორიის B წერტილის მიახლოება A წერტილთან ან, რაც იგივეა,



ნახ. 20.



ნახ. 21.

ჰოდოგრაფის B_1 წერტილის მიახლოება A_1 წერტილთან. Δt დროის ასეთი შემცირებით მიღებული $\Delta \vec{v}$ -სა და Δt -ს შეფარდების ზღვარს ეწოდება ნამდვილი აჩქარება t მომენტში და აღინიშნება \vec{a} ასოთი:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (\text{II}, 32)$$

როგორც ვხედავთ, ნამდვილი აჩქარება არის სიჩქარის წარმოებული დროის მიმართ. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან ცხადია, რომ აჩქარება ისეთივე კავშირშია სიჩქარესთან, როგორც სიჩქარე—რადიუს-ვექტორთან. თუ სიჩქარე გვიხანსიათებს რადიუს-ვექტორის ცვლილებას დროის ერთეულში, აჩქარება გვიხანსიათებს სიჩქარის ცვლილებას დროის ერთეულში. ადვილი მისახვედრია, რომ რადიუს-ვექტორსა, ტრაექტორიასა და სიჩქარეს შორის, ერთი მხრივ, და სიჩქარესა, ჰოდოგრაფსა და აჩქარებას შორის, მეორე მხრივ, არსებობს მჭიდრო ანალოგია.

რადიუს-ვექტორი \vec{r}	სიჩქარე \vec{v}
ტრაექტორია — რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი მრუდი.	ჰოდოგრაფი — სიჩქარის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი მრუდი.

სიჩქარე \vec{v} — რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროის მიმართ, ტრაექტორიის მხებად მიმართული ვექტორი:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

აჩქარება \vec{a} — სიჩქარის წარმოებული დროის მიმართ, ჰოლოგრაფის მხებად მიმართული ვექტორი:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

აჩქარება შეიძლება დავაკავშიროთ უშუალოდ რადიუს-ვექტორთან, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ სიჩქარე არის რადიუს-ვექტორის წარმოებული დროით:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

ჩასმა (II,32) ფორმულაში მოგვცემს

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (\text{II,33})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ აჩქარება შეიძლება განისაზღვროს როგორც რადიუს-ვექტორის მეორე წარმოებული დროის მიმართ.

ვიპოვოთ აჩქარების პროექციები კოორდინატთა ღერძებზე. ამისათვის უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც სიჩქარის პროექციების განსაზღვრის დროს; უნდა განვიხილოთ საშუალო აჩქარება \vec{a}_m და დავაგეგმილოთ იგი კოორდინატთა ღერძებზე

$$a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \quad a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. მივიღებთ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (\text{II,34})$$

ე. ი. აჩქარების პროექციები ღერძებზე ტოლია სიჩქარის სათანადო პროექციების პირველი წარმოებულებისა დროით ან სათანადო კოორდინატების მეორე წარმოებულებისა დროის მიმართ.

აჩქარების სიდიდისათვის მივიღებთ

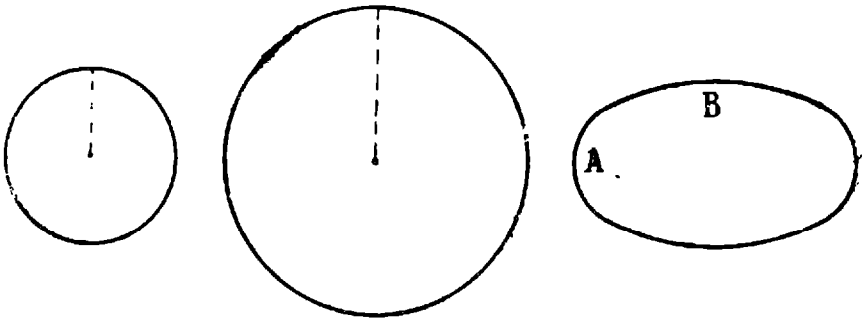
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{II,35})$$

თუ ნაწილაკი OX ღერძის გასწვრივ მოძრაობს, აჩქარებისათვის მივიღებთ

$$a = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

§ 11. წირის სიმრუდე

სანამ უფრო დაწვრილებით განვიხილავდეთ მრუდწირული მოძრაობის აჩქარებას, შევიწყველოთ მრუდი წირის დამახასიათებელი გეომეტრიული თვისება—სიმრუდე. როდესაც ჩვენ ვუყურებთ სხვადასხვა მრუდ წირს ან ერთისა და იმავე წირის სხვადასხვა ნაწილს, ნათლად ვამჩნევთ, რომ ერთი მათგანი უფრო მეტადაა გამრუდე-



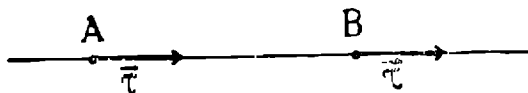
ნახ. 22.

ბული, მეორე კი ნაკლებად. მაგალითად, ცხადია, რომ სხვადასხვა რადიუსის ორ წრეხაზს შორის, პატარარადიუსიანი წრეხაზი მეტად გამრუდებულია, ვიდრე დიდრადიუსიანი. ასევე, ელიფსის B წერტილის მახლობლად რკალი ნაკლებად გამრუდებულია, ვიდრე A წერტილის მახლობლად (ნახ. 22).

თვალსაჩინოდ ამას იმით გამოხატავენ, რომ B წერტილის მახლობლად წირის ნაწილი უფრო ჭეკვს წრფეს, ვიდრე A წერტილის მეზობელი ნაწილი. მაგრამ ასეთი თვალსაჩინო წარმოდგენა წირის სიმრუდეს არ არის საკმარისი. მისი რაოდენობრივი დახასიათებისათვის საჭიროა შემოვიღოთ სათანადო სიდიდე, რომელიც დაგვიხასიათებს წირის სიმრუდეს.

შევადაროთ ამისათვის ერთმანეთს წრფე და მრუდი წირი (ნახ. 23, 24). წრფის რაიმე A წერტილიდან მის გასწვრივ გავავლოთ ერთეულოვანი სიგრძის $\vec{\tau}$ ვექტორი. ამ ვექტორის მიმართულება გვიჩვენებს წრფის მიმართულებას A წერტილის მახლობლად. თუ ამ ერთეულოვან ვექტორს (მგეზავს) გადავიტანთ წრფის

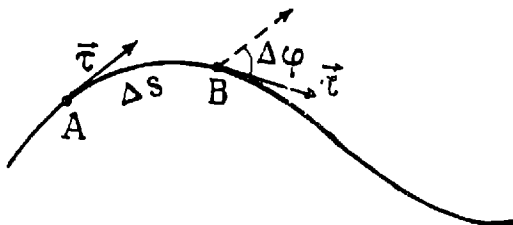
მხვა, მაგალითად B წერტილში, იგი არ შეიცვლის თავის მიმართულებას, ე. ი. წრფის გასწვრივ აღებული ერთეულოვანი ვექტორი არ იცვლის მიმართულებას ასეთი გადანაცვლების დროს. სწო-



ნახ. 23.

რედ ეს თვისებაა დამახასიათებელი წრფისათვის. იგი გვიჩვენებს, რომ წრფე არ არის გამრუდებული.

განვიხილოთ მრუდი წირი (ნახ. 24). ავიღოთ მისი რაიმე AB რკალი და დავახასიათოთ მისი გამრუდება. A წერტილიდან მხების მიმართულებით გავატაროთ ერთეულოვანი ვექტორი. ეს ვექტორი, შეიძლება ითქვას, გვიჩვენებს მრუდის მიმართულებას A წერტილის მახლობლად. რკალის მეორე B წერტილში გავავლოთ ასეთივე ერთეულოვანი ვექტორი. ცხადია, წრფისაგან



ნახ. 24.

განსხვავებით, მრუდი წირის შემთხვევაში A და B წერტილებში გავლებული მხებები და მათი სათანადო ერთეულოვანი ვექტორები სხვადასხვა მიმართულების იქნებიან. B წერტილში გავლებული ერთეულოვანი ვექტორი მობრუნებულ იქნება რაღაც კუთხით A წერტილში გავლებული ერთეულოვანი ვექტორის მიმართ. მხებისა და, მაშასადამე, ერთეულოვანი ვექტორის ეს მობრუნება წირის გასწვრივ გადანაცვლების დროს არის სწორედ ამ წირის გამრუდების დამახასიათებელი. მაგრამ უნდა მიექცეს ყურადღება იმ ფარემოებას, რომ მხები ერთეულოვანი ვექტორის მობრუნების კუთხე დამოკიდებულია არა მარტო გამრუდების სიდიდეზე, არამედ იმაზედაც, თუ რა მანძილზე ხდება გადანაცვლება წირის გასწვრივ. ამიტომაც წირის რაიმე ორი ნაწილის სიმრუდის შესადარებლად შემდეგნაირად იქცევიან: განსახილველ ადგილებში იღებენ წირის ტოლ მონაკვეთებს და ადარებენ ერთმანეთს სათანადო მობრუნების კუთხეებს.

ვთქვათ, ჩვენ გვსურს წირის Δs სიგრძის AB რკალის სიმრუდის განსაზღვრა; ამ რკალის ბოლო წერტილებში გავატაროთ

მხები ერთეულოვანი ვექტორები და გამოვთვალოთ მათ შორის მოთავსებული $\Delta\varphi$ კუთხე (მობრუნების კუთხე). ამ მობრუნების კუთხის შეფარდებას რკალის Δs საგრძნობთან ეწოდება AB რკალის სიმრუდე. თუ სიმრუდეს K ასოთი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$K_{საშ.} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \quad (\text{II}, 36)$$

ეს სიდიდე გვიჩვენებს რა კუთხით მობრუნდება მხები ერთეულოვანი ვექტორი წირის გასწვრივ მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს. ცხადია, $K_{საშ.}$ ახასიათებს მთელი AB რკალის სიმრუდეს და არაფერს გვეუბნება მისი ცალკეული ნაწილების სიმრუდის შესახებ. თუ გვსურს გავიგოთ სიმრუდე წირის აღებულ წერტილში, უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც ვიქცეოდით, როდესაც ცვალებადობით ნამდვილ სიჩქარეს საშუალო სიჩქარის საშუალებით. ამისათვის უნდა დავიწყოთ AB რკალის შემცირება (B წერტილის A წერტილთან მიახლოება) და, ბოლოს, უნდა მოვახდინოთ ზღვარზე გადასვლა, როდესაც Δs რკალი მიისწრაფვის ნულისაკენ; აქედან წირის სიმრუდისათვის, აღებულ წერტილში, მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (\text{II}, 37)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები. ცხადია, წრფის შემთხვევაში სიმრუდე ნულის ტოლია. მართლაც, ამ შემთხვევაში მხები ერთეულოვანი ვექტორი არ იცვლის მიმართულებას, ე. ი. $\Delta\varphi = 0$ და სიმრუდეც ნულის ტოლი იქნება. განვიხილოთ ახლა ფრიად მნიშვნელოვანი შემთხვევა წრეხაზისა. ვინაიდან ამ შემთხვევაში მხები რადიუსის მართობია, A და B წერტილებში გავლებულ მხებ ერთეულოვან ვექტორებს შორის კუთხე სათანადო რადიუსებს შორის მდებარე კუთხის ტოლი იქნება. გარდა ამისა, წრეხაზის რკალისათვის გვაქვს ფორმულა $\Delta s = R\Delta\varphi$, სადაც R არის წრის რადიუსი; აქედან სიმრუდისათვის მივიღებთ

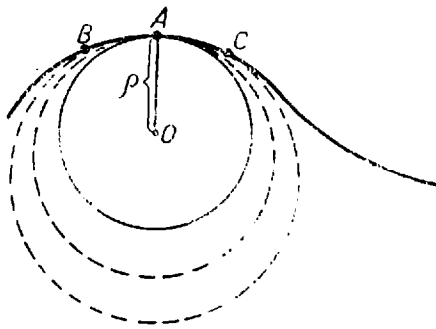
$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{R} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{R}. \quad (\text{II}, 38)$$

როგორც ვხედავთ, წრეხაზის სიმრუდე მისი რადიუსის შებრუნებული სიდიდის ტოლია. რაც უფრო დიდია წრეხაზის რადიუსი, მით უფრო მეტად ჰგავს წრეხაზის ნაწილი წრფის ნაწილს, ე. ი. მით უფრო ნაკლებია მისი სიმრუდე. უნდა აღინიშნოს, რომ წრეხაზის ყველა წერტილში სიმრუდე ერთი და იგივეა და ასეთი

მუდმივი სიმრუდის წირი მხოლოდ ორია — წრფე და წრეხაზი (ბრტყელ წირებს შორის).

წრეხაზისათვის მიღებული შედეგი, რომ სიმრუდე რადიუსის შებრუნებული სიდიდეა, შემდეგ საკითხს სუამს. ხომ არ შეიძლება ნებისმიერი წირისათვის შემოვიღოთ რადიუსის მსგავსი სიდიდე, რომელიც დაგვეხმარება წირის სიმრუდის დახასიათებაში? ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. ვთქვათ, ჩვენ გვსურს დავახასიათოთ წირის სიმრუდე A წერტილის მახლობლად (ნახ. 25).

გამოვყოთ A წერტილის ირგვლივ BAC რკალი. თუ ეს რკალი საკმაოდ მცირეა, იგი შეიძლება მიახლოებით განვიხილოთ როგორც A , B და C წერტილებზე გავლებული წრეხაზის რკალი. O იყოს ამ წრეხაზის ცენტრი, ხოლო R — მისი რადიუსი,



ნახ. 25.

მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ BAC რკალის სიმრუდე მიახლოებით. ტოლი იქნება ამ წრეხაზის სიმრუდისა, ე. ი. R -ის შებრუნებული სიდიდისა.

$$K_{\text{სმ.}} \approx \frac{1}{R}.$$

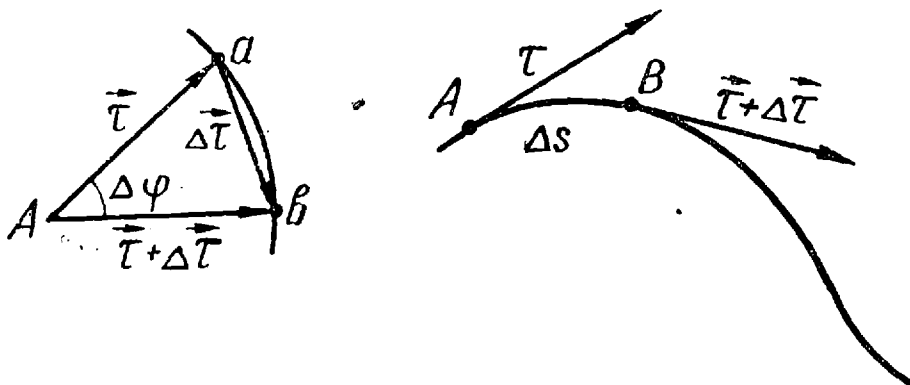
თუ ჩვენ გვსურს გამოვთვალოთ სიმრუდე A წერტილში, უნდა თანდათანობით დავუახლოვოთ B და C წერტილები A წერტილს. ამ დაახლოებასთან ერთად შეიცვლება მათზე გავლებული წრეხაზი, მისი ცენტრი და სათანადო რადიუსი. ზღვარში, როდესაც B და C წერტილები A წერტილს თანხვედებიან, მათზე გავლებული წრეხაზი გადავა რაღაც ზღვრულ წრეხაზში. თუ ამ ზღვრული წრეხაზის რადიუსს ρ -თი აღვნიშნავთ, სიმრუდისათვის A წერტილში მივიღებთ

$$K = \frac{1}{\rho}. \quad (\text{II}, 39)$$

ρ -ს ეწოდება სიმრუდის რადიუსი. მაშასადამე, სიმრუდის რადიუსი არის სიმრუდის შებრუნებული სიდიდე და ამავე დროს იმ ზღვრული წრეხაზის რადიუსი, რომელიც მიიღება როგორც ზღვარი აღებულ წერტილზე და მის მახლობელ ორ წერტილზე გავლებული წრეხაზისა, ამ მახლობელი წერტილების აღებულ წერტილთან

მიახლოების დროს. თვით ამ ზღვრული წრეხაზის ცენტრს სიმრუდის ცენტრი ეწოდება.

შემდეგისათვის ხელსაყრელი იქნება სიმრუდის გამოსახვა არა კუთხის, არამედ თვით ერთეულოვანი მხები ვექტორის წარმოებულის



ნახ. 26.

საშუალებით. როგორც ზემოთ ვთქვით, წირის გასწვრივ Δs რკალით გადანაცვლების შედეგად $\vec{\tau}$ ვექტორი შეიცვლება (მიმართულებით) და B წერტილში იგი იქნება $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$. 26-ე ნახაზზე ნახვენებია ერთ წერტილში თავმოყრილი $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ ვექტორები. განვიხილოთ $\vec{\tau}$ -ს წარმოებული რკალის მიმართ, შევადგინოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

ეს შეფარდება წარმოადგენს ვექტორს, მიმართულს $\Delta\vec{\tau}$ -ს გასწვრივ. წარმოებულის მისაღებად უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δs ნულისაკენ მიისწრაფვის

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

გამოვარკვიოთ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულება. ცხადია, $\vec{\tau}$ ვექტორის სიდიდის უცვლელობის გამო, $\Delta\vec{\tau}$ ადგენს ტოლ კუთხეებს $\vec{\tau}$ და $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$ ვექტორებთან, ე. ი. aAb სამკუთხედში a და b წვეროებთან კუთხეები ტოლია. ზღვარზე გადასვლისას $\Delta\vec{\tau}$ ნულისაკენ მიისწრაფვის, სამკუთხედი თანდათან ვიწროვდება, $\Delta\varphi$ კუთხე მიისწრაფვის ნულისაკენ და, მაშასადამე, a და b წვეროებთან კუთხეები მართი კუთხისაკენ მიისწრაფვიან (მათი ჯამი პლუს $\Delta\varphi$, რომელიც ნულისაკენ მიისწრაფვის, π -ს ტოლი უნდა იყოს). მაშასადამე,

აღვარში $\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$ ვექტორი $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობი ხდება და ამიტომაც ასეთივე მიმართულების იქნება $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორიც. მხები ერთეულ-ლოვანი ვექტორის წარმოებული რკალის მხების მართობია; ეს შედეგი შემდეგნაირად შეიძლება მივიღოთ. ვინაიდან $\vec{\tau}$ ერთეულ-ლოვანი ვექტორია, მისი სკალარული ნამრავლი თავის თავთან ერთის ტოლი იქნება

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1.$$

გავაწარმოოთ ეს ტოლობა რკალის მიმართ, მივიღებთ

$$\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0, \quad (\text{II}, 40)$$

საიდანაც გამოძვინარეობს, რომ $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორი $\vec{\tau}$ ვექტორის მართობია (ვინაიდან მათი სკალარული ნამრავლი ნულია).

გამოვარკვეოთ ახლა როგორია $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის სიდიდე. ე. ი. გამოვთვალოთ შემდეგი ზღვარი:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right|.$$

ვადავწეროთ ეს გამოსახულება ასე:

$$\lim \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\overline{ab}} \cdot \frac{\overline{ab}}{|\Delta s|},$$

სადაც \overline{ab} არის $\vec{\tau}$ ვექტორის ბოლო წერტილის მიერ შემოწერილი რკალი. ვინაიდან $\vec{\tau}$ ვექტორის სიგრძე უცვლელია, \overline{ab} იქნება წრეხაზის რკალი და ამიტომ მასა და $\Delta \varphi$ ცენტრალურ კუთხეს შორის კავშირი იქნება

$$\overline{ab} = |\Delta \vec{\tau}| \cdot \Delta \varphi.$$

მაგრამ $|\vec{\tau}| = 1$ და ამიტომ $\overline{ab} = \Delta \varphi$, აქედან მივიღებთ

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\overline{ab}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{|\Delta s|}.$$

პირველი მამრავლი, როგორც ზღვარი ქორდისა და რკალის შეფარდებისა, ერთის ტოლია და ამიტომ გვექნება

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (I)$$

მაგრამ მხები ვექტორის მობრუნების კუთხის წარმოებული რკა არის წირის სიგრძედ და მაშასადამე, ვღებულობთ

$$K = \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|, \quad (I)$$

ე. ი. სიმრუდე არის მხები ერთეულოვანი ვექტორის რკ მიმართ წარმოებულის სიდიდე. როგორც ვხედავთ, მხები ერთეულოვანი ვექტორის რკალის მიმართ წარმოებული მიმართულების მართობულად და სიდიდით სიმრუდის ტოლია. მისი მართულება გვიჩვენებს წირის ჩაზნექილობის მიმართულებას (სიმრუდის ცენტრის მდებარეობის მიმართულებას).

§ 12. აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენლები

უკვე აღვნიშნეთ, რომ აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის ცვლბას. მაგრამ სიჩქარე, როგორც ვექტორული სიდიდე, ხასიათ სიდიდითა და მიმართულებით. ამიტომაც, თუ წერტილის სიჩქარე ცვალებადია, შეიძლება შეიცვალოს როგორც მისი სიდიდე მიმართულება. ამის შესაბამისად აჩქარება ორი მდგენლის უნდა შედგებოდეს. ერთი მდგენელი უნდა ახასიათებდეს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას, ხოლო მეორე კი—მიმართულების ცვლბას. ამ მდგენლების გამოყოფისა და შესწავლისათვის წარმოვიღოთ წერტილის სიჩქარის ვექტორი შემდეგი სახით:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (I)$$

სადაც v არის სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდე, ხოლო $\vec{\tau}$ —მის მართულების მაჩვენებელი მხები ერთეულოვანი ვექტორი. აჩქარების გამოსათვლელად \vec{v} უნდა გავაწარმოოთ დროის მიმართ. ვიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (I)$$

განვიხილოთ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი შესაკრებ ცალ-ცალკე. პირველი მათგანი წარმოადგენს $\vec{\tau}$ ერთეულოვანი ვექტორის, ე. ი. მხების გასწვრივ მიმართულ ვექტორს, ხოლო მეორე სიდიდე უდრის სიჩქარის სიდიდის წარმოებულს დროის მიმართ. იგი ახასიათებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას. აღ-

ნოთ იგი \vec{a}_τ -თი და ვუწოდოთ მხები, ანუ ტანგენციალური აჩქარება, ვინაიდან იგი მხების გასწვრივ არის მიმართული (ნახ. 27).

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\tau} \quad (\text{II,45})$$

იგი შეიძლება მიმართული იყოს როგორც სიჩქარის გასწვრივ, ისე მის საწინააღმდეგოდ. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია $\frac{dv}{dt}$ -ს ნიშანი, ე. ი. იზრდება თუ კლებულობს სიჩქარის სიდიდე.

განვიხილოთ ახლა მეორე შესაძრები, რომელსაც ჩვენ \vec{a}_n -ით აღვნიშნავთ:

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

გადავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

და მივიღოთ მხედველობაში, რომ $\frac{ds}{dt} = v$, მივიღებთ

$$\vec{a}_n = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} \quad (\text{II,46})$$

გამოვარკვითოთ როგორია აჩქარების ამ მდგენლის სიდიდე და მიმართულება. თუ წინა ტოლობას სკალარულად ჩავწერთ, გვექნება

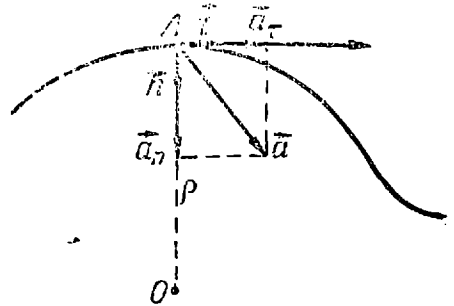
$$a_n = v^2 \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$$

მაგრამ წინა პარაგრაფის შედეგების თანახმად $\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|$ არის ნაწილაკის მიერ შემოწერილი წირის, ე. ი. ტრაექტორიის სიმრუდე, რომელიც სიმრუდის რადიუსის საშუალებით შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$\left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$$

აქედან მივიღებთ

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (\text{II,47})$$



ნახ. 27.

გაეარკვიოთ \vec{a}_n -ის მიმართულება. (II,46) ფორმულის თანახმად მისი მიმართულება თანხვედბა $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულებას. მაგრამ ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს ვექტორი ყოველთვის $\vec{\tau}$ ვექტორის, ე. ი. მხების მართობულად არის მიმართული. $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ვექტორის მიმართულებას ნორმალის მიმართულება ეწოდება და ამიტომ აჩქარების \vec{a}_n მდგენელს ნორმალური აჩქარება ეწოდება. თუ ნორმალის გასწვრივ გატარებულ ერთეულოვან ვექტორს \vec{n} -ით აღვნიშნავთ, ნორმალური აჩქარებისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (\text{II,48})$$

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ, რომ მრუდწირული მოძრაობის დროს სრული აჩქარება შეიძლება ორ მდგენლად დაიშალოს. ერთი მათგანი, მხები აჩქარება, $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$, მიმართულია მხების გასწვრივ და გვიჩვენებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას. მეორე მდგენელი, ნორმალური აჩქარება $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$, მიმართულია ნორმალის გასწვრივ სიმრუდის ცენტრისაკენ (ყოველთვის წირის ჩაზნექილობისაკენ) და გვიჩვენებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას. სრული აჩქარების ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}. \quad (\text{II,49})$$

ვინაიდან \vec{a}_τ და \vec{a}_n ურთიერთმართობია, აჩქარების სიდიდისათვის გვექნება

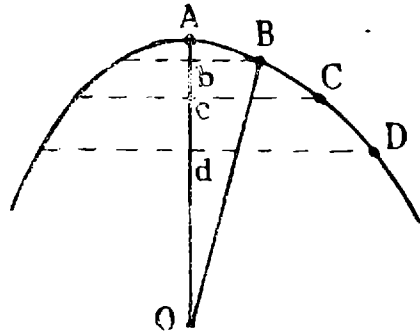
$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (\text{II,50})$$

წრიული მოძრაობის შემთხვევაში $\rho = r$ და ვინაიდან, გარდა ამისა, სრული სიჩქარე $v = r\omega$, ნორმალური აჩქარების ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\vec{a}_n = r\omega^2 \vec{n}. \quad (\text{II,51})$$

ნორმალური აჩქარების არსებობა შეიძლება გამოვამჟღავნოთ და მისი ფორმულა ადვილად გამოვიყვანოთ შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან. მრუდე ტრაექტორიის მცირე ნაწილი შეიძლება

განვიხილოთ როგორც ρ რადიუსის მქონე წრეხაზის რკალი (ნახ. 23). ვინაიდან რკალი საკმარისად მცირეა, მასზე მოძრაობა შეიძლება თანაბარ მოძრაობად ჩავთვალოთ. გავყოთ ეს რკალი რამდენიმე ტოლ ნაწილად (ნახაზზე სამ ნაწილად) და გაყოფის B , C და D წერტილებიდან დაეშვათ AO რადიუსზე მართობები. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, როდესაც წერტილი გადაინაცვლებს რკალზე A -დან B წერტილში, მისი პროექცია გაივლის AB მანძილს რადიუსის გასწვრივ. B -დან C წერტილში გადაინაცვლებისას პროექცია გაივლის bc მანძილს და ა. შ. ნახაზიდან ჩანს, რომ რადიუსზე პროექცია არათანაბრად მოძრაობს, ვინაიდან მის მიერ დროის ტოლ შუალედებში გავლილი მანძილები Ab , bc , cd და ა. შ. თანდათან მატულობენ. დავამტკიცოთ, რომ გარკვეულ მიახლოებაში პროექციის მოძრაობა რადიუსის გასწვრივ (სიმრუდის ცენტრისაკენ) თანაბრად აჩქარებულია. მართლაც, AOB სამკუთხედიდან მივიღებთ



ნახ. 28.

ან

$$2Ab \cdot AO = AB^2,$$

ან

$$Ab = \frac{1}{2} \frac{AB^2}{AO}.$$

მაგრამ AB ქორდა მიახლოებით AB რკალის ტოლია და წარმოადგენს t დროში v სიჩქარით გავლილ მანძილს

$$AB = v \cdot t,$$

ხოლო AO არის სიმრუდის რადიუსი, ამიტომ მივიღებთ

$$Ab = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\rho} t^2;$$

ეს კი არის თანაბრად აჩქარებული მოძრაობის მანძილის ფორმულა რადიუსის გასწვრივ მიმართული აჩქარებით

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

ნორმალურ აჩქარებას ხშირად უწოდებენ აგრეთვე ცენტრისკენულ აჩქარებას, ვინაიდან იგი მიმართულია ტრაექტორიის სიმრუდის ცენტრისაკენ.

§ 13. მოძრაობის კინემატიკა

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ მოძრაობის დამახასიათებელი ელემენტები—სიჩქარე და აჩქარება; გავარჩიეთ მათი განმსაზღვრელი ზოგადი ფორმულები ნებისმიერად მოძრავი ნივთიერ წერტილისათვის. ახლა განვიხილოთ კერძო სახის მოძრაობები რომელთათვისაც დამოკიდებულება გავლილ გზას, სიჩქარესა და აჩქარებას შორის უფრო მარტივ სახეს ღებულობს. მოძრაობანი რომელნიც ხშირად გვხვდებიან ბუნებაში, მიახლოებით მაინც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ასეთი მარტივი სახის მოძრაობანი.

1. მოძრაობა მუდმივი სიჩქარით. ვინაიდან ვექტორული აჩქარება ნულის ტოლია

$$\vec{a} = 0,$$

ვექტორული სიჩქარე მუდმივი იქნება

$$\vec{v} = \text{const},$$

რაც, პირველ ყოვლისა, იმას ნიშნავს, რომ ტრაექტორია სწორ ხაზს წარმოადგენს. თუ ამ უკანასკნელს OX ღერძად ავირჩევთ სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

ამ განტოლების ინტეგრება მოგვცემს

$$x = vt + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია; მისი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის დაეუშვათ, რომ, როცა $t=0$, x კოორდინატი x_0 -ის ტოლია (x_0 იქნება ნაწილაკის საწყისი კოორდინატი). წინა განტოლებაში ჩასმა მოგვცემს $C=x_0$ და მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = x_0 + vt. \quad (\text{II}, 52')$$

2. სწორხაზოვანი მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. წინა შემთხვევაში ნულის ტოლი იყო სრული აჩქარება და ამიტომ მოძრაობა იყო თანაბარი და სწორხაზოვანი. გამოვარკვეით ახლა როგორია მოძრაობა, როდესაც ნულის ტოლია მხოლოდ ნორმალური აჩქარება. ვინაიდან უკანასკნელი ახასიათებს სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას, ცხადია, განსახილველ შემთხვევაში მოძრაობა სწორხაზოვანი იქნება. როგორი ხასიათი ექნება მოძრაობას ამ

აწორ ხაზზე, დამოკიდებულია მხები აჩქარების მნიშვნელობაზე. პართლა, ვთქვათ ნორმალური აჩქარება ნულის ტოლია

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = 0.$$

რადგან არც v სიჩქარე და არც \vec{n} ერთეულოვანი ვექტორი ნულის ტოლი არ არის, ეს ტოლობა შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, თუ უსასრულოდ დიდია სიმრუდის რადიუსი $\rho \rightarrow \infty$, რაც, როგორც ვიცით, იმის პირობაა, რომ ტრაექტორია სწორი ხაზია. თუ ამ სწორ ხაზს OX ღერძად ავირჩევთ, მოძრაობის განტოლებისათვის გვექნება

$$x = f(t).$$

ამ ფუნქციის სახე დამოკიდებულ იქნება მხები აჩქარების მნიშვნელობაზე. თუ მხები აჩქარებაც ნული იქნება, მივიღებთ თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის წინა შემთხვევას. ამ უმარტივესი შემთხვევის შემდეგ ყველაზე მნიშვნელოვანია მოძრაობა, როდესაც მისი მხები აჩქარება მუდმივია, ე. ი. როდესაც

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = \text{const.}$$

აქედან მივიღებთ

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

სადაც a არის აჩქარების სკალარული მნიშვნელობა. ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს

$$v = v_0 + at, \quad (\text{II}, 52)$$

სადაც v_0 იქნება ნაწილაკის სიჩქარე საწყის $t=0$ მომენტში. კოორდინატის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at,$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (\text{II}, 53)$$

სადაც x_0 იქნება კოორდინატი საწყის მომენტში. მოძრაობას, რომელიც (II,52) და (II,53) ფორმულებით აღიწერება, ეწოდება სწორ-ხაზოვანი თანაბრად აჩქარებული მოძრაობა. ასეთი მოძრაობისათვის სიჩქარე არის დროის წრფივი, ხოლო კოორდინატი—კვადრატული

ტული ფუნქცია. გამოთქმაში „თანაბრად აჩქარებული“ ჩვენ ფიქსირებული როგორც საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობაზე, ე. ი. ისეთ მოძრაობას, რომლისთვისაც სიჩქარის სიდიდე ერთი იმავე სიდიდით მატულობს დროის შუალედებში, ისე თანაბრად შენელებულ მოძრაობასაც, რომლისთვისაც სიჩქარის სიდიდე ერთი იმავე სიდიდით კლებულობს დროის ტოლ შუალედებში. როგორც ახლა ვნახავთ, მოძრაობის ხასიათი, ე. ი. საკუთრივ აჩქარებულია თუ შენელებულია მოძრაობა, დამოკიდებულია v_0 და სიდიდეების ნიშანზე და იმ დროის შუალედზე, რომლის განმავლობაშიც განიხილება მოძრაობა. სიმარტივისათვის დაეუშვათ, რომ $x_0 = 0$ და განვიხილოთ დროის შუალედი საწყისი მომენტიდან $t = +\infty$ -მდე, ე. ი. საწყისი მომენტის მიმართ მომავალი ($t \geq 0$) დრო.

ვთქვათ, $v_0 > 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას OX ღერძის დადებითი მიმართულებით. თუ აჩქარება დადებითია ($a > 0$), მაშინ (II,52) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სიჩქარე ყოველთვის დადებითია და თანაბრად იზრდება დროის პროპორციულად. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობა არის საკუთრივ თანაბრად აჩქარებული OX ღერძის დადებითი მიმართულებით.

დაეუშვათ, რომ v_0 ისევ დადებითია, მაგრამ აჩქარება უარყოფითია ($a < 0$). (II,52) განტოლების მეორე წევრი (at) უარყოფითი იქნება. დროის ზრდასთან ერთად მისი სიდიდე იზრდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ v სიჩქარის სიდიდე თანაბრად კლებულობს მოძრაობა იქნება თანაბრად შენელებული. მაგრამ ასეთი მოძრაობა

გაგრძელდება მხოლოდ $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტამდე. ამ მომენტში სიჩქარე

გახდება ნულის ტოლი და ნაწილაკი გაჩერდება. ამის შემდეგ მეორე წევრი სიდიდით გადააჭარბებს პირველ წევრს, v სიჩქარე გახდება უარყოფითი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკი იმოძრაობს OX ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით. სიჩქარის სიდიდე თანდათან მატულობს და საწყის მდებარეობას ნაწილაკი გაივლი

$t = -\frac{2v_0}{a}$ მომენტში, $-v_0$ სიჩქარით, ე. ი. იმ სიჩქარის ტოლი და

საწინააღმდეგო სიჩქარით, რომლითაც მან დაიწყო მოძრაობა. საწყის მდებარეობაზე გავლის შემდეგ იგი განაგრძობს მოძრაობას OX ღერძის უარყოფით მხარეზე, სულ უფრო მეტად და მეტად

ზრდადი სიჩქარით. როგორც ვხედავთ, $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტის შემდეგ

დღე მოძრაობა იქნება საკუთრივ თანაბრად აჩქარებული, მხოლოდ იგი მიმართული იქნება OX ღერძის საწინააღმდეგოდ.

მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ ასეთი შედეგი:

1. $v_0 > 0, a > 0$ — მოძრაობა საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულია და მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ.

2. $v_0 > 0, a < 0$ — საწყისი მომენტიდან $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტამდე მოძრაობა საკუთრივ თანაბრად შენელებულია და მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ, ხოლო $t = -\frac{v_0}{a}$ მომენტის შემდეგ მოძრაობა საკუთრივ თანაბრად აჩქარებულია და მიმართულია OX ღერძის საწინააღმდეგოდ.

ანალოგიურად შეიძლება ჩატარდეს განხილვა შემთხვევისა, როდესაც $v_0 < 0$. მისი გარჩევა მივანდოთ მკითხველს ისევე, როგორც გარჩევა მოძრაობისა საწყისი მომენტის წინა დროისათვის ($t < 0$).

როგორც ვხედავთ, მოძრაობის ხასიათის დადგენა არ შეიძლება მხოლოდ აჩქარების ნიშნის მიხედვით. იგი დამოკიდებულია საწყისი სიჩქარის ნიშანზე და განხილული დროის შუალედზე.

ყოველივე ზემოთქმულის გამო, ბუნებრივია დაისვას კითხვა, რატომ ამბობენ ჩვეულებრივად, რომ ფორმულა

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{II}, 54)$$

გამოხატავს თანაბრად აჩქარებულ ან თანაბრად შენელებულ მოძრაობას იმისდა მიხედვით, დადებითია თუ უარყოფითია აჩქარება. ამ კითხვის პასუხი შემდეგია. ჯერ ერთი, ამ ფორმულაში s -ით აღნიშნულია არა კოორდინატი, რომელსაც შეიძლება ჰქონდეს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობა, არამედ ნაწილაკის მიერ საწყისი ($t=0$) მომენტიდან გავლილი მანძილი, რომელიც დადებითად ითვლება დამოუკიდებლად მისი მიმართულებიდან. გარდა ამისა, $v = v_0 + at$ ფორმულის გამოყენების დროს v_0 სიჩქარეს დადებითად თვლიან და განიხილავენ მხოლოდ დროის შუალედს საწყისი მომენტიდან გაჩერებამდე (უარყოფითი a -ს შემთხვევაში). ცხადია, ამ პირობებში დადებითი a ნიშნავს საკუთრივ, თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას, ხოლო უარყოფითი a — თანაბრად შენელებულს.

3. თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა. ამ შემთხვევაში მოძრაობა იქნება თანაბარი მოძრაობა მრუდ წირზე, რომლის სახე დამოკიდებულია ნორმალურ აჩქარებაზე. მართლაც, პირობის თანახმად

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$r = \text{const},$$

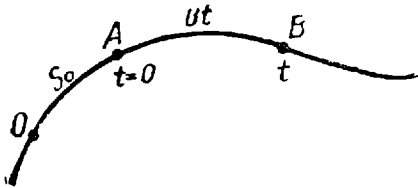
ე. ი. სიჩქარის სიდიდე მუდმივი იქნება. ვინაიდან

$$v = \frac{ds}{dt},$$

სადაც s არის ტრაექტორიის რკალის სიგრძე, ინტეგრება მოგვცემს

$$s = s_0 + vt. \quad (\text{II}, 55)$$

აქ s_0 მუდმივა იქნება საწყისი რკალის სიგრძე, რაიმე ნებისმიერად არჩეული წერტილიდან (ნახ. 29). ჩვენ მივიღეთ ისეთივე განტოლება, როგორც სწორხაზოვანი და თანაბარი მოძრაობისათვის, მხო-



ნახ. 29.

ლოდ არა x კოორდინატისათვის, არამედ რკალის სიგრძისათვის. მოძრაობა წარმოებს მრუდ წირზე (სიჩქარემ შეიძლება შეიცვალოს მიმართულება) და სიჩქარის სიდიდის მიხედვით იგი არის თანაბარი მოძრაობა, ე. ი.

წერტილი დროის ნებისმიერ, მაგრამ ტოლ შუალედებში გადის ტოლ მანძილებს ტრაექტორიის გასწვრივ. ტრაექტორიის სახე დამოკიდებულია ნორმალურ აჩქარებაზე. ყველაზე მარტივ შემთხვევას მივიღებთ, თუ დავუშვებთ: რომ ნორმალური აჩქარება მუდმივია სიდიდით

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \text{const}$$

(თუ $\vec{a}_n = 0$, მივიღებთ სწორხაზოვან და თანაბარ მოძრაობას). რადგანაც სიჩქარის სიდიდე მუდმივია, მუდმივი იქნება აგრეთვე სიმრუდის რადიუსიც. ტრაექტორიას ექნება ერთი და იგივე სასრული სიმრუდე ყველა წერტილში. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ასეთი მრუდი არის მხოლოდ წრეხაზი (ბრტყელ მრუდებს შორის). მაშასადამე, წერტილი, რომლის ნორმალური აჩქარება მუდმივია, ხოლო მხები აჩქარება ნულია, მოძრაობს თანაბრად წრეხაზზე. ამ შემთხვევაში შეიძლება დავწეროთ

$$s = r\varphi,$$

სადაც φ არის s რკალის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე; აქედან სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = r \frac{d\varphi}{dt}.$$

მაგრამ, როგორც ვიცით, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ სიდიდეს ეწოდება კუთხური სიჩქარე და იგი ახასიათებს რადიუს-ვექტორის მიმართულების ცვლილებას; აქედან მივიღებთ ფორმულას, რომელიც აკავშირებს ერთიმეორესთან ხაზოვან და კუთხურ სიჩქარეებს წრიული მოძრაობის დროს

$$v = r\omega.$$

ვინაიდან მოძრაობა თანაბარია, კუთხის ცვლაც თანაბარი იქნება და გვექნება

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (\text{II}, 56)$$

სადაც φ_0 არის კუთხის საწყისი მნიშვნელობა.

4. წრეხაზზე მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. კუთხური აჩქარება. განვიხილოთ წრეხაზზე მოძრაობის ზოგადი შემთხვევა. რადგანაც ტრაექტორია წრეხაზს წარმოადგენს, სიმრუდის რადიუსი (წრეხაზის რადიუსის ტოლი) მუდმივი იქნება (ნახ. 30)

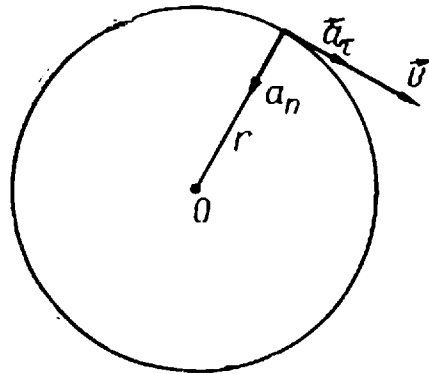
$$\rho = r = \text{const.}$$

წრეხაზისათვის ყოველთვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$s = r \cdot \varphi,$$

საიდანაც სიჩქარის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$v = r\omega.$$



ნახ. 30.

ეს შედეგი ჩვენ უკვე გვექონდა მიღებული ბრუნვითი სიჩქარის განხილვის დროს; აქედან შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ფორმულები ნორმალური და მხები აჩქარებებისათვის:

$$a_n = r\omega^2, \quad a_\tau = r \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad (\text{II}, 57)$$

მეორე ფორმულაში შემოვიდა $\frac{d\omega}{dt}$ სიდიდე, რომელიც წარმოადგენს კუთხური სიჩქარის წარმოებულს დროით და იგი ახასიათებს კუ-

თხური სიჩქარის ცვლილებას დროში. მას ეწოდება კუთხური აჩქარება და აღინიშნება ε ასოთი $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ და, მაშასადამე,

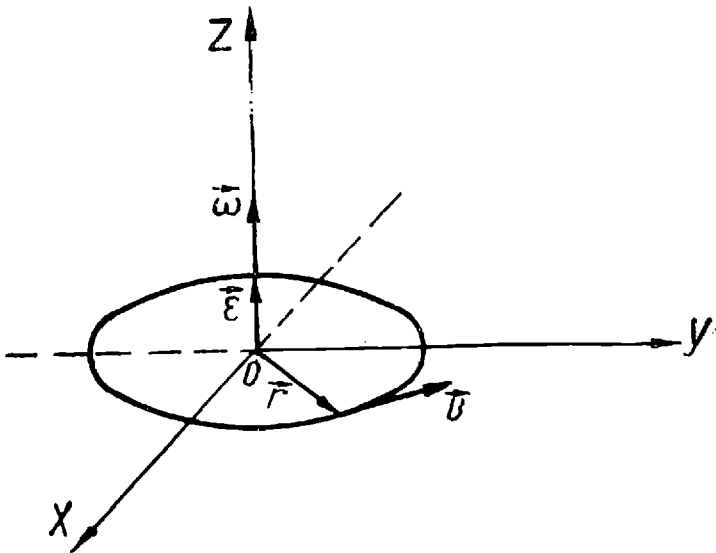
$$a_{\tau} = r\varepsilon. \quad (\text{II}, 58)$$

ცხადია, რომ ε არის კუთხის მეორე წარმოებული დროით, ე. ი.

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

§ 14. კუთხური სიჩქარე და აჩქარება როგორც ვექტორები

ხშირად, განსაკუთრებით მყარი სხეულის ბრუნვის განხილვის დროს, ხელსაყრელია განვიხილოთ კუთხური სიჩქარე და აჩქარებ როგორც ვექტორები. განვიხილოთ წრიული მოძრაობა და დავუწვავთ, რომ წრეხაზი მდებარეობს XOY სიბრტყეში და მისი ცენტრ კოორდინატთა სათავეშია (ნახ. 31). \vec{v} სიჩქარე არის ტრანექტორიისადმი მხები ვექტორი, რადიუს-ვექტორი კი მიმართულია კოორ



ნახ. 31.

დინატთა სათავედან მოძრავი წერტილისაკენ. ამ ვექტორების სადიდებები დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$v = r\omega. \quad (\text{II}, 59)$$

თუ ჩვენ გვსურს განვიხილოთ ეს ტოლობა როგორც ვექტორული, ე. ი. გვინდა დავაკავშიროთ ერთმანეთთან \vec{v} და \vec{r} ვექტორები, აკუთხური სიჩქარეც უნდა განვიხილოთ როგორც ვექტორი, ვინაი-

დან წინააღმდეგ შემთხვევაში \vec{v} იქნებოდა \vec{r} -ის პარალელური. ჩავთვალოთ ამიტომ $\vec{\omega}$ ვექტორად და გამოვარკვიოთ როგორ უნდა იყოს იგი მიმართული, რომ რადიუს-ვექტორის და მისი ვექტორული ნამრავლი გვაძლევდეს \vec{v} ვექტორს. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ამისათვის $\vec{\omega}$ მიმართული უნდა იყოს წრეხაზის სიბრტყის მართობულად OZ ღერძის გასწვრივ, მაშინ მართებული იქნება ტოლობა

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]. \quad (\text{II}, 60)$$

შეიძლება, რასაკვირველია, $\vec{\omega}$ მივმართოთ OZ ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაგრამ მაშინ კავშირი \vec{v} და \vec{r} ვექტორებს შორის დაიწერება შემდეგნაირად:

$$\vec{v} = [\vec{r} \cdot \vec{\omega}].$$

ვინაიდან ჩვეულებრივად (II,60) ფორმულას იყენებენ, შეიძლება ვთქვათ, რომ კუთხური სიჩქარე მიმართულია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ ისე, რომ მარჯვენა ბურლის ბრუნვა მოძრაობის მიმართულებით ბურლს გადაანაცვლებს $\vec{\omega}$ ვექტორის გასწვრივ.

კუთხური აჩქარებაც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი, მიმართული ღერძის გასწვრივ. თუ $\frac{d\omega}{dt} > 0$, $\vec{\varepsilon}$ მიმართული იქნება

ისე, როგორც $\vec{\omega}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ ექნებათ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულება. კავშირი მხებ და კუთხურ აჩქარებებს შორის შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]. \quad (\text{II}, 61)$$

ინჰერციისა და ფარლობითობის პრინციპები

§ 15. ინერციული სისტემები და ინერციის პრინციპი

წინა თავში უკვე გამოვარკვეეთ, რომ ფიზიკური მოვლენების შესწავლისა და მათი მიმდინარეობის კანონების დადგენისათვის საჭიროა რაიმე გარკვეული ათვლის სისტემის არჩევა. მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც არჩეულია ათვლის სისტემა, შეიძლება მსჯელობა ნივთიერი წერტილებისა და სხეულების მდებარეობაზე, მოძრაობაზე და ამ მოძრაობის დამახასიათებელ ელემენტებზე—სიჩქარესა და აჩქარებაზე. ცხადია, რომ მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია ათვლის სისტემის არჩევაზე, ე. ი. ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება სხვადასხვა იქნება სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ. მაგრამ, ცხადია, აგრეთვე, რომ გარდა ათვლის სისტემისა, ნაწილაკების მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია მათ ურთიერთქმედებაზე ერთმანეთთან და სხვა სხეულებთან; მაგალითად, რაიმე პლანეტის მოძრაობა დამოკიდებულია არა მარტო იმაზე, თუ რომელ სხეულს — მზეს თუ დედამიწას ავარჩევთ ათვლის სისტემად, არამედ მის ურთიერთქმედებაზე მზესთან და სხვა პლანეტებთან. ასევეა ყველა სხვა შემთხვევაშიც. მოძრაობის განმსაზღვრელია ორი რამ—ათვლის სისტემა და სხეულთა ურთიერთქმედება.

დაკვირვებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესებზე იმ დასკვნამდე მივყავართ, რომ სხეულთა შორის ურთიერთქმედება მით უფრო სუსტია, რაც უფრო შორსაა ისინი ერთიმეორისაგან—ურთიერთქმედება კლებულობს მანძილის გადიდების დროს. ამიტომაც, თუ ჩვენ გვსურს გავიგოთ, როგორ მოძრაობს სხეული ურთიერთქმედების გარეშე, უნდა ვეცადოთ რაც შეიძლება მეტად დავაშოროთ იგი სხვა სხეულებს. ამიტომ განვიხილოთ ნივთიერი წერტილი, რომელიც იმდენად შორს არის სხვა სხეულებისაგან, რომ შესაძლებელია მათთან ურთიერთქმედების უგულვებლყოფა. ვუწოდოთ ასეთ წერტილს იზოლირებული, ანუ განმხოლოებული წერტილი.

ნივთიერი წერტილი იზოლირებულია თუ იგი იმდენად შორსაა სხვა სხეულებისაგან, რომ შესაძლებელია ურთიერთქმედების უგულებელყოფა.

განვიხილოთ ახლა ასეთი იზოლირებული ნივთიერი წერტილის მოძრაობა. ცხადია, მისი მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულ იქნება მხოლოდ ათვლის სისტემის არჩევაზე (ვინაიდან ურთიერთქმედება უგულებელყოფილია). დავუშვათ, მაგალითად, რომ ასეთ იზოლირებულ წერტილად შეიძლება ჩაითვალოს ცალკეული ვარსკვლავი—საკმაოდ დაშორებული ყველა სხვა ვარსკვლავისაგან. მისი მოძრაობა გარკვეული სახისაა, როდესაც ათვლის სისტემად მიღებულია დედამიწის ზედაპირი. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ვარსკვლავი ერთი დღე-ღამის განმავლობაში შემოწერს წრეხაზს დედამიწის მიმართ. სულ სხვა ხასიათი ექნება მის მოძრაობას, თუ ათვლის სისტემის სათავედ ავირჩევთ დედამიწის ან მზის ცენტრს და ღერძებს „უძრავი“ ვარსკვლავებისაკენ მივმართავთ. მაშასადამე, მიუხედავად იმისა, რომ ვარსკვლავზე სხვა რაიმე სხეული არ მოქმედებს, მისი მოძრაობის ხასიათი იქნება სავსებით გარკვეული, იგი დამოკიდებულ იქნება ათვლის სისტემის არჩევაზე. მრავალი ცდა და დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ათვლის სხვადასხვა სისტემას შორის შეიძლება აირჩეს ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართაც იზოლირებული ნივთიერი წერტილი იქნება უძრავი ან იმოძრაებს თანაბრად და სწორხაზოვნად, ე. ი. მუდმივი სიჩქარით. ეს ფრიად მნიშვნელოვანი ფაქტი შეიძლება ჩამოყალიბდეს როგორც მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი პრინციპი.

ათვლის სხვადასხვა სისტემას შორის მოძებნება ისეთი ათვლის სისტემა, რომლის მიმართაც სხვა სხეულებისაგან იზოლირებული ნივთიერი წერტილი იქნება უძრავი ან იმოძრაებს მუდმივი სიჩქარით.

ამ პრინციპს ეწოდება ინერციის პრინციპი, ხოლო თვით იმ ათვლის სისტემას, რომლის არსებობასაც გულისხმობს ჩამოყალიბებული პრინციპი, ეწოდება ინერციული სისტემა.

ჩვენ მიერ მოყვანილი ჩამოყალიბება ინერციის პრინციპისა განსხვავდება იმ ჩამოყალიბებისაგან, რომელიც მოცემული იყო თვით ნიუტონის მიერ და რომელიც ახლაც ხშირად მიღებულია სახელმძღვანელოებში. მიზეზი იმისა, თუ რატომ შეეცვალეთ ინერციის პრინციპის ნიუტონისეული ჩამოყალიბება, ნათელი გახდება ამ უკანასკნელის ანალიზის შემდეგ. ნიუტონის მიერ ინერციის პრინციპი შემდეგნაირად იყო ჩამოყალიბებული: ყოველი სხეული ინარჩუნებს

თავის უძრავობის ან თანაბარი და სწორხაზოვანი მოძრაობის მდგომარეობას, სანამ გარეშე ძალები არ გამოიყენებენ მას ამ მდგომარეობიდან. ამ ფორმულირებაში გამოყენებული პირობა, რომ განსახილველ სხეულზე არ უნდა მოქმედებდნენ ძალები, რასაკვირველია, იგივეა, რაც ჩვენ ფორმულირებაში გამოყენებული პირობა, რომ წერტილი იზოლირებული უნდა იყოს. ამ მხრივ განსხვავება ორ ფორმულირებას შორის არ არსებობს. მაგრამ ნიუტონისეულ ფორმულირებაში არ არის მითითებული; რომელი სხეული არის აღებული ათვლის სისტემად. იზოლირებული წერტილი არ იქნება უძრავი ან მუდმივი სიჩქარით მოძრავი ნებისმიერი ათვლის სისტემის მიმართ. ამიტომაც, თუ ფორმულირებაში არ იქნება აღნიშნული, რომ დებულება მართებულია მხოლოდ გარკვეული ათვლის სისტემისათვის (ინერციული სისტემისათვის), ინერციის პრინციპი გარკვეულობას დაკარგავს. სწორედ ამიტომ შევცვალეთ ნიუტონისეული ფორმულირება.

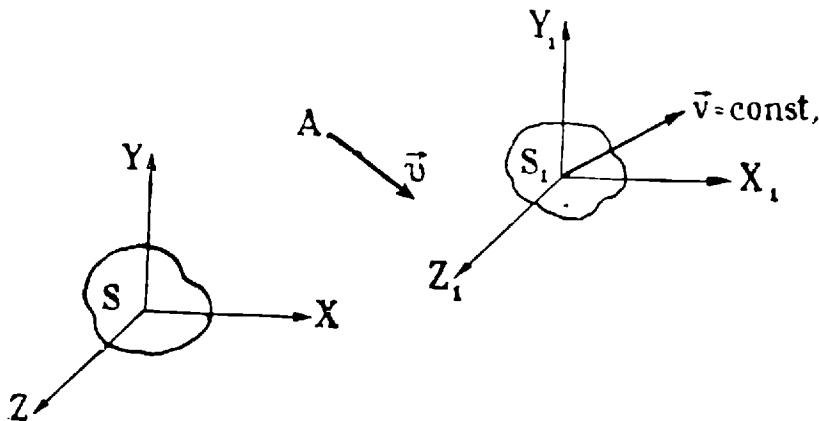
შემდეგში ყოველთვის, სანამ არ იქნება აღნიშნული საწინააღმდეგო, ათვლის სისტემად ინერციული სისტემა გვექნება არჩეული. რასაკვირველია, იმის შემდეგ, რაც განმარტებულია, თუ რომელიც ათვლის სისტემა არის ინერციული, ისმის კითხვა -- როგორ უნდა მოიძებნოს ასეთი სისტემა? ძირითად სისტემას, რომელსაც ადამიანი იყენებს პრაქტიკულად, წარმოადგენს დედამიწის ზედაპირი, ე. ი. სისტემა, რომლის სათავე და ღერძები მკვიდრად და დაკავშირებული დედამიწის ზედაპირთან. დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ ეს ათვლის სისტემა არ წარმოადგენს ინერციულ სისტემას, ვინაიდან სხეულები, რომლებზედაც არ მოქმედებენ გარეშე სხეულები, არ მოძრაობენ ამ სისტემის მიმართ ინერციულად. უფრო ახლოსაა ინერციულ სისტემასთან ათვლის სისტემა, რომლის სათავე დედამიწის ცენტრშია მოთავსებული და ღერძები ე. წ. „უძრავი“ ვარსკვლავებისაკენაა მიმართული. მაგრამ არც ეს ათვლის სისტემა არის ზუსტად ინერციული. კიდევ უფრო ახლოსაა ინერციულ სისტემასთან ათვლის სისტემა, რომლის სათავე მზის ცენტრშია და ღერძები ისევ „უძრავი“ ვარსკვლავებისაკენაა მიმართული (ე. წ. ჰელიოცენტრული სისტემა). რასაკვირველია, არც ეს სისტემაა ზუსტად ინერციული, მაგრამ ძალიან დიდი სიზუსტით იგი შეიძლება ინერციულ სისტემად ჩაითვალოს. საზოგადოდ საკითხი იმის შესახებ არას თუ არა აღებული სისტემა ინერციული, დამოკიდებული ცდების სიზუსტეზე და იმაზე, თუ რომელი სხეულის შესწავლა წარმოებს. თუ, მაგალითად, განიხილება სხეულების მოძრაობა დედამიწის ზედაპირის მახლობლად და დიდი სიზუსტე არ მოითხოვება

დედამიწის ზედაპირიც შეიძლება ჩაითვალოს ინერციულ სისტემად. თუ მოითხოვება მეტი სიზუსტე ან განიხილება ციური სხეულების მოძრაობა, უკვე ნათლად შეიმჩნევა, რომ დედამიწა (გეოცენტრული სისტემა) ვეღარ ჩაითვლება ინერციულად და საჭირო გახდება სხვა, მაგალითად, ჰელიოცენტრულ სისტემაზე გადასვლა და ა. შ.

§ 16. ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა და გალილეის გარდაქმნის ფორმულები

განვიხილოთ საკითხი ინერციული სისტემების რიცხვის შესახებ. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ ინერციული სისტემების მრავალრიცხოვნებაში. ჯერ ერთი, ცხადია, რომ ყოველი სისტემა უძრავი ინერციული სისტემის მიმართ აგრეთვე ინერციული იქნება. შეიძლება იგი პირველი ინერციული სისტემისაგან განსხვავდებოდეს სათავის მდებარეობით ან ღერძების მიმართულებით, მაგრამ თუკი იგი უძრავია მის მიმართ, მისთვისაც მართებული იქნება ინერციის პრინციპი.

მაგრამ ასეთი სისტემებით არ ამოიწურება ინერციული სისტემები. ადვილად მისახვედრია, რომ ინერციული სისტემის მიმართ



ნახ. 32.

მუდმივი სიჩქარით მოძრავი ყოველი ათვლის სისტემა აგრეთვე ინერციული იქნება. მართლაც, ვთქვათ, S არის ინერციული სისტემა (ნახ. 32), რაც იმას ნიშნავს, რომ ურთიერთქმედებისაგან თავისუფალი A ნივთიერი წერტილი მის მიმართ იმოძრავებს მუდმივი სიჩქარით. ავიღოთ მეორე ათვლის სისტემა S1, რომელიც S ათვლის სისტემის მიმართ მოძრაობს აგრეთვე მუდმივი სიჩქარით. ცხადია, A ნივთიერი წერტილი ამ სისტემის მიმართაც მუდმივი სიჩქარით იმოძრავებს. რასაკვირველია, A ნაწილაკის სიჩქარის სი-

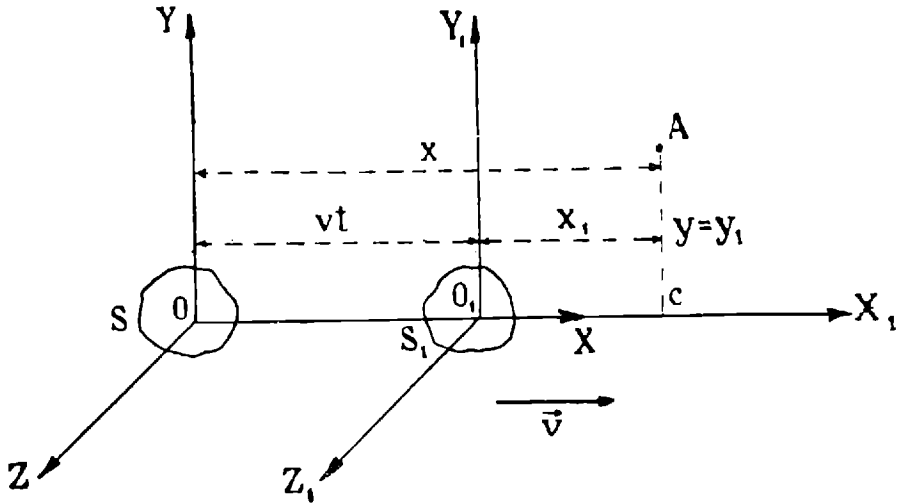
დიდე და მიმართულება S_1 -ის მიმართ არ იქნება ისეთი, როგორც S -ის მიმართ, მაგრამ მთავარი ის არის, რომ მისი მოძრაობა S_1 -ი მიმართაც მუდმივი სიჩქარით იწარმოებს.

როგორც ვხედავთ, ინერციულ სისტემათა რიცხვი უამრავია ყოველი ათვლის სისტემა უძრავი ან მუდმივი სიჩქარით მოძრაე აღებული ინერციული სისტემის მიმართ იქნება აგრეთვე ინერციული.

მას შემდეგ, რაც გამოიკვია, რომ ინერციული სისტემები უამრავია, ბუნებრივად ისმის კითხვა — როგორ არის დაკავშირებული ერთიმეორესთან მათში წარმოებული გაზომვების შედეგები; აკითხვის შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, რაიმე ინერციული სისტემიდან წარმოებულია A ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლა, გაზომილია მისი მდებარეობის განმსაზღვრელ რადიუს-ვექტორი, კოორდინატები, დრო; დადგენილია მათ შორი კავშირი, გამოთვლილია სიჩქარე, აჩქარება და ა. შ. ახლა ვთქვათ: იმავე ნაწილაკის მოძრაობა შეისწავლება მეორე ინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს პირველ ინერციული სისტემის მიმართ. ამ სისტემის მიმართაც განსაზღვრულია A წერტილის მოძრაობის ელემენტები: რადიუს-ვექტორი, კოორდინატები, დრო, სიჩქარე და ა. შ. ცხადია, ეს სიდიდეებ განსხვავდებიან საზოგადოდ პირველი ინერციული სისტემის მიმართ განსაზღვრული სათანადო სიდიდეებისაგან. ზემოთ დასმულ კითხვის შინაარსი მდგომარეობს იმაში, რომ გაიკვეს კავშირ მოძრაობის ელემენტებს შორის სხვადასხვა ინერციული სისტემი მიმართ.

ვთქვათ ერთი ინერციული სისტემა არის S (ნახ. 33). აღვნიშნოთ x, y და z -ით A წერტილში მომხდარი მოვლენის კოორდინატები ამ ინერციული სისტემის მიმართ. ცხადია, ეს კოორდინატები უნდა გაიზომოს ამ სისტემაში არსებული სიგრძის ეტალონით. t -თი აღვნიშნოთ მოვლენის მოხდენის დრო, გაზომილი ამ სისტემის საათით. ვთქვათ, ამავე მოვლენის კოორდინატები და დრო იზომება მეორე S_1 ინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც S -ი მიმართ მუდმივი \vec{v} სიჩქარით მოძრაობს. აღვნიშნოთ სათანადო კოორდინატები და დრო S_1 სისტემის მიმართ x_1, y_1, z_1 და t_1 -ით ამოცანა, რომელიც ჩვენ უნდა გადავწყვიტოთ, მდგომარეობს x, y, z, t და x_1, y_1, z_1, t_1 სიდიდეების ერთმანეთთან დაკავშირებაში მსჯელობის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ S_1 სისტემის კოორდინატთა ღერძები შემდეგნაირადაა მიმართული: O_1X_1 ღერძი მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ, ხოლო O_1Y_1 და O_1Z_1 ღერძებ

სათანადოდ OY და OZ ღერძების პარალელურია. გარდა ამისა, მივიღოთ, რომ როდესაც $t=0$, t_1 -იც ნულის ტოლია, ე. ი. დროის საწყისი მომენტი ორივე სისტემაში ერთი და იგივეა და რომ ამ მომენტში კოორდინატა სათავეები თანხვედნილია. და-



ნახ. 33.

ვუშვათ აგრეთვე, რომ S_1 სისტემა მოძრაობს OX ღერძის გასწვრივ მუდმივი \vec{V} სიჩქარით.

ჩვენ ვიცით, რომ ყოველ სისტემაში კოორდინატები და დრო იზომება თავისი სიგრძის ეტალონითა და საათით. ცხადია, ეს ეტალონები და საათები სრულიად ერთნაირი უნდა იყოს; ეს იმას ნიშნავს, რომ S_1 სისტემაში მყოფი ეტალონი რომ S სისტემაში გადავიტანოთ, იგი უნდა თანხვედეს იქ მყოფ ეტალონს. ასევე საათები ერთსა და იმავე დროს უნდა გვიჩვენებდნენ, როდესაც მათ ერთ სისტემაში მოვათავსებთ.

ფორმულებს, რომლებიც აკავშირებენ ერთმანეთთან კოორდინატებსა და დროს ათვლის სხვადასხვა სისტემაში, გარდაქმნის ფორმულები ეწოდებათ. ჩვენი მიზანია ერთი ინერციული სისტემიდან მეორე ინერციულ სისტემაში გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანა. პირველი ძირითადი დაშვება, რომელსაც ემყარება კლასიკური ფიზიკა ამ საკითხის გადაწყვეტის დროს, შემდეგში მდგომარეობს: თუ ორივე სისტემაში მდებარე საათები ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებენ, როდესაც S_1 უძრავია S -ის მიმართ, ისინი ისევ ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებენ როგორც არ უნდა ამოძრავდნენ სისტემები ერთიმეორის მიმართ; ეს დაშვება იმას ნიშნავს,

რომ რაიმე მოვლენის მოხდენის მომენტში ორივე საათი ერთსა და იმავე დროს გვიჩვენებს.

$$t = t_1. \quad (\text{III}, 1)$$

ამ დაშვებას შემდეგნაირად აყალიბებენ: დროის მიმდინარეობა და მოუკიდებელია ათვლის სისტემის არჩევაზე, ყველა ათვლის სისტემაში დრო ერთნაირად მიმდინარეობს ან, როგორც ხშირად ამბობენ, დრო აბსოლუტურია.

განვიხილოთ ახლა კავშირი A მოვლენის x და x_1 კოორდინატებს შორის. S სისტემის მიმართ A მოვლენის x კოორდინატი არის OC მონაკვეთის სიგრძე, გაზომილი ამ სისტემის ეტალონით. ცხადია, რომ OC მონაკვეთის სიგრძე წარმოადგენს OO_1 და O_1C მონაკვეთების სიგრძეების ჯამს

$$OC = OO_1 + O_1C$$

(სამივე მონაკვეთის სიგრძე გაზომილია S სისტემის ეტალონის საშუალებით). ვინაიდან S_1 სისტემა და მისი O_1 სათავე მოძრაობს S -ის მიმართ OX ღერძის გასწვრივ მიმართული მუდმივი V სიჩქარით, O წერტილის მიერ t დროში გავლილი OO_1 მანძილი (გაზომილი S -ის ეტალონის საშუალებით) იქნება

$$OO_1 = Vt.$$

ამის გამო წინა ტოლობა შემდეგნაირად დაიწერება:

$$x = Vt + O_1C \quad (\text{გაზომილი } S\text{-ის ეტალონის საშუალებით}).$$

მეორე მხრივ, იგივე O_1C მონაკვეთის სიგრძე, მხოლოდ გაზომილი S_1 -ის ეტალონის საშუალებით, არის A მოვლენის x_1 კოორდინატი S_1 -ის მიმართ.

$$x_1 = O_1C \quad (\text{გაზომილი } S_1\text{-ის ეტალონის საშუალებით}).$$

კლასიკური ფიზიკის მეორე ძირითადი დაშვება, რომლის საშუალებითაც იგი აკავშირებს x -სა და x_1 -ს, შემდეგია: მონაკვეთის სიგრძე არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემაზე, იგი აბსოლუტურია. ამ შემთხვევაში ეს იმას ნიშნავს, რომ O_1C მონაკვეთის სიგრძე ერთნაირია ორივე ათვლის სისტემის მიმართ:

$$O_1C \quad (\text{გაზომილი } S\text{-ის მიმართ}) = O_1C \quad (\text{გაზომილი } S_1\text{-ის მიმართ});$$

აქედან მაშინვე ვღებულობთ კავშირს x -სა და x_1 -ს შორის

$$x = x_1 + Vt.$$

მაგრამ ვინაიდან პირველი დაშვების თანახმად $t = t_1$, შეიძლება დავწეროთ

$$x = x_1 + Vt_1. \quad (\text{III}, 2)$$

ჩვენ არ გავვირჩევია y და x კოორდინატების გარდაქმნა. ცხადია, როგორც გვიჩვენებს ნახაზი და სიგრძის აბსოლუტურობის დაშვება,

$$y = y_1, \quad z = z_1. \quad (\text{III}, 3)$$

მაშასადამე, კოორდინატებისა და დროის გარდაქმნის ფორმულები ინერციული სისტემებისათვის ასეთი ყოფილა:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + V t_1, \\ y &= y_1, \\ z &= z_1, \\ t &= t_1. \end{aligned} \quad (\text{III}, 4)$$

ამ ფორმულებს გალილეის გარდაქმნის ფორმულები ეწოდებათ და კლასიკური ფიზიკის თანახმად მათი საშუალებით ხდება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა. იმ შემთხვევაში, როდესაც S_1 ათვლის სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ არა OX ღერძის გასწვრივ, არამედ ნებისმიერი მიმართულებით, გარდაქმნის ფორმულები იქნება შემდეგი სახისა:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + V_x t_1, \\ y &= y_1 + V_y t_1, \\ z &= z_1 + V_z t_1, \\ t &= t_1, \end{aligned} \quad (\text{III}, 4')$$

სადაც V_x , V_y და V_z არის S_1 სისტემის სიჩქარის გეგმილები სათანადო ღერძებზე. მას შემდეგ, რაც გამოყვანილია კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები, უკვე აღვიღია სხვა სიდიდეების, მაგალითად, სიჩქარისა და აჩქარების გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანა. (III, 4') ფორმულების გაწარმოება დროის მიმართ გეაძლევეს:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + V_x, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + V_y, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + V_z. \end{aligned}$$

მაგრამ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ წარმოადგენენ ნაწილაკის სიჩქარის გეგმილებს.

S სისტემის მიმართ, ხოლო $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt_1}$, $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt_1}$ და $\frac{dz_1}{dt} =$

$= \frac{d\vec{r}_1}{dt_1}$ კი სიჩქარის გვეგმილებს S_1 სისტემის მიმართ. თუ ნაწილაკის სიჩქარეს S სისტემის მიმართ \vec{v} -თი აღვნიშნავთ, ხოლო S_1 სისტემის მიმართ — \vec{v}_1 -ით, მივიღებთ

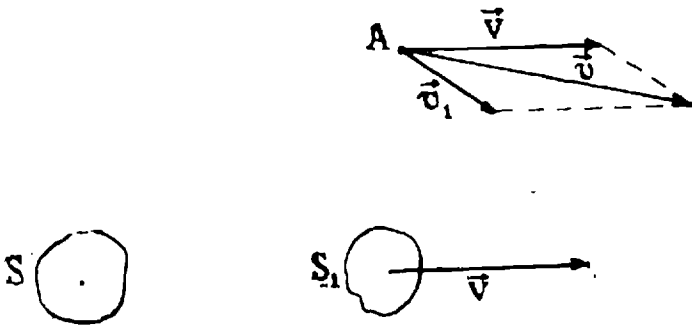
$$\begin{aligned} v_x &= v_{1x} + V_x, \\ v_y &= v_{1y} + V_y, \\ v_z &= v_{1z} + V_z. \end{aligned} \quad (\text{III},5)$$

ან ვექტორულად

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{V}. \quad (\text{III},5')$$

მიღებულ შედეგს, რომ ნაწილაკის სიჩქარე S სისტემის მიმართ არის ჯამი ნაწილაკის სიჩქარისა S_1 სისტემის მიმართ და S_1 სისტემის სიჩქარისა S სისტემის მიმართ, ეწოდება სიჩქარეთა შეკრების კანონი (ნახ. 34). (III,5) ფორმულების კიდევ ერთხელ გაწარმოება გვაძლევს

$$\vec{a} = \vec{a}_1. \quad (\text{III},6)$$



ნახ. 34.

სადაც \vec{a} და \vec{a}_1 წარმოადგენს ნაწილაკის აჩქარებებს S და S_1 სისტემების მიმართ. \vec{V} სიჩქარის წარმოებული ნულის ტოლია, ვინაიდან პირობის თანახმად იგი მუდმივი სიდიდითაა. როგორც ვხედავთ, ნაწილაკის აჩქარება ერთი და იგივეა ყველა ინერციული სისტემის მიმართ.

მიღებული შედეგები გვიჩვენებენ, რომ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები სხვადასხვანაირად გარდაიქმნებიან ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, მაგალითად, მონაკვეთის სიგრძე ერთი და იგივეა ყველა ინერციულ სისტემაში. ასევე ერთნაირია მოვლენის ხანგრძლიობა. მაგრამ კოორდინატები და სიჩქარეები იცვლებიან ასეთი გადასვლის დროს: x_1 არ უდრის

კ-ს, \bar{x}_1 არ უდრის \bar{x} -ს. აჩქარება ერთი და იგივეა სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში. მაშასადამე, ზოგი სიდიდე არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ზოგი კი — იცვლება. ვუწოდოთ სიდიდეებს, რომლებიც არ იცვლებიან ასეთი გადასვლის დროს, ინვარიანტული სიდიდეები, ხოლო სიდიდეებს, რომლებიც იცვლებიან ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, — ვარიანტული სიდიდეები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, გალილეის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტულ სიდიდეებს წარმოადგენენ — მონაკვეთის სიგრძე, მოვლენის ხანგრძლიობა და აჩქარება. ვარიანტული სიდიდეებია კოორდინატები და სიჩქარე. შემდეგში ჩვენ გავარკვევთ რა თვისების მქონეა ამ მხრივ სხვა მექანიკური სიდიდეები: მოძრაობის რაოდენობა, ძალა, ენერჯია და სხვა.

§ 17. კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი

უკვე გალილეის მიერ იყო შენიშნული, რომ მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობის თვალსაზრისით ინერციული სისტემები განსაკუთრებულ თავისებურებას იჩენენ. ეს თავისებურება იმაში გამოიხატება, რომ მექანიკური მოვლენები სრულიად ერთნაირად მიმდინარეობენ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში. აი როგორ აღწერს გალილეი ინერციული სისტემების ამ თვისებას თავის შესანიშნავ ნაშრომში „დიალოგები სამყაროს ორი უმთავრესი სისტემის შესახებ“ (1638 წ.): „თუ გემის მოძრაობა თანაბარია, თქვენ ვერ შეამჩნევთ ვერავითარ ცვლილებებს ირგვლივ მიმდინარე მოვლენებში და არ გეჭნებათ არავითარი საშუალება გამოარკვეოთ, მოძრაობს გემი თუ ერთ ადგილზე დგას. ამხანაგისათვის რაიმე სხეულის გადაადგილების დროს თქვენ არ გჭირდებათ მისი (სხეულის) მეტი ძალით გასროლა, როდესაც ამხანაგი დგას გემის კიჩოსთან, ვიდრე წინააღმდეგ შემთხვევაში...“

ცხადია, დედამიწის მიმართ თანაბრად მოძრავ გემს გალილეი განიხილავს როგორც ათვლის მეორე ინერციულ სისტემას და აღნიშნავს, რომ ამ სისტემაში მოვლენები ისე მიმდინარეობენ როგორც უძრავ გემზე. ინერციული სისტემების ეს განსაკუთრებული თვისება კარგად არის ცნობილი ყოველდღიური ცხოვრებიდან. თანაბრად მოძრავ მატარებელში ყველა მექანიკური მოვლენა ისე მიმდინარეობს როგორც უძრავ მატარებელში: ვარდნილი სხეული ვარდება იატაკზე თანაბრად აჩქარებული სწორხაზოვანი მოძრაობით, საქანის რხევა და გასროლილი სხეულის მოძრაობა ისეთივეა როგორც უძრავ მატარებელში. თანაბრად მოძრავ მატარებელში

ყოფნის დროს ხშირად ისეთი შთაბეჭდილება ჩემნება, თითქოს მოძრაობს არა მატარებელი, არამედ მის გარეთ მყოფი ყველა სხეული. ამავე ფაქტის დამამტკიცებელია აგრეთვე ის გარემოება, რომ მიუხედავად დედამიწის სწრაფი მოძრაობისა მზის მიმართ¹, ჩვენ სრულებით ვერ ვამჩნევთ ამ მოძრაობას.

გალილეის მიერ შენიშვნის სახით გამოთქმული ეს შესანიშნავი თვისება ინერციული სისტემებისა სავსებით გარკვეული დებულების სახით იყო ჩამოყალიბებული ნიუტონის მიერ მის ცნობილ შრომაში „ბუნების ფილოსოფიის მათემატიკური საფუძვლები“ (1686 წ.): „რაიმე სივრცეში მყოფი სხეულების ფარდობითი მოძრაობანი ერთნაირია, უძრავია ეს სივრცე თუ მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად ბრუნვის გარეშე (მოძრაობის აქსიომების მეხუთე შედეგი)“. ნიუტონის ფორმულირებაში გამოთქმა „რაიმე სივრცეში“ ჩვენი ტერმინოლოგიის მიხედვით ნიშნავს „რაიმე ათვლის სისტემაში“.

ინერციული სისტემების ეს თვისება მრავალი ცდით არის შემოწმებული. მას თვლიან ფიზიკის ერთ-ერთ ძირითად დებულებად და უწოდებენ კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპს. იგი შემდგენაირად ყალიბდება.

მექანიკური მოვლენები სავსებით ერთნაირად (იგივეურად) მიმდინარეობენ ყველა ინერციულ სისტემაში. სულ სხვა იქნება, თუ ინერციული სისტემიდან არაინერციულ სისტემაზე გადავალთ. კარგად არის ცნობილი, რომ მატარებელში ყოფნის დროს ადვილად შეიძლება შეიმჩნეს მისი აჩქარება ან შენელება. აჩქარებულად მოძრავ ათვლის სისტემაში მექანიკური მოვლენები არ მიმდინარეობენ ისე როგორც ინერციულ სისტემაში. ჩვენ შემდეგ გავარკვევთ როგორ იცვლება მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობა არაინერციულ სისტემაში. გადასვლის შედეგად ფარდობითობის პრინციპი, ე. ი. ის გარემოება, რომ მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობენ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში, გარკვეულად ზღუდავს მექანიკის კანონების ხასიათს. მართლაც, ვთქვათ, გვსურს ჩამოვაყალიბოთ მექანიკის კანონები რაიმე ინერციულ სისტემაში. ვინაიდან მექანიკის კანონების დანიშნულებაა ზუსტად აღწეროს და ახსნას მექანიკური მოვლენების მიმდინარეობა, უკანასკნელნი კი ერთნაირად მიმდინარეობენ ყველა

¹ მართალია, დედამიწა არ მოძრაობს მზის მიმართ თანაბრად და სწორხაზოვნად, მაგრამ დროის მცირე შუალედში ეს მოძრაობა მიახლოებით ინერციულად შეიძლება ჩავთვალოთ.

ინერციულ სისტემაში, ცხადია, რომ მექანიკის კანონებიც არ უნდა იცვლებოდნენ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ჩვენ კი ვიცით, რომ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა წარმოებს გალილეის გარდაქმნების საშუალებით. მაშასადამე, მექანიკის კანონები ისეთი სახისა უნდა იყოს, რომ ისინი არ უნდა იცვლებოდნენ გალილეის გარდაქმნების გამოყენების შედეგად.

ცნობილია, რომ მექანიკის ყოველი კანონი შეიძლება მათემატიკურად გამოისახოს გარკვეული ტოლობის სახით:

$$A = B,$$

სადაც A და B გარკვეული მექანიკური სიდიდეებია და გაზომილია რაიმე ინერციული სისტემის მიმართ. გადავიდეთ ახლა სხვა ინერციულ ათვლის სისტემაზე. ამ ახალ სისტემაში A და B სიდიდეების მნიშვნელობები შეიძლება სხვა იყოს, მაგალითად A_1 და B_1 , მაგრამ ამ ახალ სისტემაშიც მექანიკის კანონს იგივე სახე უნდა ჰქონდეს, რაც პირველ სისტემაში; ეს იმას ნიშნავს, რომ ტოლობა არ უნდა დაირღვეს, ისევე უნდა გვქონდეს

$$A_1 = B_1.$$

მაგალითად, როგორც შემდეგ ვნახავთ, მექანიკაში არსებობს მოძრაობის რაოდენობის, ანუ იმპულსის მუდმივობის, კანონი, რომლის მიხედვითაც, ვთქვათ, ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლირებულ სისტემაში მოძრაობის რაოდენობების ჯამი მუდმივი სიდიდეა

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.}$$

როდესაც ახალ ინერციულ სისტემაში გადავალთ, ნაწილაკების სიჩქარეები შეიცვლება (სიჩქარეთა შეკრების კანონის თანახმად), ე. ი. შეიცვლება მოძრაობის რაოდენობებიც, მაგრამ კანონი ისევე ძალაში უნდა დარჩეს. ახალ ინერციულ სისტემაშიც მოძრაობის რაოდენობების ჯამი ისევე მუდმივი უნდა იყოს (თვით მუდმივი სიდიდე შეიძლება სხვა იყოს). ასევე უნდა იყოს მექანიკის სხვა კანონების შემთხვევაშიც, მაგალითად, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ინერციული სისტემის მიმართ მართებულია ინერციის პრინციპი: იზოლირებული ნივთიერი წერტილი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს. ახალ ინერციულ სისტემაშიც ეს კანონი ძალაში უნდა დარჩეს, მიუხედავად იმისა, რომ ნივთიერი წერტილის სიჩქარე სხვა იქნება. ყოველივე ზემოთქმული შეიძლება გამოვთქვათ შემდეგი დებულების სახით: მექანიკის კანონები არ იცვლებიან გალილეის გარ-

დაქმნების დროს, ე. ი. ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ცხადია, რომ ეს დებულება არის ფარდობითობის პრინციპის და სივრცისა და დროის აბსოლუტურობის უშუალო შედეგი.

ზემოთქმულთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს შემდეგი. აინშტაინის მიერ შექმნილმა ფარდობითობის თეორიამ საჭირო გახდა მნიშვნელოვანი ცვლილებების შეტანა ჩვენს წარმოდგენებში სივრცისა და დროის შესახებ. სახელდობრ, გამოირკვა (ამ საკითხს ჩვენ დაწვრილებით კურსის ბოლოს განვიხილავთ). რომ არ არის ზუსტი კლასიკური ფიზიკის დებულებანი სივრცისა და დროის აბსოლუტურობის, უფრო სწორად ინვარიანტულობის შესახებ, ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს: ეს იმას ნიშნავს, რომ მონაკვეთის სიგრძე, გაზომილი ერთ ინერციულ სისტემაში, არ უდრის იმავე მონაკვეთის სიგრძეს, გაზომილს სხვა ინერციულ სისტემაში. ასევე არ არის ტოლი მოვლენის ხანგრძლიობები სხვადასხვა ათვლის სისტემის მიმართ. მაგრამ თუ ეს ასეა, მაშინ არ უნდა იყოს სწორი გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, რომელთა გამოყენა სწორედ სივრცისა და დროის ინვარიანტულობაზე დამყარებული. მაშასადამე, ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა არ წარმოებს გალილეის გარდაქმნების მიხედვით. ფარდობითობის თეორია ამტკიცებს, რომ ეს გადასვლა უნდა წარმოებდეს სხვა გარდაქმნის ფორმულების, ე. წ. ლორენცის გარდაქმნის ფორმულების. მიხედვით, რომლებიც პრინციპულად განსხვავდებიან გალილეის გარდაქმნის ფორმულებისაგან.

მეორე მხრივ, ცდები გვიჩვენებენ, რომ ფარდობითობის პრინციპი არა თუ ირღვევა, არამედ კიდევ უფრო ფართოვდება. მტკიცდება, რომ არა მარტო მექანიკური, არამედ საერთოდ ყველა ფიზიკური მოვლენა სავსებით ერთნაირად მიმდინარეობს სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში და ვინაიდან ინერციულ სისტემებს შორის გადასვლა ლორენცის ფორმულების საშუალებით წარმოებს, კლასიკური მექანიკის კანონები ისე უნდა შეიცვალოს, რომ ისინი ინვარიანტული იყვნენ ამ გარდაქმნების მიმართ. სწორედ ეს ცვლილება მოახდინა აინშტაინის ფარდობითობის თეორიამ.

ამასთანავე, უნდა აღინიშნოს, რომ მიუხედავად პრინციპულად მნიშვნელოვანი განსხვავებისა ლორენცისა და გალილეის გარდაქმნებს შორის, პრაქტიკულად მათ შორის განსხვავება შესამჩნევია მხოლოდ დიდი სიჩქარით მოძრავი სხეულებისათვის, სახელდობრ ისეთი სხეულებისათვის, რომელთა სიჩქარე ახლოსაა სინათლის სიჩქარესთან. ამიტომაც მცირე სიჩქარით მოძრავი სხეულებისათვის

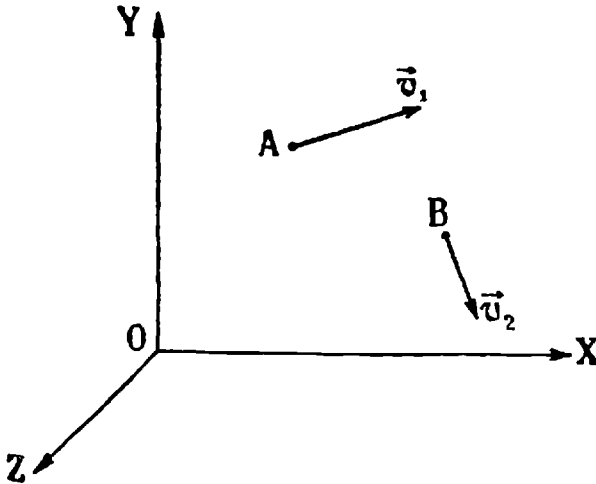
გალილეის გარდაქმნის ფორმულები და მათზე დამოკიდებული კლასიკური მექანიკის კანონები პრაქტიკულად სავსებით გამოსაყენებელია მათი მოძრაობის შესასწავლად.

შენიშვნა. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობენ. ცხადია, ეს არ უნდა იქნეს გაგებულნი ისე, რომ ერთისა და იმავე სხეულის მოძრაობა ერთისა და იმავე სახისა იქნება სხვადასხვა ინერციული სისტემის თვალსაზრისით. განვიხილოთ მაგალითი: ჩავთვალოთ დედამიწა ინერციულ სისტემად, რაც გარკვეული მიახლოებით ყოველთვის შეიძლება. მეორე ინერციულ სისტემად, ავიღოთ თანაბრად მოძრავი მატარებელი. ვთქვათ, დამკვირვებელმა დედამიწის ზედაპირზე აიღო სხეული. გააჩერა გარკვეულ სიმაღლეზე (საწყის მომენტში სიჩქარე ნულია) და გაუშვა ხელი. დედამიწის მიზიდულობის გავლენით სხეული იწყებს სწორხაზოვან თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას. მატარებელში მყოფი დამკვირვებლისათვის ეს სხეული იმოდრავებს პარაბოლაზე და არა სწორ ხაზზე. მაგრამ რაიმე სხეულის მოძრაობის სხვადასხვა ხასიათი სხვადასხვა ინერციული სისტემის მიმართ არ ეწინააღმდეგება ფარდობითობის პრინციპს. უკანასკნელი სრულიადაც არ მოითხოვს, რომ მოცემული სხეულის მოძრაობა ერთნაირი იყოს ყველა ინერციულ სისტემაში. მოითხოვება შემდეგი: იგივე ცდა, რომელიც ჩაატარა დედამიწაზე მყოფმა დამკვირვებელმა, რომ გაიმეოროს მატარებელში მყოფმა დამკვირვებელმა, იგივე სახის მოძრაობა უნდა მიიღოს. ე. ი. მატარებელში მყოფმა დამკვირვებელმა რომ აიღოს სხეული, გააჩეროს გარკვეულ სიმაღლეზე (საწყის მომენტში მატარებლის მიმართ სიჩქარე ნულია) და გაუშვას ხელი, სხეული იმოდრავებს სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად. ე. ი. ისევე როგორც დედამიწაზე ჩატარებული ცდის დროს. როგორც ვხედავთ, მოვლენების მიმდინარეობის იგივეურობისათვის საჭიროა, რომ ბრივე ინერციულ სისტემაში განხორციელებული იყოს ერთნაირი საწყისი პირობები.

იკაულის მუდმივობის კანონი

§ 18. ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ხასიათი და მასის ცნება

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ თუ ნაწილაკზე სხვა სხეულები არ მოქმედებენ, ე. ი. თუ ნაწილაკი იზოლირებულია, იგი იქნება უძრავი ან იმოდრავებს მუდმივი სიჩქარით არჩეული ინერციული სისტემის მიმართ. შევესწავლოთ ახლა ნაწილაკის მოძრაობა ურთიერთქმედების არსებობის შემთხვევაში. ჩვენთვის არ არის საჭირო ურთიერთქმედების ხასიათის ცოდნა, ვინაიდან ის

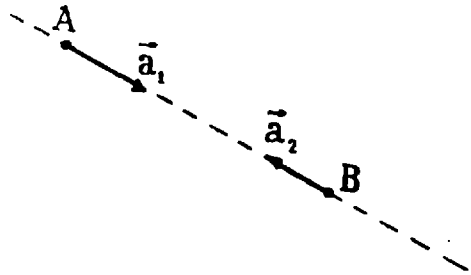


ნახ. 35.

კანონები, რომლებიც აკავშირებენ ურთიერთქმედებას ნაწილაკის მოძრაობასთან, არ არიან დამოკიდებული ურთიერთქმედების ხასიათზე. ე. ი. მართებულნი არიან როგორც ხასიათისა ც არ უნდა იყოს ურთიერთქმედება.

განვიხილოთ რაიმე ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ ორი ურთიერთქმედი წერტილის მოძრაობა (ნახ. 35). ვთქვათ, რომელიმე

მომენტში ერთი ნაწილაკის სიჩქარე არის \vec{v}_1 , ხოლო მეორისა— \vec{v}_2 . B ნივთიერი წერტილი რომ არ მოქმედებდეს A ნივთიერ წერტილზე, უკანასკნელი მუდმივი სიჩქარით იმოძრაებდა, ე. ი. \vec{v}_1 მუდმივი იქნებოდა. ასევე მუდმივი იქნებოდა B ნაწილაკის \vec{v}_2 სიჩქარე. მაგრამ იმის გამო, რომ ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ, მათი სიჩქარეები აღარ იქნება მუდმივი; აქედან, ცხადია, რომ ნაწილაკების ურთიერთქმედება იწვევს სიჩქარეების ცვლილებას. ე. ი. აჩქარებას. აღვნიშნოთ ურთიერთქმედების შედეგად ნაწილაკების მიერ მიღებული აჩქარებები \vec{a}_1 -ითა და \vec{a}_2 -ით. ცდები გვიჩვენებენ, რომ ეს აჩქარებანი ან, რაც იგივეა, სიჩქარეების ცვლილებანი გარკვეული კანონზომიერებით არიან დაკავშირებული ერთმანეთთან. ჯერ ერთი, ირკვევა, რომ ურთიერთქმედ ნივთიერ წერტილთა \vec{a}_1 და \vec{a}_2 აჩქარებანი ყოველთვის ერთიმეორის საწინააღმდეგოდაა მიმართული ურთიერთქმედების ხასიათისაგან დამოუკიდებლად (ნახ. 36). მეორე მნიშვნელოვანი კანონზომიერება, რომელსაც გვიჩვენებენ ურთიერთქმედი ნაწილაკები, შეეხება აჩქარებების სიდიდეს. ცდები გვიჩვენებს, რომ აჩქარებების სიდიდეების შეფარდება მუდმივი სიდიდეა



ნახ. 36.

$$\frac{a_2}{a_1} = \text{const.} \quad (\text{IV}, 1)$$

ამ კანონზომიერების შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, ურთიერთქმედ ნაწილაკთა აჩქარებების შეფარდება ერთ რომელიმე მომენტში გარკვეული სიდიდეა. დროის განმავლობაში ეს აჩქარებები შეიცვლება, მაგრამ მათი შეფარდება ისეთივე იქნება როგორც საწყის მომენტში. ეს იმას ნიშნავს, რომ (IV,1) ფორმულაში შემავალი მუდმივა არ არის დამოკიდებული დროზე. მაგრამ აღვნიშნული კანონზომიერება მხოლოდ ამ გარემოებას არ გამოხატავს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის, რომ აჩქარებების შეფარდება სრულებით არ არის დამოკიდებული ურთიერთქმედების ხასიათზე. როგორც არ უნდა ურთიერთქმედებდნენ ნაწილაკები—დაჯახებით, გრავიტაციული, ელექტრული ან რაიმე სხვა ველებით, ან კიდევ რაიმე შესამე სხეულის საშუალებით, აჩქარებების შეფარდება ყოველთვის ერთი და იგივეა. ეს შეფარდება მხოლოდ ამ ნა-

წილაკებზეა დამოკიდებული. მაშასადამე, ნივთიერი წერტილებ-
ურთიერთქმედების შედეგად საზოგადოდ სხვადასხვა აჩქარებებს
ღებულობენ, რომლებიც მუდმივ შეფარდებაში არიან ერთმანეთთან.
თუ რამდენად დიდია ერთის აჩქარება, ვიდრე მეორისა, დამოკი-
დებულია მხოლოდ ამ ნაწილაკებზე და სხვა არაფერზე.

ავარჩიოთ რომელიმე ერთი ნაწილაკი, როგორც ძირითადი, და
მოვიყვანოთ მასთან ურთიერთქმედებაში სხვა ნაწილაკები. ცხადია.
ეს ნაწილაკები სხვადასხვა აჩქარებებს მიიღებენ. რაც უფრო ნაკ-
ლებია ნაწილაკის მიერ მიღებული აჩქარება, მით უფრო ძნელია
ამ ნაწილაკის გამოყვანა ინერციული მდგომარეობიდან ან, რო-
გორც ამბობენ, მით უფრო მეტია ამ ნაწილაკის ინერცია. სხვა-
დასხვა ნაწილაკს ან სხეულს სხვადასხვა ინერცია აქვს და იმ
ნაწილაკს ექნება მეტი ინერცია, რომელიც ნაკლებ აჩქარებას
მიიღებს ურთიერთქმედების შედეგად. სხეულების ეს თვისება მხო-
ლოდ მათზეა დამოკიდებული, იგი არ იცვლება არც დროს გან-
მავლობაში, არც ურთიერთქმედების ხასიათის შეცვლის გამო¹.
სხეულების ინერციის საზომად შემოღებულია ახალი სიდიდე, რო-
მელსაც მასა ეწოდება. ორი სხეულის მასის შედარება წარმოებს
ურთიერთქმედების შედეგად მიღებული აჩქარებების შედარებით.
თუ, მაგალითად, A ნაწილაკის მიერ მიღებული აჩქარება სამჯერ
მეტია, ვიდრე B ნაწილაკის აჩქარება, უკანასკნელის მასა სამჯერ
მეტი იქნება, ვიდრე A -ს მასა. აღენიშნოთ მასა m ასოთი, მაშინ
ის გარემოება, რომ ნაწილაკების მასები ურთიერთქმედების შედე-
გად მიღებული აჩქარებების უკუპროპორციულია, შეიძლება შემ-
დეგნაირად გამოისახოს:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad (IV, 2)$$

ან

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

მივიღოთ მხედველობაში ის გარემოება, რომ აჩქარებები ერთ-
მანეთის საწინააღმდეგოდაა მიმართული. მაშინ წინა ტოლობა ვექ-
ტორულად შემდეგნაირად შეიძლება დაწეროს:

$$\overline{m_1 a_1} = - \overline{m_2 a_2} \quad (IV, 3)$$

ე. ი. ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისათვის მასებისა და აჩქარებე-
ბის ნამრავლები ტოლია და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდაა მი-
მართული.

¹ ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ კლასიკურ ფიზიკაში: ფარდობითობის
თეორიის თანახმად სხეულის მასა დამოკიდებულია მის სიჩქარეზე.

როგორც ვიქვით, აჩქარებების შედარება გეაძლევს საშუალებას შევადაროთ ნაწილაკების მასები, მაგრამ ამით არ შეიძლება განისაზღვროს ცალკეული ნაწილაკების მასების რიცხვითი მნიშვნელობები. მართლაც, მაგალითად, ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში აჩქარებების შედარებამ გვიჩვენა, რომ A ნაწილაკის მასა სამჯერ მეტია, ვიდრე B ნაწილაკის მასა, მაგრამ ეს არ არის საკმარისი იმის განსაზღვრისათვის, თუ როგორია მათი მასები. ამისათვის საჭიროა მასის ერთეულის შერჩევა, ე. ი. შერჩევა ისეთი სხეულისა, რომლის მასაც ერთეულად იქნება მიღებული. ასეთი სხეულის (მასის ეტალონის) შერჩევის შემდეგ უკვე სავსებით ცალსახად შეიძლება განისაზღვროს ყველა სხვა სხეულის მასები (აჩქარებების შეფარდების საშუალებით).

მეტრული სისტემის დადგენის დროს მასის ეტალონად მიღებულ იქნა ერთი კუბური დეციმეტრი მოცულობის მქონე გამოხდილი წყალი ცელსიაუსის 4° -ზე. მისი მასა მიღებულ იქნა ერთეულად და მას ეწოდა კილოგრამი. დამზადებულ იქნა სპეციალური ლითონის ეტალონი (არქივეული კილოგრამი), რომლის მასა იმდროინდელი სიზუსტით კილოგრამის ტოლი იყო. მაგრამ შემდეგი უფრო ზუსტი გაზომვებით გამოირკვა, რომ ამ არქივეული კილოგრამის მასა არ უდრის ერთი კუბური დეციმეტრი გამოხდილი წყლის მასას. ისევე როგორც მეტრის შემთხვევაში. თუ შენარჩუნებული იქნებოდა კილოგრამის განსაზღვრა, როგორც ერთი კუბური დეციმეტრი გამოხდილი წყლის მასისა, საჭირო გახდებოდა ეტალონის განუწყვეტელი ცვლა (გაზომვის სიზუსტის ზრდასთან ერთად). ამის თავიდან ასაცილებლად შეთანხმდნენ, განსაზღვრონ კილოგრამი, როგორც მასა ერთხელ და სამუდამოდ დამზადებული ეტალონისა; ასეთ ეტალონად მიღებულია პლატინისა და ირიდიუმის შენადნობისაგან ($90\% \text{Pt}$ და $10\% \text{Ir}$) დამზადებული ცილინდრი, რომელიც ინახება წონათა და ზომათა საერთაშორისო ბიუროში (პარიზის მახლობლად); მას ეწოდება მასის საერთაშორისო ეტალონი, ხოლო მის მასას—კილოგრამი.

გარდა ამ საერთაშორისო ეტალონისა, დამზადებულ იქნა მისი 44 ასლი, რომლებიც შედარებულ იქნენ ერთმანეთთან და საერთაშორისო ეტალონთან. კილოგრამის ეს ეტალონები დაურიგდა სხვადასხვა სახელმწიფოს. რუსეთს წილად ხვდა ორი ეტალონი, რომელთაგან ერთ-ერთი (№ 12) მიღებულია ძირითად ეტალონად საბჭოთა კავშირისათვის. კილოგრამის ეტალონს აქვს ზომრგვალებული კიდების მქონე ცილინდრის ფორმა. იგი ინახება ფოლადის კარდაში, რომელიც მოთავსებულია ფოლადისავე სარდაფში. დრო-

გამოშვებით წარმოებს ამ ძირითადი ეტალონის შედარება საერთაშორისო ეტალონთან, რათა გარკვევს, ხომ არ მოხდა რაიმე ცვლილება.

კილოგრამის მეათასედ ნაწილს ეწოდება გრამი და ჩვეულებრივად ფიზიკაში ეს ერთეული გამოიყენება როგორც მასის ერთეული. მე-3 ცხრილში მოყვანილია გრამის ჯერადი და წილადი ერთეულები.

ცხრილი 3

სახელწოდება	აღნიშვნა		კავშირი ძირითად ერთეულთან
	ქართული	საერთაშორისო	
ტონა	ტ	t	10^3
ცენტნერი	ც	q	10^2
კილოგრამი	კგ	kg	1
დეკაგრამი	დეგ	dkg	10^{-2}
გრამი	გ	g	10^{-3}
დეციგრამი	დეგ	dg	10^{-4}
სანტიგრამი	სგ	cg	10^{-5}
მილიგრამი	მგ	mg	10^{-6}

ჩვენ გამოვარკვეით, რომ მასა განსაზღვრული აჩქარებების შეფარდების საშუალებით ახასიათებს სხეულების ინერციულობის თვისებას. შემდეგში, გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს ჩვენ შევხვდებით სიდიდეს, რომელიც ახასიათებს სხეულების ურთიერთმიზიდვის თვისებას (მაგალითად, რაიმე სხეულისა და დედამიწის) და რომელსაც აგრეთვე მასა ეწოდება. იმისათვის, რომ არ მოხდეს ამ ორი სხვადასხვა მასის ერთმანეთში არევა, ინერციის თვისებას დამახასიათებელ მასას ინერტიულ მასას უწოდებენ, გრავიტაციულ ურთიერთმიზიდვის დამახასიათებელ მასას კი გრავიტაციულ ან მძიმე მასას.

შემდეგში ჩვენ გავარკვევთ კავშირს ამ მასებს შორის, ახლა კი, სადაც ეს არ გამოიწვევს გაუგებრობას, ინერტიულ მასას მოკლედ მასას ვუწოდებთ.

§ 19. იმპულსის გუდვიმოგობა კანონი

დაეუბრუნდეთ ისევ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლირებულ სისტემას. ზემოთ ჩამოყალიბებულ კანონზომიერებას ურთიერთქმედ ნაწილაკთა აჩქარების შესახებ შეიძლება სხვა სახე მიეცეთ. თუ აჩქარებებს გამოვსახავთ სიჩქარეების საშუალებით. ვინაიდან აჩქარება წარმოადგენს სიჩქარის წარმოებულს, (IV,3) განტოლება ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0;$$

აქედან ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.} \quad (\text{IV}, 4)$$

როგორც ვხედავთ, ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში სიჩქარეებისა და სათანადო მასების ნამრავლთა ჯამი მუდმივია. ჩვენ აქ შევხვდით ახალ სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს ნაწილაკის მასისა და სიჩქარის ნამრავლს. ვუწოდოთ ამ სიდიდეს მოძრაობის რაოდენობა, ანუ იმპულსი და აღვნიშნოთ \vec{p} ასოთი:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (\text{IV}, 5)$$

იგი ვექტორული სიდიდეა და მიმართულია სიჩქარის გასწვრივ, რადგანაც მასა დადებითი სიდიდეა.

ვინაიდან ჩვენ მიერ განხილული სისტემა, შემდგარი ორი ნაწილაკისაგან, იზოლირებულია, ე. ი. მასზე სხვა გარეშე სხეულები არ მოქმედებენ, (IV,4) ფორმულით გამოხატული კანონი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს: იზოლირებული სისტემის ნაწილაკთა იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ეს კანონი ჩვენ გავარჩიეთ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, მაგრამ როგორც ცდები გვიჩვენებენ, იგი მართებულია ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემისათვისაც. თუ ნაწილაკთა რიცხვი არის n , იმპულსის მუდმივობის კანონი შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const.} \quad (\text{IV}, 6)$$

შემადგენელ ნაწილაკთა იმპულსების ჯამს ეწოდება სისტემის იმპულსი. ასეთია ზოგადი გამოსახვა იმპულსის მუდმივობის კანონისა, რომელიც წარმოადგენს სხეულთა ურთიერთქმედების ერთ-ერთ ძირითად კანონთაგანს. ეს კანონი შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ინერციის კანონის განზოგადება. მართლაც, ერთი ნაწილაკის შემთხვევაში იმპულსის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$m\vec{v} = \text{const}$$

ან, ვინაიდან მასა მუდმივია,

$$\vec{v} = \text{const},$$

რაც წარმოადგენს ინერციის კანონს.

იმპულსის მუდმივობის კანონის ერთი მნიშვნელოვანი მხარის გასარკვევად დაეუბრუნდეთ ისევ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარ იზოლირებულ სისტემას (ფორმულა IV,4). ნაწილაკთა შორის რომ ურთიერთქმედება არ იყოს, მათი სიჩქარეები მუდმივი იქნება (ინერციის კანონის თანახმად), მუდმივი იქნება მათი იმპულსები და, მაშასადამე, იმპულსების ჯამიც. ურთიერთქმედ ნაწილაკთა შემთხვევაში სიჩქარეები და, მაშასადამე, იმპულსებიც ცვალებადია, მაგრამ მნიშვნელოვანი ის არის, რომ მიუხედავად ამისა მათი ჯამი მუდმივია. ურთიერთქმედების შედეგად ერთი ნაწილაკის იმპულსი შეიძლება გაიზარდოს, მაგრამ მაშინ ასეთივე სიდიდით უნდა შემცირდეს მეორე ნაწილაკის იმპულსი

$$\vec{\Delta p}_2 = -\vec{\Delta p}_1.$$

შეიძლება ითქვას, რომ ურთიერთქმედების დროს წარმოებს იმპულსის გადაცემა ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე. საერთო იმპულსის მუდმივობის პირობა კი ახდენს ამ გადაცემის რეგულირებას: რამდენ იმპულსსაც კარგავს ერთი ნაწილაკი, იმდენს იძენს მეორე. ცხადია, რომ იმპულსის მუდმივობის კანონის შინაარსი მდგომარეობს როგორც საერთო იმპულსის მუდმივობაში, ისე იმპულსის გადაცემაში ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე. იმპულსის გადასვლის გარეშე მუდმივობის კანონი ინერციის კანონზე დაიყვანება და არაფერს ახალს არ იძლევა.

§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონის ზოგიერთი გამოყენება

მოძრაობის რაოდენობის ან იმპულსის მუდმივობის კანონი მრავალ მოვლენაში პოულობს თავის გამოყენებას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენები, რაკეტის მოძრაობა, უძრავი სხეულების ამოძრავება ურთიერთქმედების გავლენით და სხვა. ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენებს ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ საკმაოდ დაწვრილებით, ახლა კი გავარჩევთ რამდენიმე მარტივ მაგალითს.

1. უძრავი ნაწილაკების ამოძრავება ურთიერთქმედების გავლენით. ვთქვათ, საწყის მომენტში m_1 და m_2 მასების მქონე ნაწილაკები უძრავი არიან. რომელიღაც გარკვეულ მომენტში მათ შორის იწყება ურთიერთქმედება, რის გამოც ისინი იწყებენ მოძრაობას და გარკვეული დროის შემდეგ იღებენ \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეებს. ვინაიდან მოძრაობის დაწყებამდე სისტემის იმპულსი ნულის ტოლი იყო და იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად იგი ყოველთვის ნულის

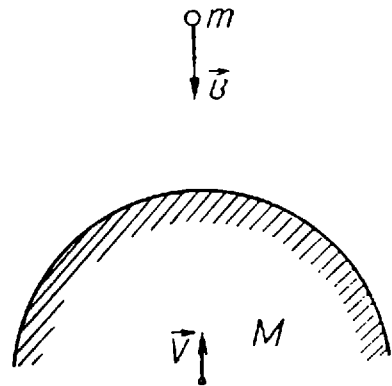
ტოლი უნდა დარჩეს (სხვა სხეულები ამ ნაწილაკზე არ მოქმედებენ), მივიღებთ, რომ ამოდრავების შემდეგაც

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0, \quad (IV, 7)$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ სიჩქარეების აბსოლუტური სიდიდეების შეფარდება

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

ე. ი. საწყის მომენტში უძრავი ნაწილაკები ურთიერთქმედების შედეგად ამოდრავდებიან ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული და მასების უკუპროპორციული სიჩქარეებით. მაშასადამე, ის ნაწილაკი მიიღებს მეტ სიჩქარეს, რომელსაც ნაკლები მასა აქვს. შეუძლებელია, რომ ურთიერთქმედების შედეგად ამოდრავდეს მხოლოდ ერთი სხეული—ერთი სხეულის ამოდრავება აუცილებლად იწვევს მეორე, მასთან ურთიერთქმედი სხეულის ამოდრავებას, მაგალითად, თოფის ან ზარბაზნის გასროლის დროს, ტყვიის ან ყუმბარის ამოდრავებასთან ერთად აუცილებლად უნდა ამოდრავდეს თოფი და ზარბაზანი (საწინააღმდეგო მიმართულებით) მასის უკუპროპორციული სიჩქარით (უკუცემა). ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირზე გარკვეულ სიმაღლეზე ატანილია m მასის სხეული; ამ სხეულისათვის ხელის გაშვების შემდეგ იგი იწყებს ვარდნას და იღებს გარკვეულ სიჩქარეს (ნახ. 37). ეს ამოდრავება გამოწვეულია დედამიწისა და ამ სხეულის ურთიერთქმედებით. ამიტომაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად დედამიწაც უნდა ამოდრავდეს საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაგრამ დედამიწის \vec{F} სიჩქარე იმდენჯერ ნაკლები იქნება სხეულის \vec{v} სიჩქარეზე, რამდენჯერაც მისი მასა მეტია სხეულის მასაზე.

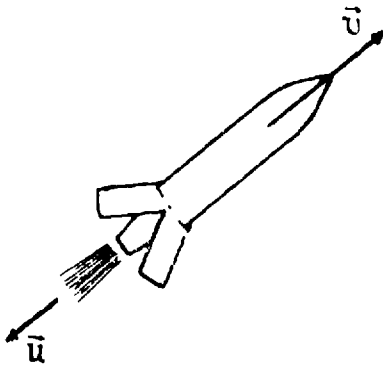


ნახ. 37.

2. რაკეტის მოძრაობა. იმპულსის მუდმივობის კანონის გამოყენების ფრიად მნიშვნელოვან შემთხვევას წარმოადგენს რაკეტის მოძრაობა. ჩვენ არ განვიხილავთ იმ პროცესებს, რომლებიც მიმდინარეობენ რაკეტულ ძრავაში, ვინაიდან ეს საკითხები განიხილება მოლეკულურ ფიზიკაში. ჩვენ შევვებით მხოლოდ მექანიკურ საკითხს.

რისთვისაც საკმარისია ვიცოდეთ, რომ რაკეტის მოძრაობის დრო
 ხდება ნივთიერების გამოსროლა რაკეტიდან გარკვეული სიჩქარით.
 მაშასადამე, რაკეტის მასის ნაწილი იღებს გარკვეული მიმართუ-
 ლების სიჩქარესა და იმპულსს. ამიტომაც რაკეტის დარჩენილი ნა-
 წილი იღებს საწინააღმდეგოდ მიმართულ და იმავე სიდიდის
 იმპულსს. სწორედ ეს წარმოადგენს რაკეტის მოძრაობის და მისი
 სიჩქარის ცვლილებების მიზეზს.

ვთქვათ, რაკეტას, რომლის მასა არის m , გარკვეულ მომენტში
 აქვს \vec{v} სიჩქარე. რაღაც მცირე dt დროის განმავლობაში რაკეტი-



ნახ. 38.

დან გამოიტყორცნება საწ-
 ვავის წვის პროდუქტები
 (ჩვეულებრივად გაზის სახით),
 რომელთა მასა არის — dm
 (ვინაიდან dm არის რა-
 კეტის მასის ნაზრდი და გა-
 ზების გამოტყორცნისას რა-
 კეტის მასა კლებულობს, გა-
 მოტყორცნილი გაზების მასა
 იქნება — dm). დავუშვათ,
 რომ გამოტყორცნა წარ-
 მოგებს \vec{u} სიჩქარით რაკეტის
 მიმართ. რაკეტის დარჩენი-

ლი მასა მიიღებს რაღაც დამატებით $d\vec{v}$ სიჩქარეს, რომელიც მი-
 მართული იქნება \vec{u} სიჩქარის საწინააღმდეგოდ. ჩვენი მიზანია ამ
 დამატებითი სიჩქარის გამოთვლა. ვინაიდან სიჩქარის ნაზრდი არ
 არის დამოკიდებული ათვლის სისტემის არჩევაზე, მთელი პროცესი
 განვიხილოთ თვით რაკეტასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის
 მიმართ. გამოტყორცნილი პროდუქტების იმპულსი ამ სისტემაში
 არის — $dm \cdot \vec{u}$, რაკეტა (მასით $m + dm$) იღებს იმპულსს $(m + dm)d\vec{v}$
 ან, თუ უგულებელვყოფთ dm -ს, m -თან შედარებით, რღებს $m d\vec{v}$ -ს.
 იმპულსის საერთო ცვლილება ნულის ტოლი უნდა იყოს (მუდ-
 მივობის კანონის თანახმად), ამიტომ მივიღებთ

$$m d\vec{v} - dm \cdot \vec{u} = 0$$

ან

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt}$$

(უნდა გვახსოვდეს, რომ dm უარყოფითია). ასე იცვლება რაკეტის
 სიჩქარე გაზების გამოტყორცნის შედეგად. თუ ამ განტოლებას

სკალარულად დაეწერთ და მივიღებთ, რომ გაზების გამოტყორცნა წარმოებს მოძრაობის ხაზის გასწვრივ, გვექნება

$$mdv = -dm \cdot u$$

(dm -ის უარყოფითობის გამო, მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა არის $-dm$). გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{u} dv$$

და დაუშვათ, რომ გაზების გამოტყორცნის სიჩქარე ყოველთვის ერთი და იგივეა ($u = \text{const}$), მაშინ ინტეგრება მოგვცემს

$$\ln m = -\frac{1}{u} v + \text{const.}$$

მუდმივის განსაზღვრისათვის დაუშვათ, რომ მოძრაობის დაწყების მომენტში ($v=0$) რაკეტის მასა იყო m_0 . ჩასმა მოგვცემს, რომ $\text{const} = \ln m_0$ და საბოლოოდ გვექნება

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{u}, \quad (\text{IV}, 8)$$

ან

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{v}{u}}. \quad (\text{IV}, 8')$$

ასეთია კავშირი რაკეტის მიერ მიღებულ სიჩქარესა და დარჩენილ მასას შორის. ვთქვათ, მთელი საწვავი დაიწვა და რაკეტამ მიიღო საბოლოო სიჩქარე v_{\max} აღენიშნოთ m_{\min} -ით ის მასა, რომელიც დარჩება ამ სიჩქარის მიღწევის შემდეგ. ცხადია, რომ მაშინ $m_0 - m_{\min}$ იქნება მთელი საწვავის მასა. ადვილად შეიძლება გამოვიტვალოთ საწვავის რა რაოდენობა არის საჭირო, რომ მიღწეულ იქნეს მოცემული სიჩქარე. ამისათვის (IV, 8') ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{m_0 - m_{\min}}{m_0} = 1 - e^{-\frac{v_{\max}}{u}}. \quad (\text{IV}, 9)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, გაზების გამოსროლა წარმოებს $3700 \frac{m}{\text{sec}}$ სიჩქარით. მაშინ იმისათვის, რომ რაკეტამ მიაღწიოს

$11200 \frac{m}{\text{sec}}$ სიჩქარეს, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ იგი

სავსებით მოსწყდეს დედამიწას, საწვავის მასა უნდა შეადგენდეს რაკეტის საწყისი მასის დაახლოებით 27/28. ე. ი. რაკეტის ყოველ 28 ტონაზე უნდა მოდიოდეს 27 ტონა საწვავი. (IV,2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ რაც უფრო მეტია გამოტყორცნილი გაზების სიჩქარე მით უფრო ნაკლებია საჭირო საწვავის რაოდენობა; აქედან ჩანს, თუ რამდენად დიდი მნიშვნელობა აქვს დიდი სიჩქარეების მისაღწევად გამოტყორცნილი გაზების სიჩქარის გადიდებას. რაკეტის მოძრაობას გრავიტაციულ ველში ჩვენ განვიხილავთ შემდეგში.

§. მასების (ინერციის) ცენტრი. იმპულსის მუდმივობის კანონის საფუძველზე შეიძლება შემოვიღოთ ფრიად მნიშვნელოვანი ცნება, რომელსაც მასების ან ინერციის ცენტრი ეწოდება. სიმარტივისათვის ჯერ განვიხილოთ ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემა. იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \text{const.},$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \quad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt},$$

წინა განტოლებაში ჩასმა და მასების მუდმივობის მხედველობაში მიღება, გვაძლევს

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \text{const.},$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე მასების ჯამზე, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \text{const.} \quad (\text{IV}, 10)$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აღვნიშნოთ \vec{r}_c -თი და ვუწოდოთ მას ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{IV}, 11)$$

წერტილს, რომლის რადიუს-ვექტორი არის \vec{r}_c . ეწოდება სისტემის მასების ან ინერციის ცენტრი. (IV,10) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c = \text{const.} \quad (\text{IV}, 12)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იზოლირებული სისტემის ინერციის ცენტრი მუდმივი სიჩქარით მოძრაობს.

როგორც არ უნდა მოძრაობდნენ სისტემის ცალკეული ნაწილაკები, მთელი სისტემის ინერციის ცენტრი იმოძრაებს ინერციით, ე. ი. თანაბრად და სწორხაზოვნად. მიღებული შედეგი მართებულია წერტილთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი სისტემისათვისაც. ამ შემთხვევაში ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი გამოისახება ფორმულით:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (IV, 13)$$

ხოლო მისი სიჩქარე ფორმულით:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (IV, 14)$$

უკანასკნელი ფორმულა შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$M \vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i, \quad (IV, 14')$$

სადაც

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

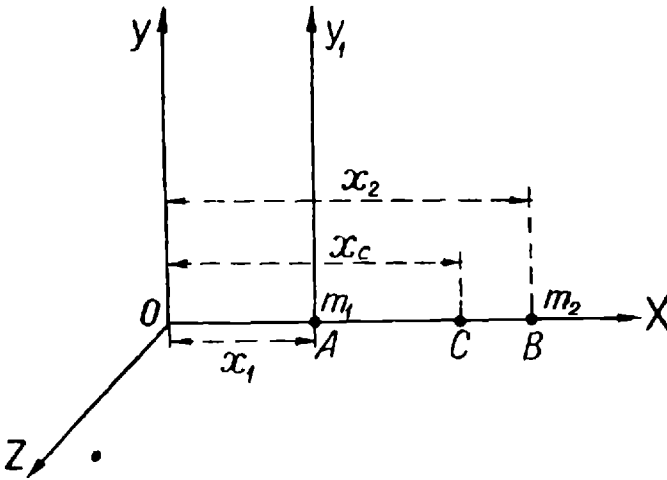
ე. ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, ანუ იმპულსი ტოლია ისეთი ერთი წერტილის იმპულსისა, რომელიც მოთავსებულია ინერციის ცენტრში და რომლის მასა მთელი სისტემის მასის ტოლია.

ყოველივე ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ თუ ჩვენ გვაინტერესებს არა სისტემის ცალკეული ნაწილაკის მოძრაობა, არამედ მოძრაობა სისტემისა როგორც მთლიანისა, შეიძლება შემოვისაზღვროთ მასების (ინერციის) ცენტრში მოთავსებული და სისტემის მთელი მასის მქონე წერტილის მოძრაობით.

ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორის ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ მისი კოორდინატების ფორმულებს:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (IV, 15)$$

გამოვარკვიოთ ახლა სად მდებარეობს ინერციის ცენტრი და როგორ შეიძლება მისი მოძებნა. განვიხილოთ ისევ m_1 და m_2 მასების მქონე ორი ნივთიერი წერტილის შემთხვევა. ასეთი სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ყოველი ორატომიანი მოლეკულა (HCl , OH , H_2 , O_2 და სხვა), თუ მათ შემადგენელ ატომებს ნივთიერ წერტილებად ჩავთვლით. ასეთივე სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ორი



ნახ. 39.

ციური მნათობის ერთობლიობა, ატომის ბირთვისა და ერთი ელექტრონისაგან შემდგარი სისტემა და ა. შ.

OX ღერძი მივმართოთ წერტილების შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ (ნახ. 39). ნივთიერი წერტილების კოორდინატები იქნება: $A(x_1, 0, 0)$, $B(x_1 + x, 0, 0)$, სადაც x არის მანძილი წერტილებს შორის. ამიტომ ინერციის ცენტრის კოორდინატებისათვის მივიღებთ

$$x_c = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x, \quad y_c = 0, \quad z_c = 0.$$

ცხადია, რომ ინერციის ცენტრი მდებარეობს წერტილების შემაერთებელ სწორ ხაზზე. აღვნიშნოთ იგი C ასოთი და გამოვარკვიოთ

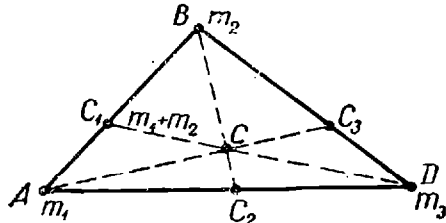
რა მანძილით არის დაშორებული A და B წერტილებიდან. ამისათვის ვიპოვოთ AC და BC მონაკვეთების შეფარდება.

აღვილი გამოსარკვევია, რომ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{m_2}{m_1} \quad (\text{IV}, 16)$$

როგორც ვხედავთ, ინერციის ცენტრის მანძილები სისტემის წერტილებიდან ამ წერტილთა მასების უკუპროპორციულია; აქედან გამომდინარეობს მარტივი მეთოდი ორი წერტილის მასების ცენტრის მოძებნისა. წერტილებს შორის მანძილი იყოფა $m_1 + m_2$ ნაწილად. ინერციის ცენტრი მოთავსდება m_1 დანაყოფზე m_2 მასის მქონე წერტილიდან ან, რაც იგივეა, m_2 დანაყოფზე m_1 მასის მქონე წერტილიდან. რაც უფრო მეტია წერტილის მასა, მეორე წერტილის მასასთან შედარებით, მით უფრო ახლოს იქნება მასთან ინერციის ცენტრი. მაგალითად, OH

მოლეკულის ინერციის ცენტრი 16-ჯერ უფრო ახლოსაა ჟანგბადის ატომთან, ვიდრე წყალბადის ატომთან, რადგანაც ჟანგბადის ატომი 16-ჯერ უფრო მეტი მასის მქონეა, ვიდრე წყალბადის ატომი. დედამიწისა და



ნახ. 40.

მთვარის ინერციის ცენტრი 80-ჯერ უფრო ახლოსაა დედამიწასთან, ვიდრე მთვარესთან. მზისა და დედამიწის შემთხვევაში მზის მასა იმდენად დიდია დედამიწის მასასთან შედარებით, რომ მათი ინერციის ცენტრი თვით მზეშია მოთავსებული. ტოლი მასის მქონე ნაწილაკების შემთხვევაში ინერციის ცენტრი მოთავსდება შუა წერტილში. ასე იქნება, მაგალითად, წყალბადის, ჟანგბადის ან საზოგადოდ ტოლი მასის ატომებისაგან შემდგარი მოლეკულის შემთხვევაში.

ზემოთ თქმულის შემდეგ ადვილად შეიძლება მოიძებნოს სამი (ნახ. 40), ოთხი ან მეტი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის ინერციის ცენტრი. ზემოთ მოყვანილი ხერხით ჯერ ვიპოვოთ ორი — m_1 და m_2 მასების მქონე წერტილების ინერციის ცენტრს. შემდეგ წარმოვიდგენთ, რომ m_1 და m_2 მასების ჯამი მოთავსებულია მათ C_1 ინერციის ცენტრში და იმავე წესით ვიპოვოთ C_1 წერტილისა და მესამე D წერტილის ინერციის ცენტრს. მიღებული C წერტილი იქნება სამივე წერტილის ინერციის ცენტრი. მართლაც, C წერტილის კოორდინატისათვის ადვილად მივიღებთ:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_1 + m_2) x_{c_1} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3},$$

ვინაიდან

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = (m_1 + m_2) x_{c_1}.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სამი— A , B და D წერტილის ინერციის ცენტრი, მართლაც, წარმოადგენს ინერციის ცენტრს ორი წერტილისა, ერთის (C_1) $m_1 + m_2$ მასით და მეორისა (D) m_3 მასით, სადაც C_1 თვითონ არის A და B წერტილების ინერციის ცენტრი. შეიძლება, რასაკვირველია, ჯერ ვიპოვოთ B და D წერტილების ინერციის ცენტრი და შემდეგ ამ ინერციის ცენტრის და A წერტილის ინერციის ცენტრი. ცხადია, რომ შედეგი იგივე იქნება. ადვილად დასადგენია, რომ სამი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის ინერციის ცენტრი არის ისეთი სამი სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილი, რომლებიც გავლებულია ABD სამკუთხედის წვეროებიდან და ჰყოფენ პირდაპირ მდებარე გვერდების შემდეგი შეფარდებით:

$$\frac{AC_1}{C_1 B} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{AC_2}{C_2 D} = \frac{m_3}{m_1}, \quad \frac{BC_3}{C_3 D} = \frac{m_3}{m_2},$$

სადაც C_1 არის A და B წერტილების ინერციის ცენტრი, C_2 — A და D წერტილების ინერციის ცენტრი, ხოლო C_3 — B და D წერტილების ინერციის ცენტრი. განვსაზღვრავთ რა მოყვანილი წესით სამი წერტილის ინერციის ცენტრის მდებარეობას, დავუმატებთ შემდეგ m_4 მასის წერტილს და ვიპოვიოთ ორი წერტილის მასების ცენტრს, ერთისას m_4 მასით და მეორისას $m_1 + m_2 + m_3$ მასით. იმავე წესით მოვიტყვევოთ უფრო მეტი წერტილების შემთხვევაშიც.

სამი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის მაგალითს წარმოადგენს ყოველი სამატომიანი მოლეკულა (H_2O , CO_2 , NO_2 და სხვა), ყოველი ორელექტრონიანი ატომი (ჰელიუმი, ლითიუმის იონი და სხვა), მზე, დედამიწა, მთვარე და ა. შ. შემთხვევას, როდესაც სისტემაში შემავალ ნაწილაკთა რიცხვი იმდენად დიდია, რომ იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უწყვეტი სხეული (მაგალითად, მყარი სხეული), ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ.

ენერჯიის მულტიპლიკაციის კანონი

**§ 21. კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიები.
მექანიკური ენერჯიის მულტიპლიკაციის კანონი**

გადავიდეთ ახლა მექანიკის მეორე ძირითადი კანონის—ენერჯიის მულტიპლიკაციის კანონის განხილვაზე. ეს კანონი, ისევე როგორც იმპულსის მულტიპლიკაციის კანონი, არ შემოისაზღვრება მხოლოდ მექანიკის ფარგლებით, იგი ფიზიკის სხვა დარგებშიც გამოიყენება, მაგრამ ჩვენ ჯერ განვიხილავთ მის კერძო სახეს, რომელიც მართებულია მხოლოდ მექანიკური მოვლენებისათვის.

ჯერ განვიხილოთ ერთი ნაწილაკის შემთხვევა. როგორც ვიცით, ერთი იზოლირებული ნივთიერი წერტილის შემთხვევაში მულტიპლიკაციის სიჩქარე და იმპულსი. შევადგინოთ ახალი სიდიდე—მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარი

$$\frac{mv^2}{2}$$

და ვუწოდოთ მას ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯია. იგი წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს, რომელიც ყოველთვის დადებითია ან უკიდურეს შემთხვევაში (როცა $v=0$) ნულია. ცხადია, რომ ერთი იზოლირებული ნივთიერი წერტილის შემთხვევაში კინეტიკური ენერჯია მულტიპლიკაციის სიდიდეა, ვინაიდან მულტიპლიკაციის როგორც მასა, ისე სიჩქარე.

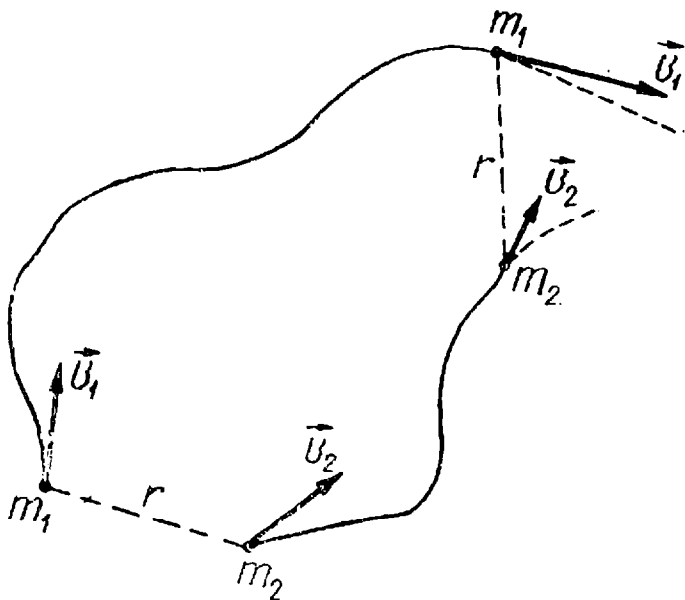
ვთქვათ, განსახილველი სისტემა შედგება m_1 და m_2 მასების მქონე ორი ნაწილაკისაგან (ნახ. 41). გამოვითვალოთ მათი კინეტიკური ენერჯიები და შევადგინოთ ჯამი:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

ცხადია, თუ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არ არის, ყოველი მათგანის სიჩქარე მულტიპლიკაციის იქნება. მულტიპლიკაციის იქნება აგრეთვე სათანადო კინეტიკური ენერჯიები და მათი ჯამი. გასაგებია, რომ

ეს დასკვნა არის ინერციის პრინციპის შედეგი და არ წარმოადგენს რაიმე ახალ კანონს.

გამოფარკვიოთ ახლა როგორია ნაწილაკების კინეტიკური ენერგიების ჯამი ურთიერთქმედების არსებობის შემთხვევაში. როგორც ვიცით, ურთიერთქმედ ნაწილაკთა სიჩქარეები ცვალებადია, ე. ი.



ნახ. 41.

ცვალებადია მათი კინეტიკური ენერგიებიც, მაგრამ გასარკვევად ცვალებადია თუ არა მათი ჯამი. როგორც ცდები გვიჩვენებენ ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამი საზოგადოდ არ წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს. ამას ნათლად გვიჩვენებს შემდეგი მაგალითების გარჩევა. ვთქვათ, ხდება თოფის გასროლა. საწყის მომენტში, როდესაც თოფიც და ტყვიაც უძრავია, მათი კინეტიკური ენერგიები და, მაშასადამე, მათი ჯამიც ნულია. გასროლის შემდეგ ორივე სხეული იღებს მათი მასების უკუპროპორციულ სიჩქარეებს. მაშასადამე, ყოველ მათგანს ექნება გარკვეული კინეტიკური ენერგია და მათი ჯამიც განსხვავებულ იქნება ნულისაგან, ვინაიდან დადებითი სიდიდეების ჯამი არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. როგორც ვხედავთ, გასროლამდე კინეტიკური ენერგიების ჯამი ნულის ტოლი იყო, გასროლის შემდეგ კი ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ ყოფილა მუდმივი სიდიდე. ამავე დასკვნამდე მივყავართ ყველა სხვა მექანიკური მოვლენის განხილვას. რომ მართებული

იყოს კინეტიკური ენერგიების ჯამის მუდმივობის კანონი, შეუძლებელი იქნებოდა უძრავი ნაწილაკების ამოძრავება ან მოძრავი ნაწილაკების შეჩერება. ასეთ მოვლენებს კი ძალიან ხშირად ვხვდებით ბუნებაში.

როგორც ვხედავთ, იზოლირებული სისტემის კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მუდმივი. იგი იცვლება დროის განმავლობაში.

დავაკვირდეთ ახლა მისი ცვალებადობის ხასიათს. ვთქვათ, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი გარკვეული სიდიდისა იყო, კინეტიკური ენერგიების ჯამს გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდა. მოძრაობისა და ურთიერთქმედების შედეგად ნაწილაკები გადაინაცვლებენ და მათი კინეტიკური ენერგიების ჯამიც შეიცვლება. მაგრამ ცდები გვიჩვენებენ, რომ როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი ისეთივე გახდება, როგორც დასაწყისში იყო, კინეტიკური ენერგიების ჯამიც წინანდელ მნიშვნელობას მიიღებს. ნაწილაკებს შეიძლება სხვა კინეტიკური ენერგიები და სხვა მდებარეობა ჰქონდეთ, მაგრამ კინეტიკური ენერგიების ჯამი ისევ წინანდელი სიდიდის იქნება. საჭიროა მხოლოდ, რომ მანძილი მათ შორის ისეთივე იყოს, როგორც დასაწყისში. ეს ფრიად მნიშვნელოვანი თვისება ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამისა, რომ იგი მხოლოდ ნაწილაკთა შორის მანძილის ფუნქციაა, მათემატიკურად შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = f(r), \quad (V,1)$$

სადაც r არის ნაწილაკთა შორის მანძილი. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქცია— $f(r)$ —დამოკიდებულია ურთიერთქმედების სახეზე. გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის იგი ერთი გარკვეული სახისაა, ელექტრულისათვის სხვა სახის და ა. შ.

გადავწეროთ მიღებული შედეგი ცოტა სხვანაირად, რაც საშუალებას მოგვცემს მივცეთ მას მუდმივობის კანონის სახე. ავიღოთ ამისათვის ახალი ფუნქცია $U(r)$, რომელიც $f(r)$ ფუნქციისაგან რაღაც მუდმივით განსხვავდება და დაკავშირებულია მასთან შემდეგი ტოლობით:

$$U(r) = \text{const} - f(r), \quad (V,2)$$

განვსაზღვროთ ამ ტოლობიდან $f(r)$ ფუნქცია—

$$f(r) = \text{const} - U(r)$$

და ჩავსვათ (V,1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) = \text{const}. \quad (V,3)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ თუმცა ურთიერთქმედ ნაწილაკთა შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მუდმივი სიდიდე, მაგრამ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს მანძილის ისეთი $U(r)$ ფუნქცია, რომ კინეტიკური ენერგიების და ამ ფუნქციის ჯამი მუდმივი იყოს. $U(r)$ სიდიდეს, რომელიც ნაწილაკთა ურთიერთქმედებას ახასიათებს, პოტენციალური ან ურთიერთქმედების ენერგია ეწოდება.

მიღებული შედეგი შემდეგნაირად ყალიბდება: ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემისათვის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მუდმივია.

განვიხილოთ ახლა სამი ნაწილაკის შემთხვევა, რომელთა მასებია m_1, m_2 და m_3 , ხოლო სიჩქარეები \vec{v}_1, \vec{v}_2 და \vec{v}_3 . კინეტიკური ენერგიების ჯამისათვის გვექნება

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2}.$$

პოტენციალური ენერგია გამოხატულ იქნება სამი წევრის ჯამის სახით, ვინაიდან შესაძლებელ იქნება ნაწილაკთა ყოველი წყვილის ურთიერთქმედება:

$$U = U_1(r_{12}) + U_2(r_{13}) + U_3(r_{23}),$$

სადაც, მაგალითად, $U_1(r_{12})$ არის პირველი და მეორე ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია, დამოკიდებული მათ შორის მანძილზე. ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} +$$

$$+ U_1(r_{12}) + U_2(r_{13}) + U_3(r_{23}) = \text{const.} \quad (\text{V}, 4)$$

ახლა უკვე აღვიღოთ ზოგადი შემთხვევის განხილვა, როდესაც მოცემულია n ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემა. ამ შემთხვევაში ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n U_{ik}(r_{ik}) = \text{const.} \quad (\text{V}, 5)$$

სადაც მეორე წევრში ჯამი აღებულია i და k : ინდექსების ყველა მნიშვნელობისათვის 1-დან n -მდე, გამოკლებით შემთხვევისა, როდესაც $i=k$. ზოგჯერ სიმარტივისათვის პოტენციალურ ენერგიას მოკლედ აღნიშნავენ U ასოთი და გულისხმობენ, რომ იგი არის სისტემაში შემავალ ნაწილაკთა შორის მანძილების ფუნქცია. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამს სისტემის სრულ

ენერგიას უწოდებენ და აღნიშნავენ E ასოთი, ამიტომაც ენერგიის მუდმივობის კანონი მოკლედ ასე იწერება:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const.} \quad (\text{V}, 6)$$

ნაწილაკთა ნებისმიერი რიცხვისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის სრული ენერგია — კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი — მუდმივი სიდიდეა.

განვიხილოთ უფრო დაწვრილებით პოტენციალური ენერგია. როგორც ზემოთქმული გვიჩვენებს, პოტენციალური ენერგია წარმოადგენს ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგიას, დამოკიდებულს მათ მდებარეობაზე (ნაწილაკთა შორის მანძილებზე). იგი ჩვენ განსაზღვრეთ როგორც ნაწილაკთა შორის მანძილების ისეთი ფუნქცია, რომელიც კინეტიკური ენერგიების ჯამისადმი დამატებული გვაძლევს იზოლირებული სისტემისათვის მუდმივ სიდიდეს. მაგრამ ამ მოთხოვნით პოტენციალური ენერგია მთლიანად განსაზღვრული არ არის. მართლაც, ვთქვათ, მოვნახეთ მანძილების ისეთი ფუნქცია U , რომ მისი და სისტემის კინეტიკური ენერგიის ჯამი მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const.}, \quad (\text{V}, 7)$$

მაშინ U შეიძლება განვიხილოთ როგორც პოტენციალური ენერგია. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია U -ს მაგიერ ავიღოთ სხვა სიდიდე — U_1 , რომელიც განსხვავდება U -საგან რაიმე A მუდმივით

$$U_1 = U + A,$$

ცხადია, რომ U_1 -ის დამატება კინეტიკური ენერგიისათვის ისევ მუდმივ სიდიდეს მოგვცემს და, მაშასადამე, ისიც შეიძლება პოტენციალურ ენერგიად ჩავთვალოთ. მანძილებისაგან დამოკიდებულება U და U_1 ფუნქციებს ერთნაირი ექნებათ, მაგრამ მათი რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა იქნება. განვიხილოთ მაგალითი, როგორც გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს გამოიკვევა, ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, თუ კინეტიკური ენერგიების ჯამს დავუმატებთ მანძილის შემდეგ ფუნქციას

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{V}, 8)$$

(γ მუდმივი კოეფიციენტი), მივიღებთ მუდმივ სიდიდეს

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const.} \quad (\text{V}, 8')$$

მაშასადამე, $U(r)$ არის პოტენციალური ენერგია გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის. მაგრამ ასეთივე უფლებით პოტენციალურ ენერგიად შეიძლება ჩავთვალოთ სიდიდე

$$U_1(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + A, \quad (\text{V}, 9)$$

სადაც A მუდმივი სიდიდეა (ნებისმიერი).

როგორც ვხედავთ, იმ პირობით, რომ პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდე უნდა იყოს, პოტენციალური ენერგია არ ისაზღვრება ცალსახად. მისი საბოლოო განსაზღვრისათვის საჭიროა შემოვიღოთ დამატებითი პირობა, რომ რაღაც გარკვეული მდებარეობისათვის პოტენციალურ ენერგიას სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა ჰქონდეს. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მნიშვნელობის არჩევა (ე. ი. A მუდმივის შერჩევა) არ ახდენს გავლენას ნაწილაკთა მოძრაობის ხასიათზე.

როგორც შემდეგ ვნახავთ, ნაწილაკთა აჩქარებას საზღვრავს არა პოტენციალური ენერგია, არამედ ძალა, რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაში შემავალ ნებისმიერ მუდმივაზე.

პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაში შემავალი ნებისმიერი მუდმივის შერჩევისათვის ყველაზე ხშირად შემდეგ პირობას იყენებენ: თვლიან, რომ პოტენციალური ენერგია ნულია, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილები უსასრულოდ დიდია

$$U(r) \rightarrow 0. \quad (\text{V}, 10)$$

ეს ყველაზე უფრო ბუნებრივი პირობაა, ვინაიდან ურთიერთქმედება მით უფრო სუსტია, რაც უფრო შორსაა ნაწილაკები ერთიმეორისაგან, ხოლო პოტენციალური ენერგია სწორედ ურთიერთქმედების დამახასიათებელია.

ცხადია, რომ თუ ამ პირობას მივიღებთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიისათვის გამოსაყენებელ იქნება (V,8) და არა (V,9) ფორმულა. ზოგჯერ სხვა პირობებსაც იყენებენ; მაგალითად, დედამიწის მახლობლად მოძრავი სხეულების უკმთხვევაში ხშირად თვლიან, რომ პოტენციალური ენერგია ნულია

არა მაშინ, როდესაც სხეული უსასრულოდ შორსაა დედამიწიდან, არამედ მაშინ, როდესაც იგი დედამიწის ზედაპირზე იმყოფება. უნდა მიექცეს ყურადღება კიდევ ერთ გარემოებას. ვინაიდან პოტენციალური ენერგია ურთიერთქმედების ენერგიაა, იგი ახასიათებს არა ერთ ნაწილაკს, არამედ მთელ სისტემას; მაგალითად, გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

არის ორივე ნაწილაკის ენერგია. მაგრამ ძალიან ხშირად პოტენციალურ ენერგიას მიაწერენ ერთ-ერთ რომელიმე ნაწილაკს; მაგალითად, ამბობენ, რომ $U = mgh$ ¹ არის დედამიწიდან h სიმაღლეზე მოთავსებული სხეულის პოტენციალური ენერგია, თუმცა სინამდვილეში იგი არის სხეულისა და დედამიწისაგან შემდგარი სისტემის ურთიერთქმედების ენერგია. პოტენციალური ენერგიის ასეთი მიკუთვნება ერთ-ერთი სხეულისათვის განსაკუთრებით ხელსაყრელია მაშინ, როდესაც საჭიროა ამ სხეულზე მეორე სხეულის მოქმედებით, გამოწვეული მოძრაობის შესწავლა, ხოლო თვით ამ მეორე სხეულის მოძრაობა არ გვანტერესებს. ამიტომაც ჩვენ შეგვიძლია ვარდნილ სხეულს მივაწეროთ პოტენციალური ენერგია mgh , დედამიწის მიმართ, ვინაიდან თვით დედამიწის მოძრაობა არ განიხილება.

როგორც კინეტიკური, ისე პოტენციალური ენერგია წარმოადგენენ მექანიკური ენერგიის სახეებს, ენერგიის მუდმივობის კანონი კი გვიჩვენებს, რომ იზოლირებულ სისტემაში მიმდინარე ყოველი პროცესის დროს ხდება მექანიკური ენერგიის ერთი სახის მეორე სახედ გარდაქმნა. თუ, მაგალითად, მოძრაობის შედეგად კინეტიკური ენერგია გაიზარდა, სათანადო სიდიდით უნდა შემცირდეს პოტენციალური ენერგია. ის გარემოება, რომ ერთი სახის ენერგია ისეთი რაოდენობით იზრდება, რა რაოდენობითაც კლებულობს მეორე სახის ენერგია, მათემატიკურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$dE_k = -dU, \quad (V, 11)$$

სადაც E_k -თი მოკლედ აღნიშნულია კინეტიკური ენერგია. dE_k არის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი, ხოლო $-dU$ კი პოტენციალური ენერგიის შემცირება.

ენერგიის სახეები არ ამოიწურება კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიებით. ბუნებაში არსებობს ენერგიის სხვა სახეებიც:

¹ აღვნიშნოთ, რომ ფორმულა $U = mgh$ არის კერძო შემთხვევა ფორმულისა $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$, როდესაც სხეულის დაშორება დედამიწის ზედაპირიდან ძალიან მცირეა დედამიწის რადიუსთან შედარებით.

სითბური, ელექტრომაგნიტური, ქიმიური, ბირთვული და ა. შ. ზოგიერთი მათგანი ერთმანეთზე ან მექანიკურ ენერგიებზე დაიყვანება, მაგრამ ზოგიერთი სპეციფიკური ბუნებისაა. შემდეგში ჩვენ გავეცნობით ენერგიის ამ სახეებს და მათ ერთიმეორეში გადასვლას. როგორც ვნახავთ, იზოლირებულ სისტემაში საზოგადოდ მუდმივია არა მექანიკური ენერგია (კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი), არამედ ყველა სახის ენერგიების ჯამი. ჯერჯერობით კი მექანიკური მოვლენების განხილვის დროს ჩვენთვის საკმარისია მხოლოდ მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი და მისი სახეების ერთმანეთში გარდაქმნა.

§ 22. ენერგიის განზომილება და ერთეულები

კინეტიკური ენერგიის ფორმულის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვიყვანოთ ენერგიის განზომილება, ე. ი. გამოვარკვეოთ როგორ არის დამოკიდებული ენერგიის ერთეული ძირითადი სიდიდეების—სიგრძის, დროისა და მასის ერთეულებზე. (V,6) ფორმულიდან მივიღებთ

$$[E_k] = [m][v^2] = ML^2T^{-2}.$$

ცხადია, რომ ასეთივე განზომილება უნდა ჰქონდეს პოტენციალური ენერგიასაც. ენერგიის ერთეულის განსაზღვრისათვის მივმართოთ ისევ კინეტიკური ენერგიის ფორმულას:

$$E_k = \frac{mv^2}{2};$$

დავუშვათ, რომ აღებულია ორი გრამი მასის სხეული, რომელიც მოძრაობს $v = 1 \frac{cm}{sec}$ სიჩქარით. მაშინ წინა ფორმულიდან მივიღებთ, რომ E_k იქნება რიცხობრივად ერთის ტოლი

$$E_k = 1 \text{ gr} \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}.$$

როგორც ვხედავთ, კინეტიკური ენერგიის ერთეულად უნდა მივიღოთ კინეტიკური ენერგია ორი გრამი მასის სხეულისა, რომელიც $v = 1 \frac{cm}{sec}$ სიჩქარით

მოძრაობს. ენერგიის ამ ერთეულს ერგი ეწოდება. ერგის ეს განსაზღვრა განსხვავდება მისი ჩვეულებრივ განსაზღვრისაგან, რომელიც დამყარებულია მუშაობის ცნებაზე. შემდეგში, როდესაც ჩვენ შემოვიღებთ მუშაობის ცნებას, გამოვარკვევთ, რომ ეს სხვადასხვა განსაზღვრა ერთსა და იმავეს გვაძლევს. როგორც

მისი განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, ერგი წარმოადგენს ენერჯიის ერთეულს აბსოლუტურ თეორიულ სისტემაში, რომელსაც კიდევ *CGS* სისტემა ეწოდება (დამყარებულია სანტიმეტრზე, გრამსა და სეკუნდზე). მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ, გარდა ამ სისტემისა, ფიზიკასა და, განსაკუთრებით, ტექნიკაში ხშირად გამოიყენება მეორე სისტემა—*ე. წ.* აბსოლუტური პრაქტიკული სისტემა, რომელშიც ძირითად ერთეულებად მიღებულია მეტრი, კილოგრამი და სეკუნდი. ამ სისტემაში ენერჯიის ერთეული უკვე სხვა იქნება. მას ეწოდება ჯოული და იგი შემდეგნაირად განიმარტება: ჯოული არის კინეტიკური ენერჯია $2kg$ მასის სხეულისა, რომელიც მოძრაობს $1 \frac{m}{sec}$ სიჩქარით:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2};$$

ამგვარად, კავშირი ჯოულსა და ერგს შორის ასეთია:

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg}.$$

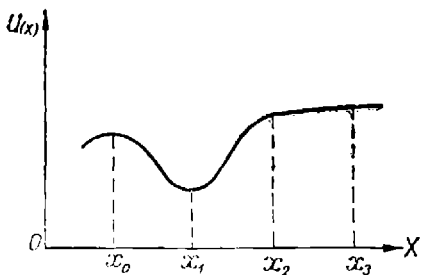
§ 23. პოტენციალური ენერჯია და ძალა

ურთიერთქმედების პირველი ძირითადი კანონის განხილვისას ჩვენ გამოვარკვიეთ, რომ ნაწილაკზე სხვა სხეულების მოქმედების დამახასიათებელი ნიშანი არის ამ ნაწილაკის სიჩქარის ცვლილება, *ე. ი.* აჩქარება. მეორე მხრივ, ენერჯიის მუდმივობის კანონის განხილვისას გამოირკვა; რომ სხეულთა ურთიერთქმედება ხასიათდება პოტენციალური ენერჯიით. თავისთავად ცხადია, რომ ურთიერთქმედების ორივე დამახასიათებელი ნიშანი როგორღაც უნდა იყოს დაკავშირებული ერთმანეთთან, *ე. ი.* თუ ცნობილია ნაწილაკის პოტენციალური ენერჯია, შესაძლებელი უნდა იყოს მისი აჩქარების გამოთვლა და შებრუნებით, აჩქარების ცოდნა უნდა გვაძლევდეს პოტენციალური ენერჯიის პოვნის შესაძლებლობას. ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ეს კავშირი პოტენციალურ ენერჯიასა და აჩქარებას შორის. ამ საკითხის გასარკვევად განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი *OX* ღერძის გასწვრივ მოძრაობს. ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯია იქნება ნაწილაკის *OX* ღერძზე მდებარეობის, *ე. ი.* მხოლოდ *x* კოორდინატის ფუნქცია. გავატაროთ *OX* ღერძის მართობი ორდინატთა ღერძი და მასზე გადავზომოთ *U(x)* პოტენციალური ენერჯია (ნახ. 42). პოტენციალური ენერჯია შეიძლება იცვლებოდეს ნაწილაკის გადაადგილების დროს. მაგალითად, x_0 წერტილიდან x_1 წერტილამდე იგი კლებულობს; x_1 -დან x_2 წერტილში გადასვლის დროს იზრდება, ხოლო x_2 და x_3 წერ-

ტილებს შორის უცვლელია. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორია კავშირი აჩქარებასა და პოტენციალურ ენერგიას შორის, განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობა x_2 და x_3 წერტილებს შორის, ე. ი. იმ არეში, რომელშიც პოტენციალური ენერგია უცვლელია. ვინაიდან ყოველი მოძრაობის დროს სრული ენერგია მუდმივია, გვექნება

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const.} \quad (\text{V}, 12)$$

რადგან განსახილველ x_2x_3 მონაკვეთზე $U(x)$ არ იცვლება, არ უნდა შეიცვალოს კინეტიკური ენერგია, ე. ი. სიჩქარე. როგორც ვხედავთ,



ნახ. 42.

მიუხედავად იმისა, რომ ამ არეში ნაწილაკს აქვს პოტენციალური ენერგია, მისი სიჩქარე მუდმივია, მას არა აქვს აჩქარება და, მაშასადამე, მასზე გარეშე სხეულები არ მოქმედებენ. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ნაწილაკის გადაადგილების დროს პოტენციალური ენერგია იცვლება, როგორც ეს არის x_0x_1 და x_1x_2 არეში; მაგალი-

თად, x_0 წერტილიდან x_1 წერტილში გადასვლისას ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია კლებულობს და, მაშასადამე, კინეტიკური ენერგია უნდა გაიზარდოს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკს ექნება დადებითი აჩქარება, მიმართული OX ღერძის გასწვრივ. x_1 -დან x_2 წერტილამდე პოტენციალური ენერგია მატულობს, რაც გამოიწვევს კინეტიკური ენერგიისა და სიჩქარის შემცირებას, ე. ი. უარყოფით აჩქარებას.

როგორც ვხედავთ, ნაწილაკზე გარეშე სხეულების მოქმედება და მისი დამახასიათებელი ნიშანი — აჩქარება — დაკავშირებულია არა თვით პოტენციალურ ენერგიასთან, არამედ მის ცვლილებასთან სივრცული გადაადგილების დროს. ეს ფრიად მნიშვნელოვანი შედეგია, რომ ნაწილაკზე მოქმედების დამახასიათებელია პოტენციალური ენერგიის ცვლილება სივრცული გადაადგილების დროს, საჭიროდ ხდის პოტენციალური ენერგიის სივრცული ცვლილების შესწავლას. შემოვიღოთ ამისათვის პოტენციალური ენერგიის სივრცული ცვლილების დამახასიათებელი სიდიდე. ვთქვათ, A წერტილში x კოორდინატით პოტენციალური ენერგია არის U , ხოლო B წერტილში $x + \Delta x$ კოორდინატით იგი არის $U + \Delta U$, სადაც ΔU არის პოტენცია-

ლური ენერჯიის ნაზრდი Δx მონაკვეთზე გადანაცვლების დროს. განვიხილოთ შეფარდება

$$\frac{\Delta U}{\Delta x},$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ იზრდება საშუალოდ პოტენციალური ენერჯია ერთეულ მანძილზე გადაადგილების დროს. ჩვენ ვაზრობთ საშუალოდ იმიტომ, რომ Δx მონაკვეთის სხვადასხვა ნაწილში პოტენციალური ენერჯიის ცვლილების ხასიათი შეიძლება სხვადასხვა იყოს. შემოვიღოთ სიდიდე

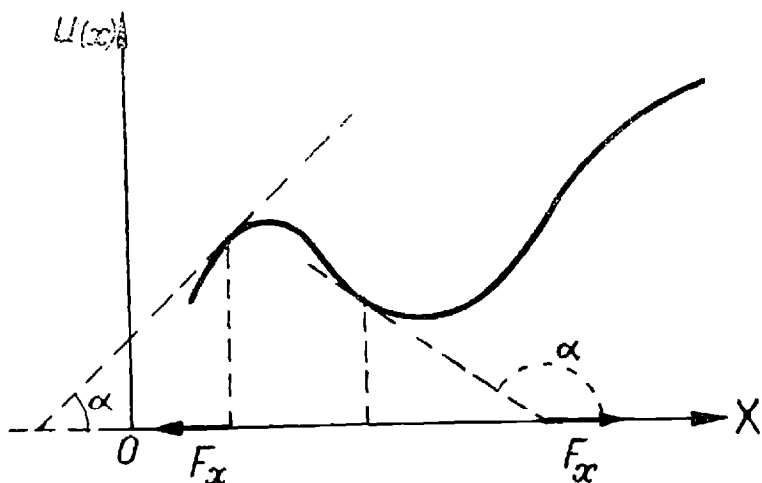
$$F_{საშ} = - \frac{\Delta U}{\Delta x}, \quad (V,13).$$

რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ AB მონაკვეთზე მოქმედ საშუალო ძალას და რომელიც წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის სივრცული ცვლილების დამახასიათებელ სიდიდეს. ვინაიდან (V,13) ფორმულის მარჯვენა მხარეში დგას ნიშანი მინუსი, ძალა უნდა განვიხილოთ როგორც სიდიდე, რომელიც იზომება პოტენციალური ენერჯიის შემცირებით მანძილის ერთეულზე გადაადგილების დროს. თუ ჩვენ გვსურს განვსაზღვროთ არა საშუალო ძალა რაიმე მონაკვეთზე, არამედ ნამდვილი ძალა აღებულ წერტილში, უნდა მოვიქცეთ ისე როგორც ვიქცეოდით ნამდვილი სიჩქარის განსაზღვრის დროს. უნდა დავიწყოთ AB მონაკვეთის, ე. ი. Δx -ის შემცირება B წერტილის A წერტილთან მიახლოებით და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δx ნულისაკენ მიისწრაფვის, ცხადია, რომ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ (V,13) ტოლობის მარჯვენა მხარე მოგვცემს პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულს, კოორდინატის მიმართ უარყოფითი ნიშნით აღებულს, და ძალისათვის გვექნება ფორმულა:

$$F_x = - \frac{dU}{dx}; \quad (V,14)$$

ძალა არის პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი წარმოებულული კოორდინატის მიმართ. ვინაიდან ეს სიდიდე ახასიათებს პოტენციალური ენერჯიის სივრცულ ცვლილებას, ხოლო, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ეს უკანასკნელი არის ნაწილაკზე სხვა სხეულების მოქმედების მაჩვენებელი, ცხადია, ძალა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ მოქმედების დამახასიათებელი სიდიდე. ძალა განსაზღვრულია როგორც პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი წარმოებულული იმისათვის, რომ მისი მიმართულება თანხვდენილი იყოს აჩქარების მიმართულებასთან.

განვიხილოთ ძალის განსაზღვრა იმ მარტივი შემთხვევისათვის, როდესაც ნაწილაკი OX ღერძზე მოძრაობს. ამ შემთხვევაში ძალა მიმართულია ან OX ღერძის გასწვრივ, ან მის საწინააღმდეგოდ. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორია ძალის მიმართულება (ან ნიშანი), დაკავშირებული პოტენციალური ენერჯიის სივრცულ ცვლილებასთან, დავუბრუნდეთ პოტენციალური ენერჯიის მრუდს (ნახ. 43). როგორც ანალიზიდან ვიცით, $U(x)$ ფუნქციის წარმოებული x -ის



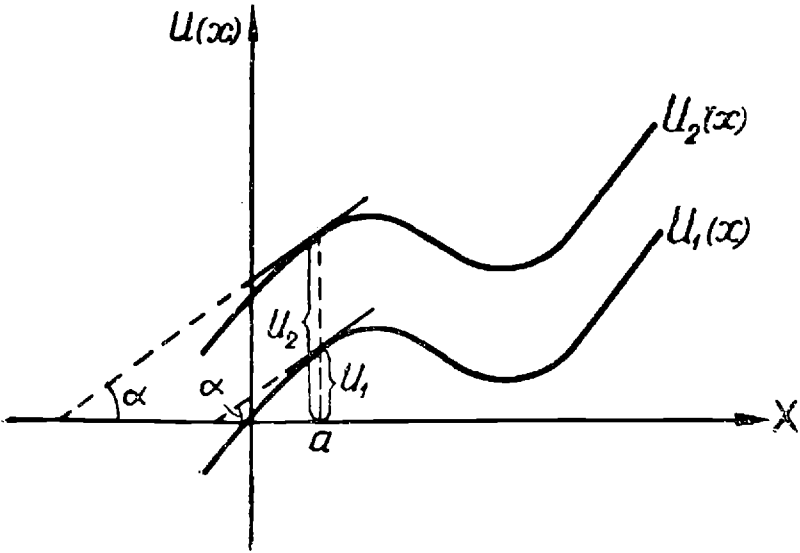
ნახ. 43.

მიმართ გეომეტრიულად გამოისახება იმ კუთხის ტანგენსით, რომელსაც პოტენციალური მრუდისადმი გავლებული მხები ადგენს OX ღერძთან. მაშასადამე, F_x ძალისათვის მივიღებთ

$$F_x = -\operatorname{tg} \alpha.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ, თუ მხები OX ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს, ძალა უარყოფითი იქნება, ე. ი. მიმართული იქნება OX ღერძის საწინააღმდეგოდ. თუ α კუთხე ბლაგვია, ძალა მიმართული იქნება OX ღერძის გასწვრივ. წერტილში, სადაც მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია, ძალა ნულის ტოლია. ყოველივე ეს გვიჩვენებს, რომ პოტენციალური ენერჯიის მრუდი ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს იმაზე, თუ როგორია ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილში. ვთქვათ ახლა, რომ ცნობილია ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა ამ წერტილის ყოველ მდებარეობაში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ცნობილია $F(x)$ ფუნქცია. როგორ მოვიძებნოთ სათანადო პოტენციალური მრუდი? გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ვეძებთ ისეთი მრუდი, რომლის შესახებ ცნობილია, თუ რა კუთხეს ადგენენ მის ყოველ წერტილში

გავლებული მხები OX ღერძთან. ცხადია ეს ცნობები არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ მოვნახოთ საძიებელი მრუდი, ვინაიდან სხვადასხვა მრუდს, მაგრამ ერთმანეთისაგან ყველა წერტილში ერთნაირად გადანაცვლებულთ, ერთნაირად დახრილი მხებები ექნებათ; მაგალითად, 44-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი მრუდი, რომელთაც ყოველ წერტილში ერთნაირად დახრილი მხებები და. მაშასადამე, ერთნაირი წარმოებულები აქვთ, მაგრამ სათანადო ორდინატები; ე. ი. პოტენციალური ენერგიები — სხვადასხვა. პოტენციალური

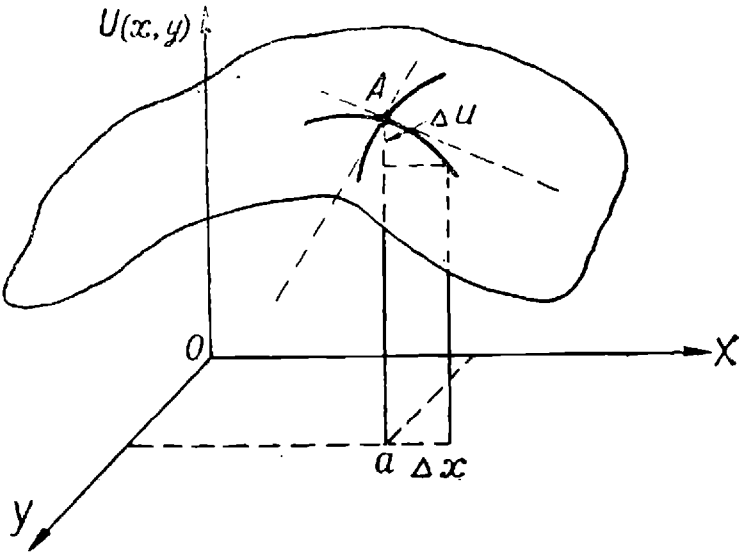


ნახ. 44.

ენერგიის მრუდად ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ როგორც ერთი, ისე მეორე მრუდი, ვინაიდან ძალა ორივე შემთხვევაში ერთნაირია, თუმცა პოტენციალური ენერგიები კი განსხვავებულია სათანადო ორდინატების სხვაობით. იმისათვის, რომ ძალის საშუალებით ცალსახად განისაზღვროს პოტენციალური ენერგია, საჭიროა გარკვეული დამატებითი პირობა. უნდა ვიცოდეთ, მაგალითად, როგორია პოტენციალური ენერგია რომელიმე ერთ წერტილში. ამის შემდეგ პოტენციალური ენერგია ცალსახად იქნება განსაზღვრული. შემდეგში ჩვენ ისევ დავუბრუნდებით ძალის საშუალებით პოტენციალური ენერგიის განსაზღვრის საკითხს.

განვიხილოთ ახლა უფრო ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკები მოძრაობენ სიბრტყეზე და პოტენციალური ენერგია არის x და y კოორდინატების ფუნქცია. როგორ უნდა განვსაზღვროთ ამ შემთხვევაში ძალა? ვინაიდან U არის ორი კოორდინატის ფუნქცია, იგი გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვადგინოთ ზედაპირის

საშუალებით. გავატაროთ სამი ურთიერთმართობი ღერძი (ნახ. 45).
 ორ ღერძზე გადავზომოთ x და y კოორდინატები, ხოლო მესამე
 ღერძზე $U(x, y)$ პოტენციალური ენერგია. ნაწილაკის ყოველ მდებ-
 არეობას, ე. ი. XOY სიბრტყის ყოველ წერტილს ეთანადება
 გარკვეული პოტენციალური ენერგია. ვთქვათ, ჩვენ გვსურს ვიპო-
 ვოთ ნაწილაკზე a მდებარეობაში მოქმედი ძალის გეგმილი OX
 ღერძზე. ამისათვის გადავინაცვლოთ a წერტილიდან OX ღერძის



ნახ. 45.

გასწვრივ Δx მანძილზე. ამ გადაინაცვლების შედეგად ნაწილაკის
 პოტენციალური ენერგია შეიცვლება ΔU სიდიდით. ჩვენ განვსაზ-
 ზღვრავთ საშუალო ძალის გეგმილს OX ღერძზე როგორც შეფარ-
 დებას

$$F_x = - \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

იმ პირობით, რომ გადაინაცვლება ხდება მხოლოდ OX ღერძის
 გასწვრივ. ზღვარზე გადასვლის შემდეგ ძალის გეგმილისათვის OX
 ღერძზე მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (V, 15)$$

როგორც ვხედავთ, ძალის გეგმილი OX ღერძის გასწვრივ განისა-
 ზღვრება როგორც პოტენციალური ენერგიის კერძო წარმოებული
 x კოორდინატის მიმართ. ასევე განისაზღვრება ძალის გეგმილი OY
 ღერძის გასწვრივ.

სივრცული მოძრაობის შემთხვევაში ძალა წარმოიღვინება ვექტორის სახით, რომლის გეგმილები ღერძებზე მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (V,16)$$

ძალის ვექტორის სიდიდისა და მიმართულების მოძებნა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით შემდეგნაირად ხდება. სივრცის იმ წერტილიდან, რომელშიც გვინდა მოვძებნოთ ძალა, უნდა გადავიწვლოთ სხვადასხვა მიმართულებით ერთსა და იმავე ds მანძილზე. პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება სხვადასხვა მიმართულებით გადანაცვლების დროს სხვადასხვა იქნება და ძალა მიმართული იქნება იმ მიმართულებით, რომლის გასწვრივაც გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია ყველაზე მეტად შემცირდება. თუ ამ მიმართულებით გადანაცვლებას dn -ით აღვნიშნავთ ძალის სიდიდისათვის გვექნება

$$F = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

ხშირად ძალას, როგორც ვექტორს, გამოსახავენ შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad (V,17)$$

რომელსაც განიხილავენ როგორც (V,16) სკალარული ფორმულების ვექტორულ განხილვად. პოტენციალურ ენერჯიასა და ძალას შორის კავშირის უფრო თვალსაჩინოდ გამოსახატავად განვიხილოთ ისევ შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სიბრტყეზე და ამიტომ მისი პოტენციალური ენერჯია არის x და y კოორდინატების ფუნქცია. ავარჩიოთ პოტენციალური ენერჯიის რაღაც გარკვეული მნიშვნელობა U_1 და მოვძებნოთ XOY სიბრტყეზე ისეთი წერტილები, რომლებშიც პოტენციალურ ენერჯიას სწორედ ეს მნიშვნელობა აქვს. მათემატიკურად ეს ნიშნავს ისეთი x და y კოორდინატების მოძებნას, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებას

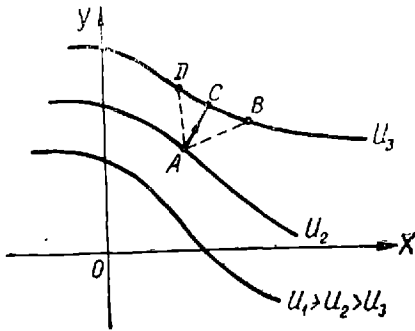
$$U(x, y) = U_1.$$

ასეთი წერტილების გეომეტრიული ადგილი გამოიხატება გარკვეული მრუდით (ნახ. 46). ამ მრუდის ყოველ წერტილს ეთანადება პოტენციალური ენერჯიის ერთი და იგივე, სახელდობრ U_1 , მნიშვნელობა. ამიტომაც ამ მრუდს შეიძლება ვუწოდოთ იზოპოტენციალური მრუდი. ასევე შეიძლება მოვძებნოთ პოტენციალური

ენერჯიის U_2, U_3 და ა. შ. მნიშვნელობების სათანადო იზოპოტენციალური მრუდები. დავუშვათ, რომ

$$U_1 > U_2 > U_3 > \dots > U_n > \dots$$

უთქვამთ ახლა, რომ ჩვენ გვსურს U_2 იზოპოტენციალური მრუდის რაიმე A წერტილში მოქმედი ძალის მიმართულების მოძებნა. ვიცით, რომ ძალა მიმართულია პოტენციალური ენერჯიის უსწრაფესი შემცირებას მიმართულებით და ამიტომ ცხადია, რომ A წერტილში მოქმედი ძალა მიმართული უნდა იყოს U_3 იზოპოტენციალური მრუდისაკენ და არა U_1 მრუდისაკენ.



ნახ. 46.

გამოსარკვევია მხოლოდ ის, თუ როგორ არის მიმართული ძალა — $AB, AC, AD \dots$ თუ რაიმე სხვა მიმართულებით. განსაზღვრის თანახმად A წერტილიდან U_3 იზოპოტენციალური მრუდის რომელ წერტილშიც არ უნდა გადავინაცვლოთ, პოტენცია-

ლური ენერჯია ერთი და იმავე $U_2 - U_3$ სიდიდით შემცირდება. მაგრამ, ვინაიდან, მაგალითად, AB მეტია, ვიდრე AC , პოტენციალური ენერჯიის დაცემა AC მიმართულებით უფრო სწრაფი იქნება, ვიდრე AB მიმართულებით. ძალის ვექტორის მიმართულების საპოვნელად უნდა მოიძებნოს ისეთი მიმართულება, რომლის გასწვრივ პოტენციალური ენერჯიის დაცემა ყველაზე სწრაფი იქნება. თავისთავად ცხადია, და ნახაზიც ამას გვიჩვენებს, რომ ეს მიმართულება არის U_2 და U_3 მრუდებს შორის ნორმალის მიმართულება. ძალის საშუალო მნიშვნელობა A წერტილში გამოითვლება როგორც პოტენციალური ენერჯიის $U_2 - U_3$ შემცირების შეფარდება გადანაცვლების AC სიდიდესთან

$$F_{\text{საშ}} = \frac{U_2 - U_3}{AC} = - \frac{U_3 - U_2}{AC}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც U_3 იზოპოტენციალური მრუდი U_2 იზოპოტენციალურ მრუდს უახლოვდება, მივიღებთ ძალის ნამდვილ სიდიდეს A წერტილში

$$F = - \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (V, 18)$$

ენიდან $U_2 - U_1 = \Delta U$, ხოლო $AC = \Delta h$. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ პოტენციალურა ენერჯიის უსწრაფესი შემცირების მიმართულება მართობია U_2 იზოპოტენციალური მრუდისადმი და ამიტომაც ვასავებია, თუ რატომ აღვნიშნეთ AC გადანაცვლება Δh -ით (გადაცვლება ნორმალის გასწვრივ) და რატომ გამოიხატა ძალის სიდიდე როგორც პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი წარმოებული ნორმალის გასწვრივ.

სრულიად ანალოგიურად განიხილება ზოგადი შემთხვევა, როდესაც პოტენციალური ენერჯია არის სამი კოორდინატის ფუნქცია. ამ შემთხვევაში იზოპოტენციალური მრუდების მაგიერ მივიღებთ იზოპოტენციალურ ზედაპირებს და ძალა ვაძოხნატება ამ ზედაპირისადმი მართობი ვექტორით.

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ თუ რაიმე სიდიდე (ჩვენს შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯია) სხვადასხვაა სივრცის სხვადასხვა წერტილში, ვექტორს, რომელიც მიმართულებით გვიჩვენებს ამ სიდიდის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას, ხოლო სიდიდით — ამ მიმართულებით მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს ამ სიდიდის ცვლილებას, ეწოდება განსახილველი სიდიდის გრადიენტი. მაშასადამე, $\frac{\partial U}{\partial r}$ ვექტორი წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის გრადიენტს, ძალა კი იქნება პოტენციალური ენერჯიის უარყოფითი გრადიენტი.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი ძალის განსაზღვრისა პოტენციალური ენერჯიის საშუალებით. ვთქვათ, გვინდა გავიგოთ ძალა, რომელიც მოქმედებს დედამიწის ზედაპირის მახლობლად მყოფ სხეულზე. საშუალო სკოლის კურსიდან ვიცით და გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროსაც იქნება ნაჩვენები, რომ დედამიწის ზედაპირიდან z მანძილით დაშორებული სხეულის პოტენციალური ენერჯია გამოისახება ფორმულით:

$$U = mgz,$$

სადაც m არის სხეულის მასა, ხოლო g — სიმძიმის ძალის აჩქარება. ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იზოპოტენციალური ზედაპირები წარმოადგენენ XOY სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებს

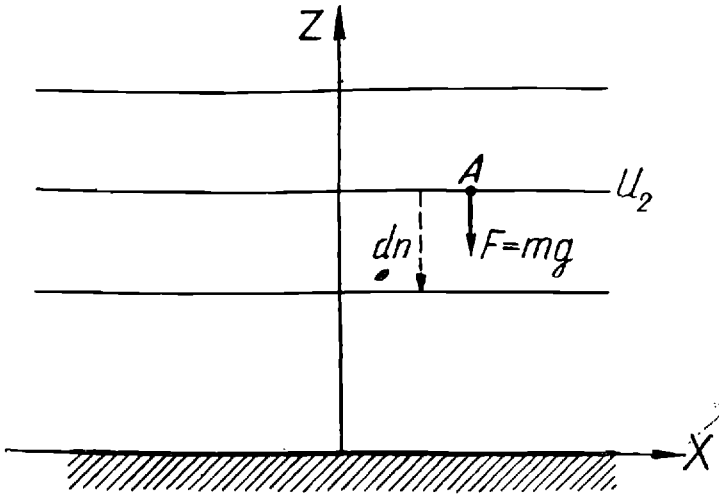
$$mgz = \text{const}$$

და რომ პოტენციალური ენერჯია მატულობს დედამიწის ზედაპირიდან დაშორებასთან ერთად (ნახ. 47). მოვძებნოთ ძალა A წერტილში, რომელიც იმყოფება U_2 -ის სათანადო იზოპოტენციალურ სიბრტყეზე. ცხადია, რომ პოტენციალური ენერჯიის უსწრაფესი

შემცირება ხდება დედამიწის ზედაპირისაკენ მიმართული ვერტიკალის გასწვრივ. ძალის სიდიდით გამოითვლება პოტენციალური ენერჯიის გაწარმოებით ნორმალის მიმართ. ვინაიდან $dn = -dz$, გვექნება

$$F = - \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial z} = mg.$$

მივიღეთ სიმძიმის ძალის ცნობილი გამოსახულება. ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ ძალის გეგმილები სხვადასხვა ღერძზე; მაგალითად,



ნახ. 47.

OX ღერძის გასწვრივ გადასაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია არ იცვლება (ჰორიზონტალურ სიბრტყეში გადასაცვლება არ ცვლის პოტენციალურ ენერჯიას), ამიტომაც ძალის გეგმილი ამ ღერძზე ნულის ტოლია. ასეთივე შედეგს მივიღებთ გეგმილისათვის OY ღერძზე.

განვიხილოთ ახლა საკითხი ძალის განზომილებისა და ერთეულის შესახებ. ძალის განმსაზღვრელი ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$[F] = \frac{[\partial U]}{[\partial n]} = \frac{ML^2T^{-2}}{L} = MLT^{-2}.$$

ზივარჯივით ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ძალის განზომილება მასისა და აჩქარების ნამრავლის განზომილების ტოლია. ზემდეგში ჩვენ გამოვიყვანეთ მექანიკის ძირითად კანონს, რომლის თანახმად ძალა უდრის მასისა და აჩქარების ნამრავლს და ისევე დავუბრუნდებით ძალის განზომილების და ერთეულის საკითხს. ახლა კი განვიხილავთ ძალის ერთეულს, გამომდინარეც ძალისა და პოტენციალური ენერჯიის კავშირიდან.

როგორც ვიცით, ძალა წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას ერთეულ მანძილზე გადანაცვლების დროს. ამიტომაც ბუნებრივია განვსაზღვროთ ძალის ერთეული როგორც ისეთი ძალა, როდესაც ერთეულ მანძილზე გადანაცვლებისას პოტენციალური ენერჯია ერთი ერთეულით იცვლება; აქედან ვღებულობთ ძალის ერთეულის შემდეგ განსაზღვრას:

ძალის ერთეულად მიღებულია ისეთი ძალა, როდესაც პოტენციალური ენერჯია იცვლება ერთი ერთეულით, მისი უსწრაფესი შემცირების მიმართულებით მანძილის ერთეულზე გადანაცვლების დროს.

იმისდა მიხედვით, თუ რა ერთეულებია აღებული მანძილისა და პოტენციალური ენერჯიისათვის, ჩვენ მივიღებთ ძალის სხვადასხვა ერთეულს. აბსოლუტურ თეორიულ სისტემაში (CGS) მანძილის ერთეულად მიღებულია სანტიმეტრი, პოტენციალური ენერჯიის ერთეულად კი—ერგი. ძალის ერთეული ამ სისტემაში—ე. წ. დინი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

დინი არის ისეთი ძალა, როდესაც ერთი სანტიმეტრით გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია ერთი ერგით მცირდება

$$1 \text{ dyn} = \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ cm}}.$$

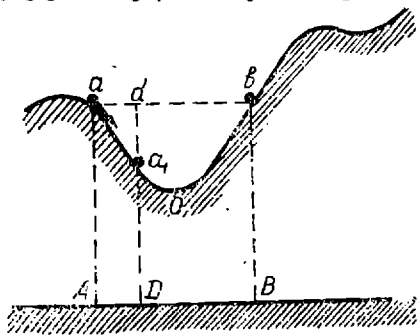
აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში ძალის ერთეული განისაზღვრება ჯოულისა და მეტრის საშუალებით. ამ ერთეულს ნიუტონი ეწოდება. ნიუტონი არის ისეთი ძალა, როდესაც ერთი მეტრით გადანაცვლების დროს პოტენციალური ენერჯია ერთი ჯოულით მცირდება. კავშირი ნიუტონისა და დინს შორის ადვილად მიიღება

$$1 \text{ newt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ m}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{10^2 \text{ cm}} = 10^5 \text{ dyn}.$$

§ 24. პოტენციალური მკუდები

ნაწილაკზე მოქმედი ძალის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად და სათანადო მოძრაობის დასახასიათებლად ძალიან ხელსაყრელია ე. წ. პოტენციალური მრუდის გამოყენება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოძრაობა ერთგანზომილებიანია და ამიტომ პოტენციალური ენერჯია შეიძლება განვახილოთ როგორც ერთი

კოორდინატის, მაგალითად x -ის, ფუნქცია. მაშინ პოტენციალური ენერჯიის გრაფიკი ნათლად გვიჩვენებს, როგორ არის ეს ენერჯია დამოკიდებული ნაწილაკის მდებარეობაზე. ვინაიდან ნაწილაკზე მოქმედი ძალა განიხილება პოტენციალური მრუდისადმი გავლებული მხების დახრილობის კუთხით, აღნიშნული მრუდი იმის საშუალებასაც გვაძლევს, რომ გამოვითვლოთ ნაწილაკზე მოქმედი ძალის სიდიდე და მიმართულება. ამისათვის ძალიან ხელსაყრელია განვიხილოთ არა თვით მოძრავი ნივთიერი წერტილი, რომლის მოძრაობა აბსცისთა ღერძის გასწვრივ წარმოებს, არამედ წარმოსახვითი წერტილი, რომელიც თვით პოტენციალურ მრუდზე მოძრაობს. მისი პროექცია აბსცისთა ღერძზე გვაძლევს ნივთიერი წერტილის მდებარეობას, ხოლო სიმაღლე აბსცისთა ღერძიდან (პოტენციალური მრუდის ორდინატი)—პოტენციალურ ენერჯიას. განსაკუთრებით თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგება მოძრაობის მთელი პროცესი, ენერჯიის ცვლილებასთან ერთად, თუ დავუშვებთ, რომ პოტენციალური მრუდი გამოხატავს დედამიწის ზედაპირის რელიეფს გორაკებით, ხეობებით, აღმართებითა და დაღმართებით, ხოლო წარმოსახვითი წერტილი კი — სხეულს, რომელიც მოძრაობს ამ რელიეფის ზედაპირზე, აბსცისთა ღერძი უნდა განვიხილოთ როგორც დონე, საიდანაც



ნახ. 48.

აითვლება დედამიწის ზედაპირიდან გარკვეულ სიმაღლეზე ატანილი სხეულის პოტენციალური ენერჯია.

პოტენციალური მრუდის ასეთი რელიეფის სახით განხილვა ნათელ წარმოდგენას გვაძლევს ნაწილაკის მოძრაობის ხასიათზე. ვთქვათ,

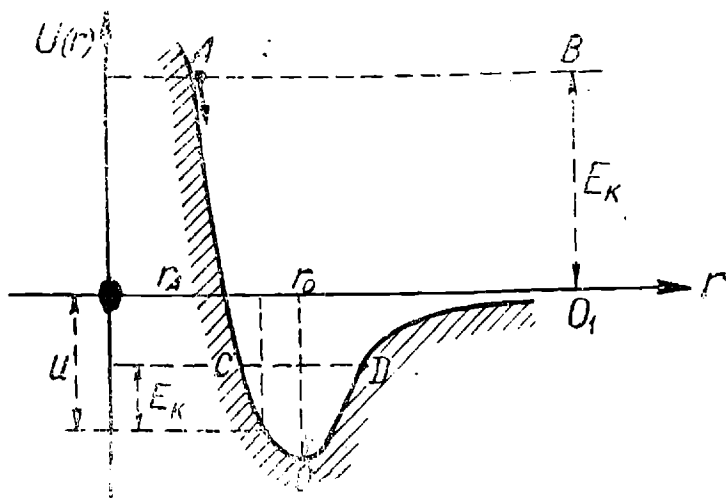
მაგალითად, ნივთიერი წერტილი A წერტილშია მოთავსებული (ნახ. 48). მას ეთანადება გამომსახველი წერტილის მდებარეობა პოტენციალური მრუდის a წერტილში (რელიეფის დახრილ ნაწილზე). ცხადია, თუ a წერტილი განვიხილეთ როგორც მთის ფერღობზე მდებარე სხეული, იგი არ დარჩება ამ მდებარეობაში, მასზე იმოქმედებს ქვევით მიმართული ძალა, რომელიც დააგორებს მას ფერღობზე (თვით ნივთიერი წერტილი A მდებარეობიდან მარჯვნივ იმოძრაავს). მისი პოტენციალური ენერჯია შემცირდება, კინეტიკური ენერჯია გაიზრდება და იგი გარკვეული სიჩქარით გაივლის ყველაზე დაბალ ადგილზე. ინერციით იგი აგორდება Ob

ფერდობზე და მიღწევს იმავე სიმაღლეს, საიდანაც დაგორდა. ამის შემდეგ იგი დაბრუნდება უკან და შეასრულებს რხევას O წერტილის მახლობლად. ნამდვილი ნივთიერი წერტილი, რომელიც აბსცისთა ღერძზე მოძრაობს, შეასრულებს რხევას A და B მდებარეობებს შორის. გავატაროთ აბსცისთა ღერძის პარალელური ab ხაზი. ცხადია, რომ მისი ორდინატი გვიჩვენებს ნაწილაკის სრულ ენერგიას, რომელიც ტოლია საწყისი Aa პოტენციალური ენერგიისა. ვინაიდან Da_1 არის პოტენციალური ენერგია, a_1d იქნება კინეტიკური ენერგია, რომელიც აქვს ნაწილაკს სათანადო მდებარეობის გავლის დროს.

სრული ენერგიის სწორი ხაზის პოტენციალურ მრუდთან ვაკვეთის წერტილები ეთანადება ნივთიერი წერტილის გაჩერების წერტილებს. ვინაიდან კინეტიკური ენერგია არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ცხადია, რომ ნაწილაკი ვერ მოხვდება ისეთ ადგილებში, რომლებშიც პოტენციალური ენერგიის მრუდი სრული ენერგიის ხაზზე ზევით მდებარეობს; მაგალითად, თუ ნაწილაკის სრული ენერგია არის Da_1 და იმყოფება ab არეში, იგი არ შეიძლება ამ არიდან გამოვიდეს—ნაწილაკი ყოველთვის a და b საზღვრებს შორის იმოძრაავებს. ასევე შეიძლება გაიჩინოს პოტენციალური მრუდის სხვა ნაწილების სათანადო მოძრაობა.

პოტენციალური მრუდის სახე დამოკიდებულია ურთიერთქმედების ხასიათზე. ზოგ შემთხვევაში მისი სახე ცნობილია, მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში, ვინაიდან პოტენციალური ენერგია ზუსტად ცნობილი არ არის, საჭირო ხდება ნამდვილი პოტენციალური მრუდის შეცვლა მიახლოებითი მოდელური მრუდით. როგორც მაგალითი, განვიხილოთ ორი ატომის პოტენციალური ენერგიის მრუდი. მისი სახე დამოკიდებულია ურთიერთქმედის ატომების გვარობაზე და ზუსტად ცნობილი არ არის, მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში იგი შეიძლება გამოვხატოთ 4μ -ე ნახაზზე წარმოდგენილი მრუდით. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია ატომებს შორის მანძილი, ორდინატთა ღერძზე კი—სათანადო პოტენციალური ენერგია. მინიმუმის წერტილიდან მარცხნივ მდებარე ნაწილი გამოხატავს ატომების განზიდვას r_0 -ზე ნაკლები მანძილებისათვის. ეს ნათლად ჩანს, თუ გამოვსახველ წერტილს მოვათავსებთ ამ ფერდობზე, იგი ჩამოგორდება, რასაც ეთანადება ატომებს შორის მანძილის გადიდება (განზიდვა). r_0 წერტილის მარჯვნივ ატომებს შორის მოქმედებს მიზიდვის ძალა, რომელიც მანძილის გადიდებასთან ერთად კლებულობს და მისწრაფვის ნულისაკენ. პოტენციალური ენერგიის მუდმივა ისეა შერჩეული, რომ უსასრულობაში ენერგია ნულის ტოლი იყოს;

ამ მრუდისათვის უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა. პირველი, როდესაც ატომების სრული ენერგია დადებითია, ე. ი. სრული ენერგიის გამომხატველი სწორი ხაზი აბსცისთა ღერძის ზემოთ მდებარეობს. თუ ატომები r_A მანძილზე იმყოფებიან უძრავ მდგომარეობაში (A გამომსახველი წერტილია). განზიდვის ძალის გავლენით



ნახ. 49.

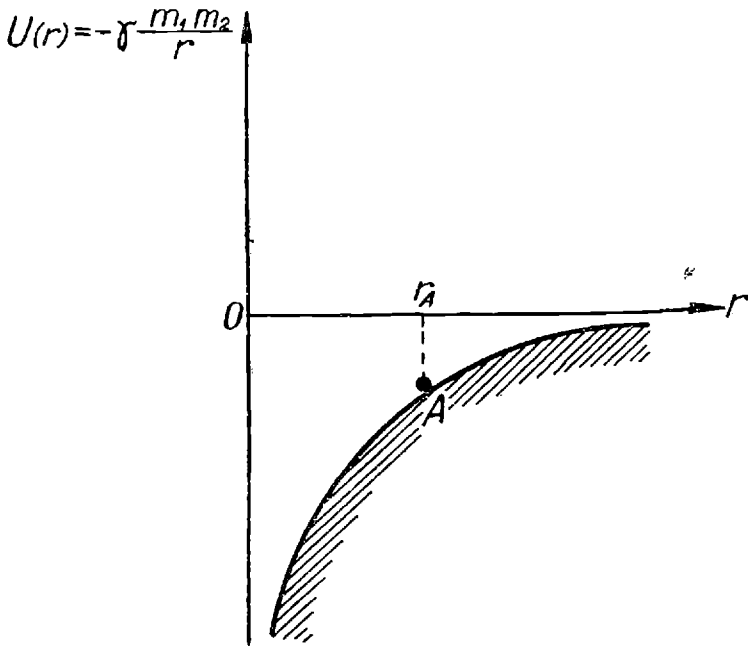
ისანი დაშორდებიან ერთმანეთს, გარკვეული სიჩქარით გაივლიან პოტენციალური ენერგიის მინიმუმის მდებარეობას და განაგრძობენ მოძრაობას, სანამ უსასრულოდ არ დაშორდებიან ერთმანეთს. მათი კინეტიკური ენერგია უსასრულოდ დაშორებისას გაიზომება O_1B მონაკვეთით. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ატომების სრული ენერგია უარყოფითია (სრული ენერგიის CD ხაზი). გამომსახველი წერტილი იგორებს C და D საზღვრებს შორის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ატომები შეასრულებენ რხევას O წერტილის მახლობლად და ვერ მოსწყდებიან ერთმანეთს. ამ შემთხვევაში ეს ორი ატომი შეადგენს ბმულ სისტემას—მოლეკულას. რომლის შემადგენელი ატომები მხოლოდ ირხევიან ერთიმეორის მიმართ. უარყოფითი სრული ენერგიის შემთხვევაში კინეტიკური ენერგია E_K გამოიხატება მანძილით პოტენციალური მრუდიდან სრული ენერგიის ხაზამდე (გადაზომილია ქვევიდან ზევით), ხოლო პოტენციალური ენერგია (უარყოფითი)—მანძილით აბსცისთა ღერძიდან პოტენციალურ მრუდამდე (გადაზომილია ზევიდან ქვევით).

მეორე მაგალითად განვიხილოთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების სათანადო პოტენციალური მრუდი (ნახ. 50). m_1 და m_2 მა-

სების მქონე ნაწილაკების გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r},$$

სადაც r არის ნაწილაკებს შორის მანძილი (ყ გრავიტაციული მუდმივა). როგორც ვხედავთ, პოტენციალური ენერგია ყველა მანძილზე უარყოფითია და იზრდება მანძილის გადიდებისას (მიზიდვა). თუ



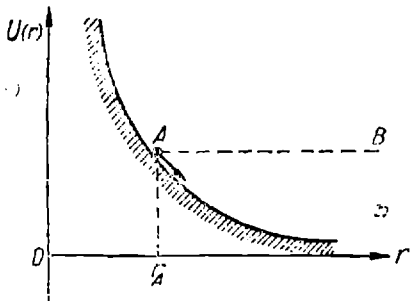
ნახ. 50.

გამომსახველ წერტილს A წერტილში მოვათავსებთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკები უძრავი არიან და იმყოფებიან r_A მანძილზე, ადვილად გამოვარკვევთ, რომ იგი დაგორდება ფერდობზე და იმოძრაებს სათავისაკენ; ეს იმას ნიშნავს, რომ მიზიდვის გავლენით ნაწილაკები უახლოვდებიან ერთმანეთს, და რადგან პოტენციალური ენერგია უსასრულოდ კლებულობს, ეს მიახლოება გავრძელდება მანამდე, სანამ ნაწილაკები არ დაეცემიან ერთმანეთს. 51-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ორი ერთნაირად (მაგალითად, დადებითად) და მუხტული ნაწილაკის პოტენციალური ენერგიის

$$U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$$

სათანადო პოტენციალური მრუდი. იგი ყველა მანძილზე აბსცისთა ღერძის ზევითაა (ენერგია დადებითია) და უსასრულოდ იზრდება

მანძილის შეზღუდვისას. რელიეფურად იგი წარმოგვიდგება უსასრულოდ მაღალი მთის კალთის სახით, რომელიც მანძილის გადიდებისას თანდათან დაბლდება და უსასრულობაში ნულოვან დონემდე დადის. თუ გამოისახევილი წერტილი ფერდობის A წერტილშია, ცხადია, რომ განზიდვის ძალის გავლენით იგი ჩამოგორდება (ნაწილაკების დაშორება) სანამ უსასრულოდ არ დაშორდება სათავეს. AB ხაზი გვიჩვენებს სრული ენერგიის მნიშვნელობას, ხოლო მისი დაშორება პოტენციალური მრუდიდან—კინეტიკური ენერგიის სიდიდეს.

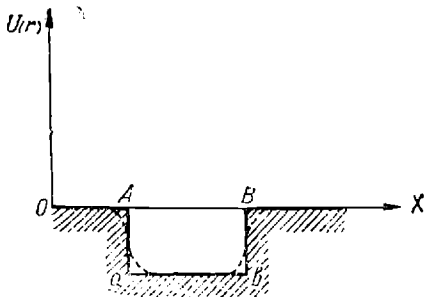


ნახ. 51.

რა პროცესს გამოხატავს

გამომსახველი ნაწილაკის მოძრაობა უსასრულობიდან სათავესაკენ? უსასრულობაში ნაწილაკს აქვს მხოლოდ კინეტიკური ენერგია და მისი სიჩქარე მიმართულია მეორე ნაწილაკისაკენ; ამ მოძრაობის

შედეგად გამოისახევილი წერტილი აგორდება ფერდობზე და ეს მოძრაობა (თანდათანობით შენელებული) გაგრძელდება მანამდე, სანამ კინეტიკური ენერგია არ გადაეა მთლიანად პოტენციალურ ენერგიაში (A წერტილი). r_A იქნება უმცირესი მანძილი, რომელსაც მიაღწევს მოცემული კინეტიკური ენერგიის მქონე ნაწილაკი; ამ



ნახ. 52.

ადგილას ნაწილაკი გაჩერდება და შემდეგ, განზიდვის ძალის გავლენით ისევ დაშორდება მეორე ნაწილაკს. ცხადია, რომ რაც უფრო დიდია საწყისი კინეტიკური ენერგია, მით უფრო მეტად დაუახლოვდებიან ნაწილაკები ერთმანეთს.

ძალიან ხშირად ატომურ ფიზიკაში გამოიყენება 52-ე ნახაზზე ნაჩვენები პოტენციალური მრუდი. მას გარკვეული ზომის ყუთის ან ორმოს ფორმა აქვს და ამიტომ ასეთ მრუდს პოტენციალურ ყუთს ან ორმოს უწოდებენ. გარდა AB შუალედისა, პოტენციალური ენერგია ყველგან ნულის ტოლია. თვით AB შუალედში იგი მუდმივია, მაგრამ უარყოფითია. ეს შუალედი გამოყოფილია მრუდის ვერტიკალური ნაწილებით. ცხადია, რომ ეს პოტენციალური მრუდი

ნამდვილი მრუდის იდეალიზაციას წარმოადგენს. განსაკუთრებით ეს შეეხება მის ვერტიკალურ ნაწილებს. მართლაც, პოტენციალური მრუდის ვერტიკალური ნაწილი იმის მაჩვენებელია, რომ სათანადო წერტილებში ძალა უსასრულოდ დიდია (პოტენციალური ენერგია სასრული ნახტომით იცვლება A და B წერტილებში). რეალურად მრუდი უნდა იყოს პუნქტირით ნაჩვენები სახის, რათა ძალა იყოს სასრული, მაგრამ სიმარტივისათვის განვიხილავთ ვერტიკალურკედლებიან ყუთს. ცხადია, რომ კედლების მახლობლად ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ყუთის შიგნით არის მიმართული და ხელს უშლის მის გამოსვლას ყუთიდან. თუ პოტენციალურ ყუთში მყოფი ნაწილაკის სრული ენერგია უარყოფითია, ნაწილაკი ვერ გამოვა ყუთიდან და იმოძრაებს Aa და Bb კედლებს შორის. თუ სრული ენერგია დადებითია, ნაწილაკს შეუძლია მოძრაობა მთელი OX ღერძის გასწვრივ, მხოლოდ ყუთის შიგნით მოხვედრისას მისი კინეტიკური ენერგია მატულობს, ვინაიდან ყუთის საზღვრების გადალახვის დროს მასზე მოქმედებს ყუთის შიგნით მიმართული ამაჩქარებელი ძალა. ცხადია, რომ ყუთიდან გამოსვლისას ეს ძალა ანელებს მოძრაობას და ამცირებს კინეტიკურ ენერგიას (პოტენციალური ენერგია იზრდება Aa მნიშვნელობიდან ნულამდე). თუ ჩვენ გვსურს არა მარტო ერთგანზომილებიანი, არამედ ორგანზომილებიანი მოძრაობის განხილვა, პოტენციალური მრუდების მაგიერ უნდა ავიღოთ პოტენციალური ზედაპირები მაგრამ ამ შემთხვევებს, მათი სირთულის გამო, არ განვიხილავთ.

§ 25. ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონი

ძალების შეკრების კანონი საშუალებას გვაძლევს გამოვარკვიოთ როგორ გამოითვლება ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა, როდესაც ეს ნაწილაკი ურთიერთქმედებს არა ერთ, არამედ რამდენიმე, მაგალითად n , ნაწილაკთან და როდესაც ამ ნაწილაკებთან მოქმედი ცალკეული ძალები ცნობილია (ნახ. 53). ვთქვათ, განსახილველი A ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია k -ურ ნაწილაკთან ურთიერთქმედების დროს არის U_k . მაშინ პოტენციალური ენერგიის შეკრების კანონის თანახმად A ნაწილაკის სრული პოტენციალური ენერგისათვის მივიღებთ

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_k + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k.$$

ამ ჯამის ყოველი წევრი დამოკიდებულია მანძილზე A ნაწილაკიდან სათანადო წერტილამდე. საერთო ძალის OX ღერძზე გეგმი-

ლის გამოსათვლელად U გავაწარმოოთ x -ის მიმართ, სადაც x არის A ნაწილაკის x კოორდინატი, მივიღებთ

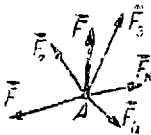
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U_k}{\partial x},$$

მაგრამ $-\frac{\partial U_k}{\partial x}$ არის იმ ძალის გეგმილი OX ღერძზე, რომლითაც

k -ური ნაწილაკი მოქმედებს A ნაწილაკზე, ხოლო $-\frac{\partial U}{\partial x}$ არის სა-

ერთო ძალის გეგმილი, ამიტომ მივიღებთ

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}.$$



ასევე მივიღებთ გეგმილებისათვის OY და OZ ღერძებზე:

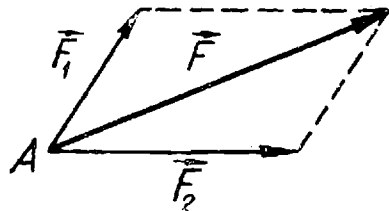
$$F_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad F_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

ნ.ხ. 53.

ცხადია, რომ ეს ტოლობები შეიძლება გავაერთიანოთ ერთ ვექტორულ ტოლობად

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (V,19)$$

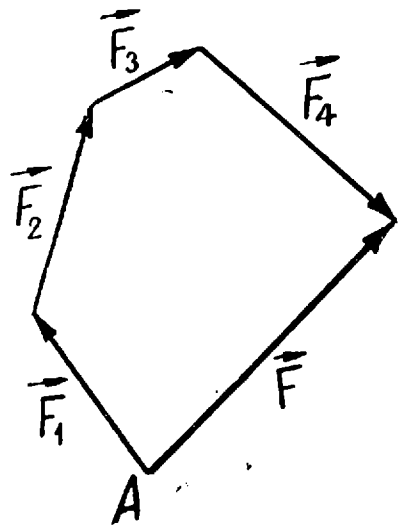
რაც გამოხატავს ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონს. თუ ნაწილაკზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, საერთო ძალა არის ცალკეული ძალების ჯამი. ვინაიდან ეს ძალები ერთ წერტილზე არიან მოდებულინი, საერთო ძალა მიიღება ცალკეული ძალების გეომეტრიული შეკრებით. ორი ძალის შემთხვევაში ეს გვაძლევს ძალთა პარალელოგრამის წესს (ნახ. 54), ხოლო მრავალი ძალის შემთხვევაში — ძალების მრავალკუთხედის წესს



ნახ. 54.

(ნახ. 55). ძალების შეკრების განხილული კანონი იმის მაჩვენებელია, რომ ორ ნაწილაკს შორის მოქმედ ძალაზე არ ახდენს გავლენას

მესამე ნაწილაკის არსებობა, ე. ი. ნაწილაკებს შორის მოქმედი ძალა სრულებით არ არის დამოკიდებული იმაზე, იმყოფება ამ ნაწილაკების. მახლობლად რაიმე სხვა სხეული თუ არა; მაგალითად, ძალა, რომლითაც დედამიწა მოქმედებს მთვარეზე არ არის დამოკიდებული სხვა ციური სხეულების არსებობაზე. ამ უკანასკნელთა მოქმედება მხოლოდ ემატება უკვე არსებულ ძალას. ძალებისა შეკრების ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლობის ეს თვისება თავისთავად ცხადი არ არის. სადგებით შესაძლებელი იქნებოდა, რომ მესამე სხეულს შეეცვალა პირველი სხეულის მოქმედება მეორეზე, მაგრამ ჯერჯერობით ბუნებაში არ არის აღმოჩენილი ისეთი ძალები, რომლებიც არ ემორჩილებოდნენ შეკრების კანონს, თუმცა არსებობს გარკვეული საბუთი იმისა, რომ ასეთი ხასიათისა უნდა იყოს ატომის ბირთვის შიგნით მოქმედი ძალები.



ნახ. 55.

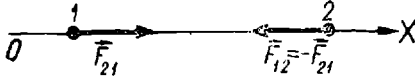
§ 26. კვადრატისა და უკუკვადრატის კალაზის ტოლოგის კანონი. ნიუტონის მესამე კანონი

როდესაც ჩვენ განვიხილეთ ძალა როგორც ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდე, ყურადღება მივაქციეთ მხოლოდ ერთ ნაწილაკს, მეორე ნაწილაკი კი მხოლოდ იმდენად მივიღეთ მხედველობაში, რამდენადაც იგი იყო მოქმედების გამომწვევი მიზეზი, ამიტომაც პოტენციალური ენერგია ჩვენ მივაწერეთ ერთ ნაწილაკს და ჩავთვალეთ იგი მხოლოდ ამ ნაწილაკის კოორდინატების ფუნქციად. სინამდვილეში პოტენციალური ენერგია არის ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდე და იგი უნდა გამოხატავდეს როგორც ერთი ნაწილაკის მოქმედებას მეორეზე, ისე მეორე ნაწილაკის მოქმედებას პირველზე; აქედან ცხადია, რომ ძალები უნდა მოქმედებდნენ როგორც ერთ, ისე მეორე ნაწილაკზე. ამ ძალების ურთიერთკავშირის გამოსარკვევად განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ (ნახ. 56). თუ ამ ნაწილაკების კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_1 -ითა და x_2 -ით, პოტენციალური ენერგია იქნება მათი სხვაობის

(წერტილთა შორის მანძილის) ფუნქცია: $U(x_1 - x_2)$. თუ $x_1 - x_2 = x$, მაშინ

$$U(x) = U(x_1 - x_2). \quad (V,20)$$

ვთქვათ, გვსურს გამოვითვალოთ ძალა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე; ამისათვის საჭიროა დავამაგროთ მეორე ნაწილაკი და გამოვითვალოთ პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება, გამოწვეული პირველი ნაწილაკის გადანაცვლებით ერთეულოვან მანძილზე, ე. ი. გამოვითვალოთ $U(x_1 - x_2)$ ფუნქციის კერძო წარმო-



ნახ. 56.

ბული x_1 -ის მიმართ მუდმივი x_2 -ის პირობებში, მივიღებთ

$$F_{21}^x = - \frac{\partial U}{\partial x_1} = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (V,21)$$

(U გაწარმოებულია როგორც რთული ფუნქცია). სრულიად ანალოგიურად, მეორე ნაწილაკზე მოქმედი ძალის გამოსათვლელად უნდა დავამაგროთ პირველი ნაწილაკი, ე. ი. ჩავთვალოთ x_1 მუდმივ ხიდიდედ და გავაწარმოოთ პოტენციალური ენერჯია x_2 -ის მიმართ, მივიღებთ

$$F_{12}^x = - \frac{\partial U}{\partial x_2} = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (V,22)$$

ვინაიდან $\frac{\partial x}{\partial x_2} = -1$. (V,21) და (V,22) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ

$$F_{21}^x = - F_{12}^x. \quad (V,23)$$

როგორც ვხედავთ, ძალა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე, ტოლია და საწინააღმდეგოა ძალისა, რომლითაც პირველი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე. ურთიერთქმედების ძალების ეს თვისება სავსებით გააჩვევია. ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია არის მხოლოდ ნაწილაკთა შორის მანძილის ფუნქცია, მისი ცვლილება პირველი ნაწილაკის ერთეულ მანძილზე (1—ა) გადანაცვლების დროს ისეთივე იქნება, როგორც იქნება მისი ცვლილება მეორე ნაწილაკის ასეთივე გადანაცვლების (2—ბ) დროს საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 57).

იმ შემთხვევაში, როდესაც ნაწილაკება სივრცეში მოძრაობენ პოტენციალური ენერჯია იქნება ფუნქცია არა მარტო $(x_1 - x_2)$ -ისა, არამედ აგრეთვე $y_1 - y_2$ და $z_1 - z_2$ -ისა.

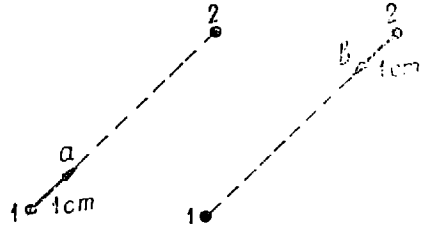
$$U(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

ცხადია, ისევე როგორც ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაში, პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულები y_1 -ისა და z_1 -ის მიმართ ტოლი იქნება უარყოფითი წარმოებულებისა y_2 -ისა და z_2 -ის მიმართ, ამიტომ ძალების მდგენლებისათვის ამ ღერძების მიმართ მივიღებთ

$$F_{21}^y = -F_{12}^y, \quad F_{21}^z = -F_{12}^z.$$

მიღებული შედეგები შეიძლება ვექტორულად დავწეროთ

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (V,24)$$



ნახ. 57.

ცხადია, რომ ურთიერთქმედების ძალების ეს თვისება მართებული იქნება მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვისაც

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \quad (V,25)$$

მიღებული შედეგი შემდეგნაირად ყალიბდება: ძალა, რომლითაც ერთი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე, ტოლი და საწინააღმდეგოა ძალისა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე.

ამ კანონს ეწოდება ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობის ან ნიუტონის მესამე კანონი (პირველ კანონად ითვლება ინერციის პრინციპი, ხოლო მეორე კანონს ჩვენ შემდეგ ვანვიხილავთ). ზოგჯერ მას სიმოკლისათვის უწოდებენ ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონს, მაგრამ ეს სახელწოდება არ შეიძლება მიზანშეწონილად ჩაითვალოს, ვინაიდან ტერმინი ქმედება რაოდენობრივად განსაზღვრული არ არის, გაურკვეველი რჩება, რის ტოლობას გულისხმობს ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობა. შეიძლება გვეფიქრა, რომ ქმედება ნიშნავს ძალით გამოწვეულ შედეგს, მაგალითად, აჩქარებას, მაგრამ მაშინ კანონი სწორი არ იქნებოდა, ვინაიდან ურთიერთქმედების შედეგად მიღებული აჩქარებები ტოლი არ არის.

შემდეგში ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ნიუტონის მესამე კანონის განხილვას. საქმე იმაშია, რომ ეს კანონი შემდეგში გამოიყვანება როგორც შედეგი მოძრაობის დინამიკური განტოლებებისა, რომლებიც აკავშირებენ ძალას აჩქარებასთან. ჩვენ ვნახავთ, რომ ეს კანონი შეიძლება განზოგადდეს ისეთ ძალებზედაც, რომლებიც არ მიიღებიან პოტენციალური ენერჯიიდან (არამექანიკური ხასიათის

ძალები). იქვე იქნება განხილული ამ კანონის გამოყენების მაგალითები და მისი შედეგები.

§ 27. მუშაობა და სიმძლავრე

განვიხილოთ ფიზიკური და ტექნიკური თვალსაზრისით ფრიალ მნიშვნელოვანი ცნება—მუშაობის ცნება, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული ენერჯის ცნებასთან. დავიწყეთ ჯერ მარტივი შემთხვევით, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს სწორხაზოვნად და მასზე მოქმედებს ტრანექტორიის გასწვრივ მიმართული ძალა (ნახ. 58). ვთქვათ, ნაწილაკმა გადაინაცვლა s მანძილით ძალის მოქმედების გასწვრივ, მაშინ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა განი-



ნახ. 58.

საზღვრება როგორც ძალის ნამრავლი გადაინაცვლების მანძილზე და გამოისახება ფორმულით:

$$A = F s. \tag{V,26}$$

შესაძლებელია, რომ ნაწილაკის გადაინაცვლება ხდებოდეს ძალის მოქმედების საწინააღმდეგოდ, მაშინ მუშაობა უარყოფითად ითვლება და გამოისახება ფორმულით:

$$A = -F s. \tag{V,26'}$$

ორივე ეს ფორმულა შეიძლება ერთ ფორმულად გავაერთიანოთ, თუ ძალას განვიხილავთ როგორც ვექტორს და შემოვიღებთ მის F_s გვეგმილს გადაინაცვლების მიმართულებაზე. ცხადია, რომ, თუ ძალა მიმართულია გადაინაცვლების გასწვრივ $F_s = F$, ხოლო, თუ მათი მიმართულებანი საწინააღმდეგოა, $F_s = -F$. ამიტომაც მუშაობის ფორმულა ორივე შემთხვევისათვის ერთად ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$A = F_s \cdot s. \tag{V,27}$$

ეს ფორმულა გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ძალა დახრილია ტრანექტორიისადმი (ნახ. 59). თუ ძალა გადაადგილების მიმართულებასთან ადგენს α კუთხეს, გვექნება

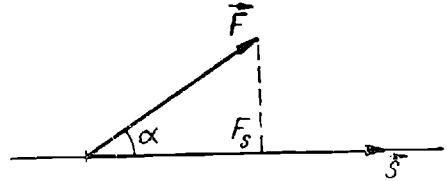
$$F_s = F \cdot \cos \alpha$$

და (V,27) ფორმულა ასე დაიწერება:

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \tag{V,28}$$

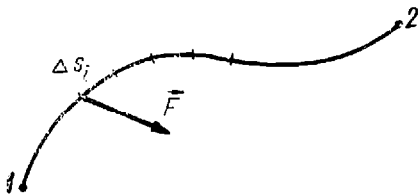
(V,26) და (V,26') ფორმულები მიიღება ამ ფორმულიდან იმ შემთხვევაში თუ α იქნება ან 0, ან π . თუ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ე. ი. ძალა გადანაცვლების მართობია, მუშაობა ნულის ტოლი იქნება. როგორც (V,27), ისე (V,28) ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის სახით, თუ ძალის გარდა s გადანაცვლებასაც განვიხილავთ როგორც ვექტორს

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (V,29)$$



ნახ. 59.

განვიხილოთ უფრო ზოგადი შემთხვევა, როდესაც ტრაექტორია არის მრუდი წირი და ძალაც ცვალებადია, ე. ი. სხვადასხვა ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილში (ნახ. 60). ამ შემთხვევაში მუშაობის გამოსათვლელად შემდეგნაირად იქცევით. გადანაცვლების მთელ მანძილს ყოფენ მცირე Δs_i ელემენტებად და გამოითვლიან მუშაობას



ნახ. 60.

ყოველი ცალკეული ელემენტისათვის იმ დაშვებით, რომ ყოველ ელემენტზე მოქმედი ძალა მუდმივია, რაც იმას ნიშნავს, რომ შეიძლება გამოვიყენოთ (V,27) ფორმულა. ცხადია, ეს დაშვება მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო

მცირეა ელემენტი. ელემენტარული მუშაობისათვის მივიღებთ

$$\Delta A = F_s \cdot \Delta s_i, \quad (V,30)$$

სადაც F_s არის ძალის გეგმილი გადანაცვლებაზე i -ური ელემენტისათვის. მთელი მუშაობის გამოსათვლელად იღებენ ელემენტარული მუშაობების ჯამს

$$A = \sum_{i=1}^n F_{s_i} \cdot \Delta s_i. \quad (V,31)$$

როგორც ვთქვით, ეს ფორმულა მიახლოებითია, ვინაიდან დაშვებულია ყოველ ელემენტზე მოქმედი ძალის მუდმივობა. მუშაობის ზუსტი ფორმულის მისაღებად უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც ყოველი Δs_i ელემენტი ნულისაკენ მიისწრაფვის და მათი რიცხვი კი უსასრულოდ იზრდება. როგორც ანალიზიდანაა ცნობილი,

(V,31) ფორმულაში მდგომი ჯამი მოგვცემს ინტეგრალს და ფორმულა მუშაობისათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$A = \int_1^2 F_s ds, \quad (V,32)$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია საწყის და საბოლოო მდებარეობათა შორის და ინტეგრება ხდება ტრანექტორიის გასწვრივ. ასეთია ზოგადი ფორმულა ნებისმიერად ცვლადი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობისა ნებისმიერ ტრანექტორიაზე მოძრაობის დროს.

გამოვარკვეით ახლა როგორაა მუშაობა დაკავშირებული ენერჯიასთან. ცხადია, რომ ასეთი კავშირი უნდა არსებობდეს, ვინაიდან ძალის გეგმილი რაიმე მიმართულებით ჩვენ განვსაზღვრეთ როგორც პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული ამ მიმართულებით

$$F_s = - \frac{\partial U}{\partial s}.$$

თუ ძალის ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ ელემენტარული მუშაობის ფორმულაში

$$dA = F_s ds,$$

მივიღებთ

$$dA = - \frac{\partial U}{\partial s} ds = - dU. \quad (V,33)$$

როგორც ვხედავთ, მუშაობა უდრის პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას. იგივე შედეგი მიიღება სასრულ გზაზე შესრულებულ მუშაობისათვისაც.

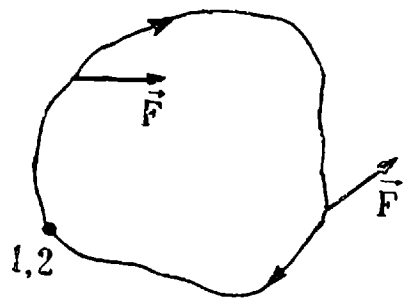
$$A = \int_1^2 F_s ds = - \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial s} ds = - \int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (V,34)$$

მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს შექანიკური მუშაობის ერთი მნიშვნელოვანი თვისება გავარჩიოთ. (V,34) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა დამოკიდებულია მხოლოდ საწყის და საბოლოო მდებარეობებზე და არ არის დამოკიდებული იმ გზის სახეზე, რომლის საშუალებითაც ხდება გადასვლა ამ მდებარეობათა შორის. რა გზითაც არ უნდა გადავიდეს ნაწილაკი ერთი მდებარეობიდან მეორეში, შესრულებული მუშაობა ყოველთვის ერთი და იგივე იქნება; აქედან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ თუ გადანაცვლების შემდეგ ნაწილაკი საწყის მდებარეობას დაუბრუნდა, ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლი იქნება, ვინაიდან ამ შემთხვევაში პოტენციალური

ენერჯის საბოლოო მნიშვნელობა საწყის მნიშვნელობას თანხვდება; ამ შედეგს მათემატიკურად შემდეგი სახით გამოხატავენ:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (\text{V}, 35)$$

სადაც წრიანი ინტეგრალი იმის მაჩვენებელია, რომ ინტეგრება ჩაკეტილი გზით ხდება (ნახ. 61). ვინაიდან პოტენციალური ენერჯის ცვლილება, ენერჯის მუდმივობის კანონის თანახმად, დაკავშირებულია კინეტიკური ენერჯის ცვლილებასთან, უნდა არსებობდეს კავშირი მუშაობასა და კინეტიკური ენერჯის ცვლილებას შორის. მართლაც, ენერჯის მუდმივობის კანონის თანახმად



ნახ. 61.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + dU = 0,$$

საიდანაც

$$dU = -d\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

ამიტომ ელემენტარული მუშაობისათვის გვექნება

$$dA = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \quad (\text{V}, 36)$$

ე. ი. მუშაობა უდრის კინეტიკური ენერჯის ნაზრდს. იგივე შეიძლება ითქვას სასრულ გზაზე შესრულებული მუშაობისათვის

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (\text{V}, 37)$$

სადაც v_1 და v_2 წარმოადგენენ ნაწილაკის სიჩქარეებს საწყის და საბოლოო მდებარეობებში. საბოლოოდ ვღებულობთ ასეთ შედეგს—ნაწილაკის მოძრაობის დროს ხდება პოტენციალური და კინეტიკური ენერჯიების ერთმანეთში გარდაქმნა. ერთი მათგანი კლებულობს, მეორე მატულობს. ამავე დროს ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ასრულებს გარკვეულ მუშაობას, რომელიც უდრის პოტენციალური ენერჯის შემცირებას და კინეტიკური ენერჯის ნაზრდს. როგორც ვხედავთ, მუშაობა ახასიათებს ენერჯის გარდაქმნის პროცესს. იგი გვიჩვენებს, თუ რა რაოდენობის პოტენციალური ენერჯია გადადის კინეტიკურ ენერჯიაში. ცხადია, მუშაობაზე ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ პროცესის (მოძრაობის) დროს. პროცესის დაწყების ან

დამთავრების შემდეგ ნაწილას აქვს გარკვეული მარაგი პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიებისა და, რასაკვირველია, არავითარ მუშაობაზე ამ მდგომარეობაში ლაპარაკი არ შეიძლება. ამიტომაც გასაგებია გამოთქმა—სრულდება მუშაობა, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ იგულისხმება პროცესი და არა მდგომარეობა.

ახლა უფრო დაწვრილებით გავარჩიოთ ჩვენ მიერ მიღებული შედეგი—ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა არ არის დამოკიდებული გზაზე, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ჩაკეტილ გზაზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. დაკვირვება და ცდები გვიჩვენებენ, რომ პრაქტიკაში ეს შედეგი მართებული არ არის. ჩვენთვის კარგად არის ცნობილი, რომ მუშაობა დამოკიდებულია გზაზე და რომ საწყის მდებარეობაში დაბრუნებისას შესრულებული მუშაობა ნულისაგან განსხვავებულია (ტვირთის გადატანა დედამიწის ზედაპირზე ან მისი მთაზე ატანა და ა. შ.). მაგრამ, თუ დავუკვირდებით ყველა ასეთ შემთხვევას, ადვილად აღმოვაჩინოთ, რომ აქ დარღვეულია მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი, ვინაიდან ხდება მექანიკური ენერგიის გადასვლა სხვა სახის ენერგიებში. მაშასადამე, ყველა ასეთი მოძრაობა არ წარმოადგენს წმინდა მექანიკურ პროცესს და მათი შესწავლისათვის საჭიროა მოლეკულურ-სითბური პროცესების მხედველობაში მიღება. პრინციპულად რომ ვიმსჯელოთ, ამ მოძრაობების განხილვა მხოლოდ მექანიკურ კანონებზე დამყარებით შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, მექანიკაში იხილავენ ასეთ მოძრაობებსაც და გარკვეულ დაშვებებზე დამყარებით აზოგადებენ ძალის ცნებას; შემოჰყავთ ე. წ. დისიპაციური ძალები, რომლებიც დაკავშირებული არიან გარეშე სხეულების არამექანიკურ მოქმედებასთან (ხახუნის ძალები) და რომლებიც არ შეიძლება განსაზღვრულ იქნენ პოტენციალური ენერგიის საშუალებით; ეს იმას ნიშნავს, რომ შეუძლებელია მათი წარმოდგენა მხოლოდ ნაწილას კონფიგურაციაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის გრადიენტის სახით. ხშირად ასეთ ძალებს კიდევ არაპოტენციალურ ძალებს უწოდებენ. არაპოტენციალური, ე. ი. დისიპაციური ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა უკვე დამოკიდებულია მოძრაობის გზაზე (ისინი ყოველთვის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი) და ამიტომ მათი არსებობის შემთხვევაში აღარ არის მართებული პოტენციალური ძალების მიერ შესრულებული მუშაობისათვის მიღებული შედეგი; ამ საკითხს ჩვენ შემდეგ დისიპაციური ძალების განხილვის დროს, დავუბრუნდებით.

პოტენციალურ და კინეტიკურ ენერგიასთან მუშაობის დამაკავშირებელი ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ ვიპოვოთ მისი (მუ-

შაობის) განზომილება და ერთეული. ვინაიდან მუშაობა უდრის კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდს, მუშაობისა და კინეტიკური ენერჯიის განზომილება ერთი და იგივე უნდა იყოს

$$[A] = \left[\frac{mv^2}{2} \right] = ML^2T^{-2}.$$

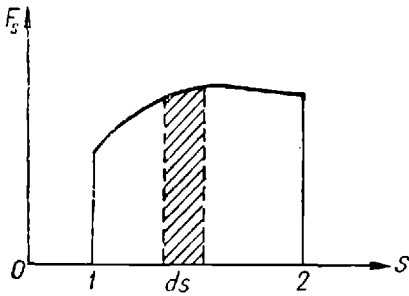
ამავე დროს მუშაობის საზომი ერთეული ისეთივე უნდა იყოს, როგორც კინეტიკური ან პოტენციალური ენერჯიის ერთეული. აბსოლუტურ ფიზიკურ სისტემაში მუშაობის ერთეული იქნება ერგი, ხოლო აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში — ჯოული, რომელიც, როგორც ვიცით, 10^7 -ჯერ მეტია, ვიდრე ერგი.

ხშირად ხელსაყრელია მუშაობის ერთეულის განსაზღვრა ძალისა და მანძილის ერთეულების საშუალებით, მაგრამ ჩვენი მეთოდის მიხედვით, რომლის თანახმად ძალა განისაზღვრება ენერჯიის საშუალებით, ასეთი განსაზღვრა არ იქნება თანმიმდევრული და ამიტომ მას ჩვენ აქ არ მოვიყვანთ. ამ საკითხს ჩვენ შემდეგ დავუბრუნდებით. ახლა კი აღვნიშნავთ, რომ, გარდა ერგისა და ჯოულისა, ხშირად გამოიყენება მუშაობის კიდევ ერთი ერთეული ე. წ. კილოგრამმეტრი. კილოგრამმეტრი არის მუშაობა, რომელიც სრულდება ერთი კილოგრამ-მასის სხეულის ატანისას ერთი მეტრის სიმაღლეზე დედამიწის ზედაპირის მახლობლად. ეს ერთეული შეიძლება განიმარტოს აოტენციალური ენერჯიის საშუალებითაც. დედამიწის მახლობლად მყოფ სხეულს გარკვეული პოტენციალური ენერჯია აქვს, ვინაიდან იგი ურთიერთქმედებს დედამიწასთან. თუ ერთი კილოგრამი მასის სხეულს ერთი მეტრის სიმაღლეზე ავწევთ დედამიწის ზედაპირიდან, პოტენციალური ენერჯია შეიცვლება (გაიზრდება) და ეს ცვლილება ენერჯიისა იქნება სწორედ კილოგრამმეტრი. გაზომვები გვიჩვენებენ, რომ ენერჯიის ეს ცვლილება სხვადასხვა დედამიწის სხვადასხვა ადგილას, ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია ცვლება დედამიწის ზედაპირზე გადანაცვლების დროს. ამიტომაც კილოგრამმეტრის განსაზღვრის დასაზუსტებლად უნდა გაირკვეს, თუ სად და რა პირობებში უნდა ხდებოდეს სხეულის ატანა ერთი მეტრის სიმაღლეზე. შეთანხმებით მიღებულია, რომ ერთი კილოგრამმეტრი შემდეგნაირად არის დაკავშირებული ჯოულთან:

$$1 \text{ kGm} = 9,80665 \text{ joule} \approx 9,81 \text{ joule}.$$

ხშირად ხელსაყრელია მუშაობის გამოსახვა გრაფიკულად; ამისათვის შემდეგ გრაფიკს აგებენ. აბსცისთა ღერძზე გადაზომავენ s განვილი მანძილს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე — ძალის F , გეგმილს s

ტრაექტორიის გასწვრივ (ნახ. 62). ვინაიდან F_s საზოგადოდ არის s -ის ფუნქცია, იგი გამოიხატება მრუდით. ds ელემენტარული გადაადგილების დროს შესრულებული მუშაობა გამოიხატება მცირე ფართობით, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძით, s და $s + ds$ -ის სათანადო ორდინატებით და მრუდის სათანადო რკალით. მთელი მუშაობა 1 მდებარეობიდან 2 მდებარეობაში გადასვლის

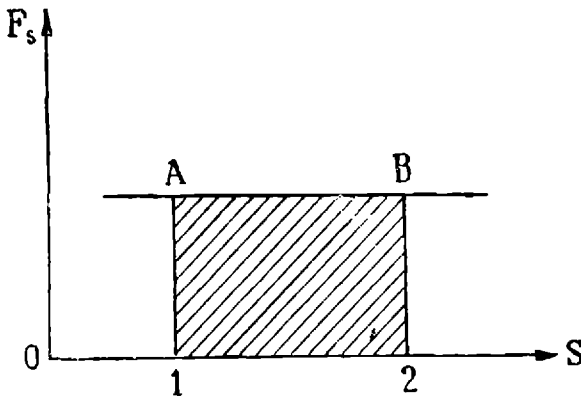


ნახ. 62.

დროს გამოიხატება ასეთი ელემენტარული ფართობების ჯამით. იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც F_s მუდმივია, მისი გამომსახველი მრუდი იქნება აბსცისთა ღერძის პარალელური სწორი ხაზი და, მუშაობა გამოიხატება $1AB2$ მართკუთხედის ფართობით (ნახ. 63), რაცეთანხმება ამ შემთხვევისათვის გამოსაყენებელ მარტივ ფორმულას:

$$A = F_s(s_2 - s_1) = F_s \cdot s.$$

განვიხილოთ ახლა სიმძლავრის ცნება, ამ ცნებას ძირითადად ტექნიკური მნიშვნელობა აქვს და იგი შემოღებულია იმის დასახასიათებლად, თუ რამდენად სწრაფად სრულდება მუშაობა. თვით მუშაობის განსაზღვრისას დროს მნიშვნელობა არ ჰქონდა, მნიშვ-



ნახ. 63.

ნელოვანი იყო გავლილი გზა და მოქმედი ძალა. მაგრამ ზოგჯერ საჭიროა ვიცოდეთ რამდენად სწრაფად სრულდება ესა თუ ის მუშაობა. თუ იმ მარტივ შემთხვევაში, როდესაც ძალა მუდმივია

მუშაობა t დროში სრულდება, დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა გამოისახება ფარდობით:

$$\bar{W} = \frac{A}{t} = \frac{F_s \cdot s}{t} = F_s \cdot \bar{v}. \quad (V,38)$$

ამ სიდიდეს, ე. ი. დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას ეწოდება საშუალო სიმძლავრე. განხილულ მარტივ შემთხვევაში იგი გამოისახება როგორც ძალის გეგმილის ნამრავლი საშუალო სიჩქარეზე. ზოგად შემთხვევაში ტრაექტორიის სხვადასხვა მომენტში სიმძლავრე სხვადასხვა შეიძლება იყოს და სიმძლავრის ნამდვილი მნიშვნელობა დროის ადებულ მომენტში განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_s \cdot ds}{dt} = F_s \cdot v, \quad (V,39)$$

ე. ი. სიმძლავრე არის ძალის მხები გეგმილის ნამრავლი სიჩქარეზე. ამ ფორმულას შეიძლება მივცეთ სკალარული სახე, თუ კი ძალასა და სიჩქარეს განვიხილავთ როგორც ვექტორებს

$$W = (\vec{F} \cdot \vec{v}). \quad (V,40)$$

სიმძლავრის ცნება ხშირად გამოიყენება ტექნიკაში, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც საჭიროა მანქანის მიერ მუშაობის შესრულების სისწრაფის დახასიათება. შეიძლება ორი მანქანა ერთსა და იმავე მუშაობას ასრულებდეს, მაგრამ ერთი უფრო მძლავრი იყოს, ვიდრე მეორე, თუ იგი ამ მუშაობას უფრო მცირე დროში ასრულებს, ვიდრე მეორე. ცხადია, რომ სიმძლავრის განზომილება მიიღება მუშაობის, ანუ ენერჯიის განზომილების, გაყოფით დროის განზომილებაზე

$$[W] = \frac{[A]}{[t]} = ML^2T^{-3}.$$

სიმძლავრის ერთეულებიც მიიღება ენერჯიისა და დროის ერთეულების საშუალებით. აბსოლუტურ ფიზიკურ სისტემაში სიმძლავრის ერთეული იქნება ისეთი სიმძლავრე, როდესაც ერთ სეკუნდში სრულდება ერთი ერგი მუშაობა.

სიმძლავრის აბსოლუტური ფიზიკური ერთეული $= \frac{1 \text{ erg}}{1 \text{ sec}}$; ამ

ერთეულს სპეციალური სახელწოდება არა აქვს. აბსოლუტურ პრაქტიკულ სისტემაში სიმძლავრის ერთეული არის ვატი. ეს არის

ისეთი სიმძლავრე, როდესაც ერთ სეკუნდში სრულდება ერთი ჯოული მუშაობა

$$1 \text{ W} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ sec}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}.$$

კილოგრამმეტრთან, როგორც მუშაობის ერთეულთან, დაკავშირებულია სიმძლავრის ერთეული, ე. წ. კილოგრამმეტრი სეკუნდში

$$\frac{1 \text{ kGm}}{1 \text{ sec}} = 9,81 \text{ W}.$$

მოქაობის დინამიკური განგოლებები

**§ 28. მოქაობის დინამიკური განგოლებების
განგოყვანა**

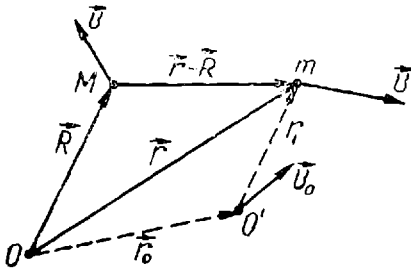
როგორც წინათ იყო აღნიშნული, მექანიკის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს მოძრაობის განსაზღვრა ურთიერთქმედების საშუალებით. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ურთიერთქმედება ხასიათდება ორი სიდიდით—პოტენციალური ენერგიითა და ძალით, რომელთა შორის გარკვეული კავშირი არსებობს. სახელდობრ, თუ ცნობილია პოტენციალური ენერგია, როგორც მდებარეობის ფუნქცია, ძალის გვემილი რაიმე ღერძზე მოიძებნება მისი გაწარმოებით სათანადო კოორდინატის მიმართ. შებრუნებით, თუ ცნობილია ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება მისი ინტეგრებით. ინტეგრების მუდმივის განსაზღვრა მოხდება დამატებითი პირობიდან, რომ გარკვეული მდებარეობისათვის (ჩვეულებრივად უსასრულო დაშორებისათვის) პოტენციალურ ენერგიას გარკვეული (ჩვეულებრივად ნულის ტოლი) მნიშვნელობა აქვს.

შეორე მხრივ, ნაწილაკის მოძრაობა სავსებით გარკვეულია, თუ ცნობილია რადიუს-ვექტორი (ან კოორდინატები) როგორც დროის ფუნქცია

$$\vec{r} = f(t); \begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t). \end{cases} \quad (\text{VI.1})$$

თუ ეს დამოკიდებულება ცნობილია, ერთხელ და ორჯერ გაწარმოებით გამოითვლება სათანადოდ სიჩქარე და აჩქარება. შებრუნებით, თუ ცნობილია ნაწილაკის აჩქარება, შეიძლება ორჯერ ინტეგრებით განვსაზღვროთ რადიუს-ვექტორი, როგორც დროის ფუნქცია. ინტეგრების ორი მუდმივის განსაზღვრა ხდება დამატებითი პირობებიდან, ე. წ. საწყისი პირობებიდან, რომლებიც საზღვრავენ ნაწილაკის მდებარეობასა და სიჩქარეს საწყისი მომენტი-სათვის.

მაშასადამე, ერთი მხრივ, ჩვენ გვაქვს ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდეები—პოტენციალური ენერგია და ძალა, მეორე მხრივ, კი მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები—რადიუს-ვექტორი, სიჩქარე და აჩქარება. იმ განტოლებებს, რომლებიც ამყარებენ კავშირს ურთიერთქმედებისა და მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებს შორის, მოძრაობის დინამიკური განტოლებები ეწოდებათ.



ნახ. 64.

ნება. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორი ურთიერთქმედი ნაწილაკის შემთხვევა (მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევა ანალოგიურად განიხილება). ვთქვათ, მოცემულია ორი ნაწილაკი მასებით M და m ; მათი სათანადო სიჩქარეები რაიმე ინერციული სისტემის მიმართ იყოს \vec{V} და \vec{v} , ხოლო ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია $-U(|\vec{r}-\vec{R}|)$, სადაც \vec{r} და \vec{R} ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებია (სიდიდე $|\vec{r}-\vec{R}|$ წარმოადგენს მანძილს ნაწილაკებს შორის) (ნახ. 64). ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახით დაიწერება:

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + U(|\vec{r}-\vec{R}|) = \text{const.} \quad (\text{VI.2})$$

ვთქვათ, გვსურს m მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების დადგენა. ამისათვის დავუშვათ, რომ M მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობა ჩვენთვის ცნობილია, ე. ი. ცნობილია მისი \vec{R} რადიუს-ვექტორი როგორც დროის ფუნქცია:

$$\vec{R} = \varphi(t).$$

მაშინ მისი სიჩქარეც და, მაშასადამე, კინეტიკური ენერგიაც დროის ცნობილი ფუნქცია იქნება; აქედან დავასკვნით, რომ გამოსახულება

$$\frac{MV^2}{2} + U(|\vec{r}-\vec{R}|)$$

იქნება \vec{r} რადიუს-ვექტორისა და დროის ცნობილი ფუნქცია. აღვნიშნოთ ეს გამოსახულება $U(\vec{r}, t)$ -თი და ვუწოდოთ მას m მასის ნაწილაკის პოტენციალური ენერჯია M მასის ნაწილაკის მიმართ. (VI,2) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}, t) = \text{const}; \quad (\text{VI},3)$$

ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს, თითქოს მხოლოდ ერთი ნაწილაკი გვექონდეს (ცვალებად (ე. ი. დროზე დამოკიდებულ) პოტენციალურ ველში.

გადავიდეთ ახალ ინერციულ სისტემაზე, რომლის სათავეს რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე ძველი სისტემის მიმართ არის \vec{r}_0 და \vec{v}_0 . აღვნიშნოთ m მასის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე ამ ახალი სისტემის მიმართ \vec{r}_1 -ითა და \vec{v}_1 -ით. მათი კავშირი \vec{r} და \vec{v} სიდიდეებთან შემდეგი ფორმულებით იქნება გამოსახული:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{v}_0 t, \\ \vec{v}_1 &= \vec{v} - \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (\text{VI},4)$$

(დაშვებულია, რომ საწყის მომენტში ახალი სისტემის სათავე ძველი სისტემის სათავესთანაა თანხვედნილი). ფარდობითობის პრინციპის თანახმად ამ ახალი სისტემის მიმართ ენერჯიის კანონს ისეთივე სახე უნდა ჰქონდეს, როგორც ძველი სისტემის მიმართ:

$$\frac{mv_1^2}{2} + U(\vec{r}_1, t) = \text{const}. \quad (\text{VI},5)$$

უნდა გვახსოვდეს მხოლოდ, რომ ამ ფორმულაში შემავალი მუდმივა განსხვავებულ იქნება (VI,3) ფორმულის მუდმივისაგან. ჩავსვათ ამ განტოლებაში \vec{r}_1 და \vec{v}_1 მნიშვნელობანი (VI,4) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - m\vec{v} \cdot \vec{v}_0 + \frac{mv_0^2}{2} + U(\vec{r} - \vec{v}_0 t, t) = \text{const}. \quad (\text{VI},6)$$

გავადიფერენციალოთ (VI,3) და (VI,6) ფორმულები

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0, \quad (\text{VI},7)$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \vec{v}_0 d(m\vec{v}) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{v}_0 dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0, \quad (\text{VI},7')$$

ვინაიდან \vec{v}_0 მუდმივი სიდიდეა. პირველი განტოლებიდან მეორის გამოკლება მოგვცემს

$$\vec{v}_0 d(m\vec{v}) + \frac{\partial U}{\partial r} \vec{v}_0 dt = 0.$$

ანუ

$$\vec{v}_0 \left\{ d(m\vec{v}) + \frac{\partial U}{\partial r} dt \right\} = 0. \quad (\text{VI},8)$$

მაშასადამე, იმისათვის რომ ენერჯიის მუდმივობის კანონი მართებული იყოს ყველა ინერციულ სისტემაში, უნდა შესრულდეს (VI,8) ტოლობა, როგორც არ უნდა იყოს \vec{v}_0 , ე. ი. როგორც ახალი ინერციული სისტემაც არ უნდა ამოვირჩიოთ. მაგრამ (VI,8) ტოლობა მხოლოდ მაშინ იქნება შესრულებული ნებისმიერი \vec{v}_0 -ისათვის, როდესაც ნულის ტოლი იქნება ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება; აქედან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (\text{VI},9)$$

ვინაიდან $-\frac{\partial U}{\partial r}$ არის ნაწილაკზე მოქმედი \vec{F} ძალა, გვქვია

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \quad (\text{VI},9')$$

თუ გავიხსენებთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში მასა მუდმივ სიდიდელ ითვლება, ეს ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$m\vec{a} = \vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (\text{VI},10)$$

როგორც (VI,9'), ისე (VI,10) ფორმულა წარმოადგენს მოძრაობის დინამიკურ განტოლებებს, ვინაიდან ისინი აკავშირებენ მოძრაობისა და ურთიერთქმედების დამახასიათებელ სიდიდეებს. (VI,9') ფორმულა უფრო ზოგადია, ვიდრე (VI,10) ფორმულა, ვინაიდან იგი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მასა ცვალებადია. მუდმივი მასის შემთხვევაში ისინი სავსებით ეკვივალენტურია.

კანონს, გამოხატულს (VI,9') ან (VI,10) ფორმულით, ეწოდება ნიუტონის მეორე კანონი და იგი წარმოადგენს მექანიკის ძირითად კანონს. მისი შინაარსი ასეთია:

მოძრაობის რაოდენობის (იმპულსის) წარმოებული დროით მოქმედი ძალის ტოლია. მუდმივი მასის შემთხ-

ვევაში კი გვექნება: მასის ნამრავლი აჩქარებაზე მოქმედი ძალის ტოლია. მოძრაობის დინამიკური განტოლება, ანუ ნიუტონის მეორე კანონი, შეიძლება გამოვხატოთ კოორდინატების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა (VI,10) ვექტორული განტოლების დაგვემილება ღერძებზე:

$$\begin{aligned}
 ma_x &= m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \\
 ma_y &= m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \\
 ma_z &= m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{VI,11}$$

იმის შემდეგ, რაც დადგენილია მოძრაობის განტოლებები, უკვე შეიძლება ავწეროთ როგორ უნდა მოხდეს მექანიკის ძირითადი ამოცანის ამოხსნა. ვთქვათ, მოცემულია პოტენციალური ენერგია (ურთიერთქმედება) და საძიებელია რადიუს-ვექტორი, როგორც დროის ფუნქცია (მოძრაობა). პოტენციალური ენერგიის გაწარმოებით კოორდინატების მიმართ მივიღებთ ძალას (ან მის ვეგმილებს). მოძრაობის განტოლების საშუალებით ვიპოვიან აჩქარებას, ხოლო შემდეგ, აჩქარების ორჯერ ინტეგრებით და საწყისი პირობების გამოყენებით ვიპოვიან კოორდინატებს, როგორც დროის ფუნქციებს.

რასაკვირველია, შეიძლება და ხშირად საჭიროც არის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა. მოცემულია მოძრაობა, ე. ი. \vec{r} , როგორც დროის ფუნქცია, და საჭიროა ურთიერთქმედების, ე. ი. ძალის ან პოტენციალური ენერგიის პოვნა; ამ შემთხვევაში ასე უნდა მოვიქცეთ. \vec{r} -ის გაწარმოებით ვპოულობთ სიჩქარეს და შემდეგ აჩქარებას. მოძრაობის განტოლების თანახმად ძალა მოიძებნება აჩქარების გამრავლებით მასაზე. თუ საჭიროა პოტენციალური ენერგიის განსაზღვრა, საჭიროა იქნება ძალის ინტეგრება და ინტეგრების მუდმივის განსაზღვრა დამატებითი პირობით. ამოხსნის სქემა თვალსაჩინოდ ასე წარმოიდგინება:

ურთიერთქმედება	მოძრაობის განტოლება	მოძრაობა
$U = \vec{F}$	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{a} \rightleftharpoons \vec{v} \rightleftharpoons \vec{r}$

კარგად უნდა გვასსოვდეს, რომ პოტენციალური ენერგია ან ძალა არ საზღვრავენ მოძრაობას ცალსახად. ძალა საზღვრავს აჩქარებას

და აჩქარების საშუალებით რომ მოიძებნოს მოძრაობა, აუცილებლად საჭიროა საწყისი პირობების გამოყენება.

ის გარემოება, რომ ძალა საზღვრავს არა უშუალოდ ნაწილაკის მდებარეობასა და სიჩქარეს, არამედ აჩქარებას, შემდეგნაირადაც შეიძლება იქნეს გაგებულნი. ვთქვათ, მოცემულია ნაწილაკზე მოქმედი გარეშე სხეულების მდებარეობები, ე. ი. მათი კონფიგურაცია. ცხადია, რომ ეს კონფიგურაცია სავსებით ცალსახად საზღვრავს ნაწილაკზე მოქმედ ძალას. მიუხედავად ამისა, განსახილველი ნაწილაკი ჩვენ შეგვიძლია სივრცის ნებისმიერ წერტილში მოვათავსოთ. კიდევ მეტიც, ნებისმიერ წერტილში მოთავსების შემდეგ ჩვენ შეგვიძლია ნაწილაკს ნებისმიერი სიჩქარე მივანიჭოთ. მაგრამ აჩქარებისათვის ნებისმიერი მნიშვნელობის მინიჭება შეუძლებელია. იგი ცალსახად განისაზღვრება გარეშე სხეულების კონფიგურაციითა და ნაწილაკის მდებარეობით.

§ 29. ნიუტონის მესამე კანონის გამოყვანა მოძრაობის დინამიკური განათლებებიდან

წინა თავში, ძალის ცნების განსაზღვრის დროს, ჩვენ დავადგინეთ, რომ ერთიერთქმედ ნაწილაკებზე მოქმედი ძალები ერთმანეთის ტოლია და საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. ეს კანონი—ნიუტონის მესამე კანონი—გამოყვანილი იყო ძალისა და პოტენციალური ენერჯიის დამაკავშირებელი ფორმულიდან. ახლა გამოვარკვევთ, რომ ეს კანონი შეიძლება გამოვიყვანოთ მოძრაობის დინამიკური განტოლებებიდან და იმპულსის მუდმივობის კანონიდან.

მართლაც, მოძრაობის დინამიკური განტოლებების თანახმად ყოველი ნაწილაკისათვის ძალა უდრის მასის ნამრავლს აჩქარებაზე:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2. \quad (\text{VI}, 12)$$

მეორე მხრივ, იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const},$$

საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (\text{VI}, 13)$$

(VI, 12) ფორმულებთან შედარება გვაძლევს, რომ

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad (\text{VI}, 14)$$

ე. ი. ვღებულობთ ნიუტონის მესამე კანონს.

ეს კანონი შეიძლება განზოგადდეს მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარ სისტემაზე. მხოლოდ ამისათვის ხელსაყრელია დავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad (\text{VI}, 14')$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ განმხილულ სისტემაში მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის ნიუტონის მეორე კანონი ასე დაიწერება:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2, \quad \dots, \quad m_n \vec{a}_n = \vec{F}_n. \quad (\text{VI}, 15)$$

შეკრებით მივიღებთ

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

მეორე მხრივ, იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const},$$

საიდანაც გაწარმოებით ვღებულობთ

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n = 0.$$

(VI, 16) ფორმულასთან შედარება მოგვცემს

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0, \quad (\text{VI}, 16)$$

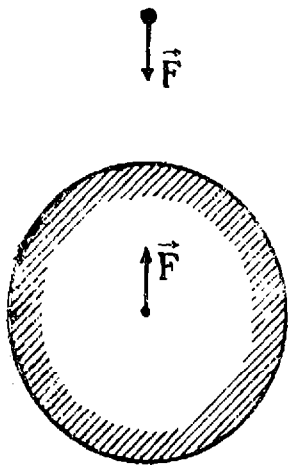
რაც წარმოადგენს (VI, 14') ფორმულის განზოგადებას მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის.

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ცნობილია, რომ დედამიწის მახლობლად მყოფი სხეულები მიიზიდებიან დედამიწის შიერ გარკვეული ძალით, რომელსაც სიმძიმის ძალა ეწოდება. ეს ძალა არის მიზეზი სხეულების ვარდნისა და საყრდენზე დაწოლისა. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად ეს სხეულიც იზიდავს დედამიწას ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით, რომელიც მოღებულია დედამიწის მასების ცენტრში (ნახ. 65).

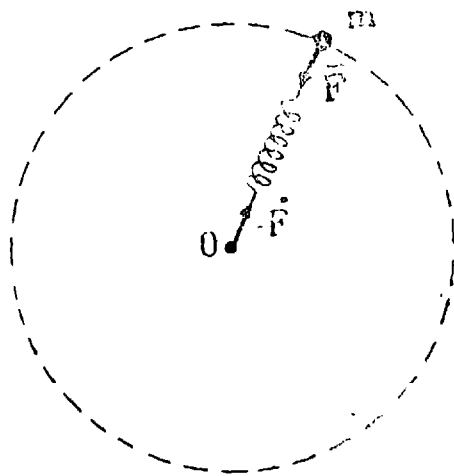
ვთქვათ, რაიმე m მასის სხეული დაკავშირებულია უძრავ ცენტრთან ზამბარით და მასთან ერთად თანაბრად ბრუნავს ამ ცენტრის ირგვლივ (ნახ. 66). ვინაიდან წრიულად მოძრავე სხეულს აქვს ცენტრისაკენ მიმართული აჩქარება $\frac{v^2}{R}$, მასზე უნდა მოქმედებდეს

ცენტრისკენული ძალა $\frac{mv^2}{R}$, გამომწვეული ზამბარის გაჭიმვით. ნიუ-

ტონის მესამე კანონის თანახმად ზამბარაზედაც უნდა მოქმედებდეს საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა. ეს ძალა ზამბარის ვაჭიმვის საშუალებით გადაეცემა ცენტრს და ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ, თუ უძრავი ცენტრი $\frac{mv^2}{R}$ ძალით მოქმედებს სხეულზე. ეს უკანასკნელიც ზამბარის საშუალებით იმოქმედებს ცენტრზე ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით.



ნახ. 65.



ნახ. 66.

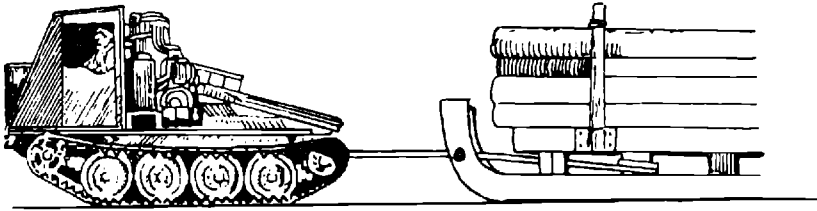
როდესაც ჩვენ მალა ვწვეთ რაიმე სხეულს გარკვეული აჩქარებით, ეს იმას ნიშნავს, რომ მასზე ვმოქმედებთ ვერტიკალურად ზევით მიმართული ძალით; ასეთივე სიდიდის, მაგრამ საწინააღმდეგო ძალით ეს სხეული მოქმედებს ჩვენზე; ასევე ხდება თოფის გასროლის დროს. რა ძალითაც თოფი დენტის გაზების საშუალებით მოქმედებს ტყვიანზე, ისეთივე მხოლოდ საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით ტყვია, ისევე დენტის გაზების საშუალებით, მოქმედებს თოფზე, რაც იწვევს თოფის უკუცემას (ნახ. 67).



ნახ. 67.

ნიუტონის კანონის გამოყენების უფრო რთულ მაგალითს წარმოადგენს საწვერისა და მარხილის მოძრაობა დედამიწის ზედაპირზე. ცხადია, რა ძალითაც საწვეარი სწევს მარხილს, ისეთივე, მხოლოდ საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით: მარხილი ეწვევა საწვეარს (ნახ. 68). მაგრამ ისმის კითხვა, რატომ მოძრაობენ ორივენი საწვეარის წვევის მიმართულებით და არა საწინააღმდეგოდ? საქმე იმაშია,

რომ ჩვენ გვავიწყდება მესამე სხეული, დედამიწა, რომელიც იღებს მონაწილეობას ურთიერთქმედებაში ხახუნის ძალის საშუალებით. საწვეარი მოქმედებს დედამიწაზე გარკვეული ხახუნის ძალით, რომელიც მიმართულია საწვეარის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით დედამიწა მოქმედებს საწვეარზე. მარხილიც მოქმედებს დედამიწაზე სხვა სიდიდის ხახუნის ძალით და დედამიწაც შებრუნებით მოქმედებს მარხილზე ტოლი



ნახ. 68.

და საწინააღმდეგო ძალით. როგორც ვხედავთ, საწვეარისა და მარხილისაგან შემდგარ სისტემაზე მოქმედებს ოთხი ძალა, რომელთა ჯამი არ არის ნულის ტოლი. სწორედ ამ ძალას მოჰყავს მოძრაობაში საწვეარი და ეტლი. საწინააღმდეგოდ მიმართული და ტოლი ძალა მოქმედებს დედამიწაზე, რომელმაც უნდა იმოძრაოს საწინააღმდეგო მიმართულებით შესაფერისი აჩქარებით.

§ 30. მოძრაობის განტოლებები მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის. გეგმი და თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი

განვიხილოთ მრავალი, მაგალითად n , ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა. ავარჩიოთ მისი რომელიმე k -ური ნაწილაკი და განვსაზღვროთ მასზე მოქმედი \vec{F}_k ძალა. ცხადია, რომ ეს ძალა გამოწვეულ იქნება როგორც თვით განსახილველი სისტემის სხვა ნაწილაკებით, ისე გარეშე სხეულებით, ამიტომაც ყოველ ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ძალის ჯამის სახით:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

სადაც \vec{F}_k^i არის ძალა, რომლითაც სისტემის სხვა ნაწილაკები მოქმედებენ k -ურ ნაწილაკზე. მას ეწოდება შიგა ძალა. \vec{F}_k^e არის იმავე ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, მაგრამ გამოწვეული გარეშე სხეულებით. მას გარე ძალა ეწოდება. წინა პარაგრაფში გამოყვა-

ნილი მოძრაობის განტოლების თანახმად, ნაწილაკის მასისა და აჩქარების ნამრავლი ტოლი უნდა იყოს მოქმედი ძალისა

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI},17)$$

ჩვენ მივიღებთ მოძრაობის იმდენ ვექტორულ განტოლებას, რამდენი ნაწილაკისაგანაც შედგება სისტემა (სკალარულ განტოლებათა რიცხვი სამჯერ მეტი იქნება). მათი ამოხსნისა და საწყისი პირობების გამოყენებით ვიპოვით ყოველი ნაწილაკის მოძრაობას. მაგრამ ძალიან ხშირად, განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვი დიდია, საინტერესოა არა ყოველი ცალკეული ნაწილაკის, არამედ სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის გამოჩვენება. მაგალითად, როდესაც ვსვამთ საკითხს ავტომანქანის, თვითმფრინავის, მთვარის ან სხვა ციური მნათობების და სხვა სხეულების მოძრაობის შესახებ, ჩვენ მრავალ შემთხვევაში არ გვინტერესებს მათი ცალკეული ნაწილაკების მოძრაობა, ჩვენ გვსურს ვიცოდეთ მათი, როგორც მთლიანი სხეულის, მოძრაობა.

იმპულსის მუდმივობის კანონის განხილვისას უკვე შემოვიღეთ ინერციის, ანუ მასების, ცენტრის ცნება. ინერციის ცენტრი ჩვენ განვსაზღვრეთ როგორც ისეთი წერტილი, რომლის რადიუს-ვექტორი მიიღება ცალკეული ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებიდან შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

იქვე ჩვენ დავადგინეთ, რომ თუ სისტემის მთელ მასას მოვათავსებთ ინერციის ცენტრში, მისი იმპულსი ტოლი იქნება მთელი სისტემის იმპულსისა

$$M \vec{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k. \quad (\text{VI},18)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ იმპულსის სადიდის თვალსაზრისით სისტემა შეიძლება შევცვალოთ ინერციის ცენტრში მოთავსებული ერთი ნაწილაკით, რომლის მასა სისტემის მასის ტოლია. აქედან ბუნებრივად გამომდინარეობს, რომ სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის განხილვა ნიშნავს მისი ინერციის ცენტრის მოძრაობის

ჯანხილვას, ამიტომაც თავისთავად ისმის საკითხი ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლების შესახებ. გავაწარმოოთ (VI,18) განტოლება დროის მიმართ, მივიღებთ

$$M \vec{a}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{a}_k, \quad (\text{VI},19)$$

სადაც \vec{a}_c არის ინერციის ცენტრის აჩქარება. (VI,17) განტოლების გამოყენება მოგვცემს

$$M \vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n F_k^e,$$

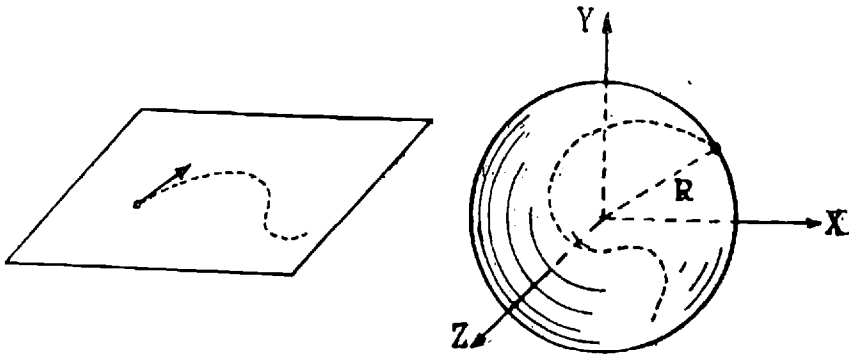
მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ სისტემაში მოქმედი შიგა ძალების ჯამი ნულის ტოლია (განზოგადებული ნიუტონის მესამე კანონი), ამიტომ ინერციის ცენტრის მოძრაობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$M \vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (\text{VI},20)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ინერციის ცენტრი მოძრაობს როგორც ნივთიერი წერტილი, რომლის მასა სისტემის მთელი მასის ტოლია და რომელზედაც მოდებულია ყველა გარე ძალის ჯამი. შიგა ძალები არაავითარ გავლენას არ ახდენენ ინერციის ცენტრის მოძრაობაზე. ცხადია, რომ, თუ სისტემა იზოლირებულია, ე. ი. მასზე არაავითარი გარე ძალები არ მოქმედებენ, ინერციის ცენტრი იმოძრაავებს მუდმივი სიჩქარით: ეს შედეგი ჩვენ წინათაც გვქონდა მიღებული. ინერციის ცენტრის მნიშვნელობა კიდევ იმაშია, რომ იგი შეიძლება არჩეულ იქნეს ახალი ინერციული სისტემის სათავედ. ვინაიდან იზოლირებული სისტემის ინერციის ცენტრი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, მისი სათანადო ათვლის სისტემა აგრეთვე ინერციული სისტემა იქნება; ამ ათვლის სისტემას ეწოდება ინერციის ცენტრის ათვლის სისტემა, ანუ C სისტემა. მისი უპირატესობა სხვა ინერციულ სისტემებთან შედარებით იმაშია, რომ მის მიმართ განსახილველი მექანიკური სისტემის სრული იმპულსი ნულის ტოლია; ეს გარემოება მნიშვნელოვნად აადვილებს მოძრაობის შესწავლას.

შემოვიღოთ ახლა ფრიად მნიშვნელოვანი ცნებები თავისუფლების ხარისხთა რიცხვისა და ბმებისა. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ სივრცეში მოძრავი ნაწილაკის მოძრაობის განსაზღვრისათვის საჭიროა სამი კოორდინატის, როგორც დროის ფუნქციების, განსაზღვრა;

ეს იმას ნიშნავს, რომ თავისუფალ ნივთიერ წერტილს შეუძლია შეასრულოს სამი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი მოძრაობა. ამიტომაც ამბობენ, რომ თავისუფალ ნივთიერ წერტილს აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი. წარმოვიდგინოთ რომ ნაწილაკი იძულებულია იმოძრაოს გარკვეული ფორმისა და მდებარეობის ზედაპირზე, მაგალითად, სიბრტყეზე, ან სფეროზე. ამ ზედაპირზე მოძრაობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ორი კოორდინატი. თუ, მაგალითად, წერტილი იძულებულია იმოძრაოს R -რადიუსიან სფეროზე (ნახ. 69) ცენტრით კოორდინატთა სათავეში,



ნახ. 69.

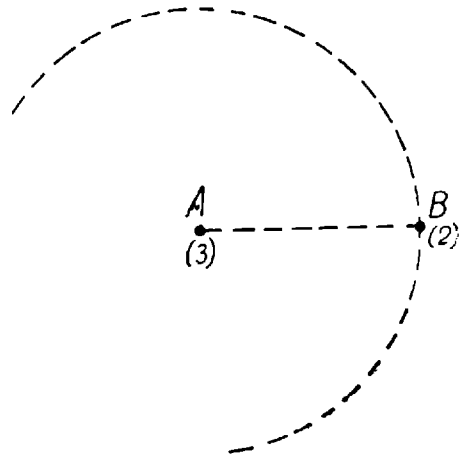
მისი სივრცული კოორდინატები დაკავშირებული უნდა იყოს განტოლებით:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (A)$$

რომელიც საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ერთ-ერთი მათგანი, თუ ცნობილია ორი დანარჩენი; ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია მხოლოდ ორი კოორდინატი. ამიტომაც შეიძლება ვთქვათ, რომ ზედაპირზე მოძრაე ნივთიერ წერტილს აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ცხადია, ნებისმიერ წერტილზე მოძრაე ნივთიერ წერტილს ექნება ერთი თავისუფლების ხარისხი. თუ ნივთიერი წერტილის მოძრაობა შეზღუდულია რაიმე პირობით, რომელიც ამცირებს დამოუკიდებელ მოძრაობათა რაოდენობას, ამბობენ, რომ ნივთიერი წერტილი ემორჩილება ბმებს, ხოლო თვით განტოლებას ეწოდება ბმის განტოლება (მაგალითად, (A) განტოლება).

განვიხილოთ რამდენიმე ნივთიერი წერტილის შემთხვევა. თუ სისტემა შედგება ორი ნივთიერი წერტილისაგან და მათ შეუძლიათ თავისუფლად მოძრაობა სივრცეში, ცხადია, რომ სისტემას ექნება

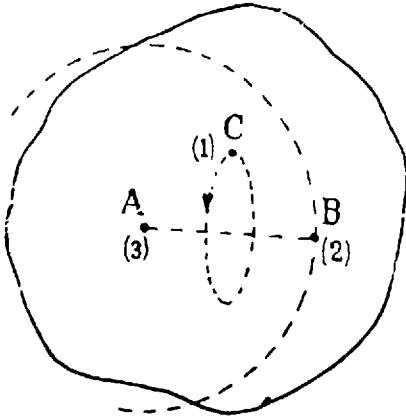
ა თავისუფლების ხარისხი (ყოველ წერტილს სამი ხარისხი). მაგ-
 რამ შეიძლება ეს წერტილები ისე იყოს დაკავშირებული ერთმა-
 ნეთთან, რომ მანძილი მათ შორის არ იცვლებოდეს. გამოვარკ-
 ვიოთ რამდენი თავისუფლების ხარისხი აქვს ასეთ სისტემას. ერთ
 ნივთიერ წერტილს აქვს 3 თავისუფლების ხარისხი. დავამაგროთ
 ახლა ეს წერტილი და ვნახოთ როგორი მოძრაობის შესრულება
 შეუძლია მეორე წერტილს. ვინაიდან წერტილებს შორის მანძილი
 არ იცვლება, მეორე წერტილს შეუძლია მოძრაობა უცვლელი რა-
 დიუსის მქონე სფეროზე, რომელიც შემოწერილია პირველი წერ-
 ტილის ირგვლივ (ნახ. 70). ამიტომ მას ექნება მხოლოდ ორი თავ-
 ვისუფლების ხარისხი და, მაშასა-
 დამე, უცვლელ მანძილზე მდებარე
 ორი წერტილის თავისუფლე-
 ბის ხარისხთა რიცხვი იქნება 5.
 ასევე შეიძლება გაირკვეს თავი-
 სუფლების ხარისხთა რიცხვი ყვე-
 ლა სხვა შემთხვევაში. ზოგადი
 წესი ასეთია: თუ სისტემა შედგე-
 ბა n ნაწილაკისაგან, მათი სრუ-
 ლიად თავისუფალი მოძრაობის
 დროს საერთო თავისუფლების ხა-
 რისხთა რიცხვი იქნება $3n$. მაგ-
 რამ შეიძლება ამ წერტილებს შო-
 რის არსებობდეს ბმები, ე. ი. შე-
 იძლება კოორდინატები დაკავში-
 რებული იყოს ბმების განტოლებებით. ყოველი ბმის განტოლება
 ამცირებს თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს ერთით და ამიტომ,
 თუ სისტემა ემორჩილება r ბმას, დამოუკიდებელ მოძრაობათა
 რიცხვი, რომელიც შეიძლება შეასრულოს სისტემამ, ე. ი. თავი-
 სუფლების ხარისხთა რიცხვი იქნება $3n - r$.



ნახ. 70.

გამოვარკვიოთ რამდენი თავისუფლების ხარისხი აქვს მყარ სხე-
 ულს, ე. ი. ნივთიერი წერტილების ისეთ სისტემას, რომლის წერ-
 ტილებს შორის მანძილები უცვლელია. ვთქვათ, მყარ სხეულს შეუძ-
 ლია თავისუფალი მოძრაობა სივრცეში და ავირჩიოთ მისი ერთ-
 ერთი წერტილი. ცხადია, მას ექნება სამი თავისუფლების ხარისხი.
 დავამაგროთ ეს წერტილი, მაშინ მყარი სხეულის სხვა რომელიმე
 წერტილს შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ სფეროზე, რომელიც შემოწე-
 რილია პირველი წერტილის ირგვლივ, ამიტომ მას ექნება 2 თავი-
 სუფლების ხარისხი. დავამაგროთ ახლა ეს მეორე წერტილიც.

ცხადია, მყარი სხეულის მესამე წერტილს, რომელიც არ მდებარეობს პირველ ორ წერტილზე გავლებულ წრფეზე, შეუძლია მოძრაობა მხოლოდ წრეხაზზე, რომლის ცენტრი მდებარეობს ამ წრფეზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ მას აქვს 1 თავისუფლების ხარისხი (ნახ. 71). თუ ეს წერტილიც დავამაგრეთ, მყარი სხეულის არც ერთ წერტილს არ შეეძლება მოძრაობა. აქედან ცხადია, რომ თავისუფალ მყარ სხეულს აქვს 6 თავისუფლების ხარისხი (3 გადატანითი და 3 ბრუნვითი). თუ მყარი სხეული იძულებულია იმოძრაოს ისე, რომ მისი ერთი წერტილი იყოს უძრავი (ბრუნვა წერტილის ირგვლივ), 3 გადატანითი თავისუფლების ხარისხი მოიხიბება და მას ექნება მხოლოდ 3 ბრუნვითი



ნახ. 71.

ხარისხი. ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის შემთხვევაში დარჩება მხოლოდ ერთი ბრუნვითი თავისუფლების ხარისხი ამ ღერძის ირგვლივ.

§ 31. უნიფორმული მოძრაობის კანონების შესახებ

არსებობს სხვადასხვა გზა მოძრაობის კანონების ჩამოყალიბებისა. რომელი გზაც არ უნდა ავარჩიოთ, ჩვენ ყოველთვის საქმე გვექნება, ერთი მხრივ, სხვადასხვა მექანიკური სიდიდის განსაზღვრებთან, ხოლო, მეორე მხრივ, ცდებით დადგენილ დამოკიდებულებებთან (კანონებთან). გარჩევა განსაზღვრასა და კანონს შორის არსებული განსხვავებისა აუცილებლად საჭიროა, მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ ნაწილობრივ თავისუფალი ვართ მათ არჩევაში. ხშირია შემთხვევა, როდესაც ახალი ფიზიკური სიდიდე განისაზღვრება კანონის დადგენასთან ერთად, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც საჭიროა კარგად გავერკვეთ იმაში, თუ საბოლოოდ ჩამოყალიბებული დამოკიდებულების რომელი ნაწილი წარმოადგენს განსაზღვრას და რომელი — კანონს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ მოძრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონი; ამ კანონში შემავალი ცნება ნაწილაკის სიჩქარისა უკვე ცნობილია ჩვენთვის. იგი განისაზღვრება როგორც რა-

დიუს-ვექტორის წარმოებული დროის მიმართ. ურთიერთქმედ ნაწილაკთა მოძრაობის განხილვის შედეგად იმ დასკვნამდე მივდივართ, რომ ნაწილაკთა აჩქარებები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული (ცდის შედეგი). შემდგომი დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ აჩქარებათა შეფარდება მუდმივი სიდიდეა, სრულიად დამოუკიდებელი დროისაგან, ურთიერთქმედების ხასიათისა და გარეშე პირობებისაგან (ცდის შედეგი); ამ შედეგზე დამყარებით ჩვენ შემოვიტანეთ მასის ცნება, სახელდობრ, ნაწილაკთა მასები განვსაზღვრეთ როგორც აჩქარებების უკუპროპორციული სიდიდეები (განსაზღვრა).

განვიხილოთ მეორე მაგალითი—ენერგიის მუდმივობის კანონი. კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება როგორც ნაწილაკის მასისა და სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარი. ცდები გვიჩვენებენ, რომ თუმცა ურთიერთქმედ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამი არ არის მუდმივი, მაგრამ ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს ნაწილაკთა შორის მანძილების ისეთი ფუნქცია, რომ მისი და კინეტიკური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდე იყოს (კანონი). მანძილის ამ ფუნქციას ეწოდება პოტენციალური ენერგია (განსაზღვრა).

განვიხილოთ ამ თვალსაზრისით მოძრაობის კანონები, კერძოდ, ნიუტონის მეორე კანონი. კინემატიკური განხილვიდან ჩვენ ვიცით, თუ რა არის აჩქარება. მოძრაობის რაოდენობის კანონის განხილვისას ჩვენ შემოვიღეთ მასის ცნება. საჭიროა ახლა გავარჩიოთ ძალის ცნება. თუ ჩვენ, როგორც ეს ჩვეულებრივად ხდება, ძალას განვსაზღვრავთ როგორც მასის ნამრავლს აჩქარებაზე, მაშინ ეს დამოკიდებულება, გამოსახული ფორმულით

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{VI}, 21)$$

იქნება ძალის განსაზღვრა და არა კანონი. იმისათვის, რომ ეს ფორმულა გამოხატავდეს კანონს (ნიუტონის მეორე კანონს), საჭიროა მივცეთ ძალას მასისა და აჩქარებისაგან დამოუკიდებელი განსაზღვრა. ჩვენ სწორედ ასე მოვიქეცით. სახელდობრ, ჩვენ განვსაზღვრეთ ძალა, როგორც პოტენციალური ენერგიის წარმოებული კოორდინატის მიმართ, აღებული უარყოფითი ნიშნით, ე. ი., უფრო მარტივად, როგორც პოტენციალური ენერგიის შემცირება მანძილის ერთეულით გადანაცვლების დროს. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად განსაზღვრული სიდიდეები: აჩქარება, მასა და ძალა. ამის შემდეგ ან უშუალოდ ცდის სა-

შუალებით, ან, როგორც ჩვენ მოვიქცეთ, სხვა კანონებზე დამყარებით გამოგვყავს ნიუტონის მეორე კანონი.

შეიძლება, რასაკვირველია, მოვიქცეთ სხვანაირადაც. შეიძლება ძალა განესაზღვროთ როგორც მასის ნამრავლი აჩქარებაზე, მაგრამ მაშინ (VI,21) ფორმულა იძნება ძალის განსაზღვრელი ფორმულა და არა კანონი, და მას არ შეიძლება ვუწოდოთ მოძრაობის კანონი. ამ შემთხვევაში ენერჯიის მულტიპლიკაციის კანონის და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით გამოიყვანება კავშირი ძალასა და პოტენციალურ ენერჯიას შორის, სწორედ ეს დამოკიდებულება იქნება მოძრაობის კანონი. მაგრამ ცხადია, რომ რომელი გზაც არ უნდა ავირჩიოთ, საბოლოოდ საჭიროა დამყარდეს კავშირი მოძრაობასა და ურთიერთქმედებას შორის. მოძრაობის დამახასიათებელი ელემენტებია: სიჩქარე, აჩქარება, მოძრაობის რაოდენობა და ა. შ., ხოლო ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ნაწილაკთა კონფიგურაციაზე და ხასიათდება პოტენციალური ენერჯიით. საკითხი ისმის ძალის ცნების შესახებ. რისი დამახასიათებელია ძალა—მოძრაობისა თუ ურთიერთქმედებისა?

თუ ძალა განესაზღვრეთ როგორც მასისა და აჩქარების ნამრავლი, გამოვა, რომ იგი არის მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდე და მაშინ მოძრაობის კანონი უნდა გამოხატავდეს მის კავშირს ურთიერთქმედებასთან, ე. ი. პოტენციალურ ენერჯიასთან

$$\underbrace{F_x = ma_x}_{\text{განსაზღვრა}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{კანონი}}$$

მეორე მხრივ, თუ ძალა მიღებულ იქნა (განსაზღვრის მიხედვით) ურთიერთქმედების დამახასიათებელ ელემენტად, ე. ი. იგი განიშარტა როგორც პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული კოორდინატით, მოძრაობის კანონმა უნდა დააკავშიროს იგი მოძრაობის ელემენტთან, ე. ი. აჩქარებასთან

$$ma_x = \underbrace{F_x}_{\text{განსაზღვრა}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{კანონი}}$$

ასეთივე მდგომარეობაა ნიუტონის მესამე კანონის შემთხვევაში; თუ ძალა განესაზღვრეთ როგორც პოტენციალური ენერჯიის უარყოფი-

თი გრადიენტი. ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობა უშუალოდ მიიღება იმ პირობიდან, რომ პოტენციალური ენერჯია მხოლოდ ნაწილის ფუნქციაა

$$\vec{F}_1 = - \frac{\partial U(r_1 - r_2)}{\partial r_1} = \frac{\partial U(r_1 - r_2)}{\partial r_2} = - \vec{F}_2.$$

ამ შემთხვევაში არ არის საჭირო ამ კანონის გამოყვანა იმპულსის მუდმივობის კანონიდან. თუმცა კავშირი ამ კანონებს შორის მყარდება ნიუტონის მეორე კანონის საშუალებით. მეორე მხრივ, ძალა შეიძლება განისაზღვროს როგორც ნაწილის ნამრაველი აჩქარებაზე და მაშინ ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობის კანონი იქნება იგივე იმპულსის კანონი, მხოლოდ გამოხატული სხვა ცნებებით.

**§ 32. გარდაიქმნედი და ინვარიანტული სიდიდეები.
შეჯანსიის კანონების ინვარიანტულობა
გალილეის გარდაქმნების მიხედვით**

მესამე თავში ჩვენ უკვე შევხვით საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება მექანიკური სიდიდეები ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ჩვენ გამოვარკვეეთ სიგრძისა და დროის აბსოლუტურობაზე დამყარებით, რომ ზემოაღნიშნული გადასვლა ხდება შემდეგი ფორმულის თანახმად:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{VI,22}$$

სადაც \vec{r} და t არიან რადიუს-ვექტორი და დრო S ინერციულ სისტემაში, ხოლო \vec{r}' და t' — იგივე სიდიდეები S' სისტემაში. \vec{V} არის სიჩქარე, რომლითაც S' სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ. ამ ფორმულებიდან გამომდინარეობს სიჩქარეების შეკრების კანონი

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \tag{VI,23}$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ გარდაიქმნება ნაწილაკის სიჩქარე გალილეის გარდაქმნების დროს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და სიჩქარე იცვლება, დრო კი არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მიუხედავად რადიუს ვექტორის, ე. ი. კოორდინატების სხვადასხვაობისა სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში, ნაწილაკთა შორის მანძილი ერთი და იგივე იქნება. მართლაც, ვთქვათ, ნაწილაკების რადიუს-ვექტორები S სისტემაში არის

\vec{r}_1 და \vec{r}_2 , ხოლო S' სისტემაში — \vec{r}'_1 და \vec{r}'_2 . მაშინ (VI,22) ფორმულების თანახმად

$$\begin{aligned}\vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{V}t, \\ \vec{r}'_2 &= \vec{r}_2 - \vec{V}t,\end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (\text{VI},24)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთი წერტილიდან მეორე წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი არ იცვლება გალილეის გარდაქმნების დროს. ცხადია, რომ არ შეიცვლება მისი სკალარული მნიშვნელობაც, ე. ი. წერტილებს შორის მანძილი. ჩვენთვის უკვე ცნობილია აგრეთვე, რომ აჩქარებაც არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. გამოვარკვეოთ ახლა იმპულსის (მოდრაობის რაოდენობის) და კინეტიკური ენერგიის გარდაქმნის ხასიათი. თუ ნაწილაკის იმპულსი S სისტემის მიმართ არის $m\vec{v}$, ახალი სისტემის მიმართ იგი შემდეგი ფორმულით იქნება გამოსახული:

$$m\vec{v}' = m\vec{v} - m\vec{V}, \quad (\text{VI},25)$$

ასევე მივიღებთ კინეტიკური ენერგიის გარდაქმნის ფორმულას

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - m\vec{v} \cdot \vec{V} + \frac{mV^2}{2}. \quad (\text{VI},26)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ როგორც იმპულსი, ისე კინეტიკური ენერგია იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ცხადია, რომ პოტენციალური ენერგია არ უნდა იცვლებოდეს გალილეის გარდაქმნების დროს (ვინაიდან იგი არის წერტილთა შორის მანძილის ფუნქცია და მანძილი კი, როგორც ვიცით, არ იცვლება აღნიშნული გარდაქმნის დროს)

$$U'(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (\text{VI},27)$$

ეს შედეგი, თავის მხრივ, გვიჩვენებს, რომ ძალაც არ შეიცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს.

როგორც ვხედავთ, მექანიკური სიდიდეები სხვადასხვანაირად იქცევიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ზოგი მათგანი არ იცვლება, ზოგი კი იცვლება. ვუწოდოთ სიდიდეებს, რომლებიც არ იცვლებიან გალილეის გარდაქმნების დროს, ინვარიანტული სიდიდეები. ზოგჯერ მათ აბსოლუტურ სიდიდეებს უწოდებენ. სიდიდეებს კი, რომლებსაც სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვთ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში, ეწოდებათ ვარიანტული ინვარიანტობი-

თი სიდიდეები. ინვარიანტული სიდიდეებია—დრო, მანძილი, აჩქარება, პოტენციალური ენერგია და ძალა. ვარიანტული სიდიდეებია—რადიუს-ვექტორი, სიჩქარე, იმპულსი და კინეტიკური ენერგია.

მესამე თავში ჩვენ ჩამოვყალიბეთ კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი, რომლის თანახმად მექანიკური მოვლენები ერთნაირად მიმდინარეობენ სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში და რომ ამ მოვლენების კანონები არ უნდა იცვლებოდნენ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. ვუჩვენეთ ახლა, რომ ჩვენ მიერ ჩამოყალიბებული მექანიკის კანონები (იმპულსის მუდმივობის, ენერგიის მუდმივობის, ნიუტონის მეორე და მესამე კანონები) ინვარიანტული არიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ. განვიხილოთ ჯერ იმპულსის მუდმივობის კანონი. ვთქვათ, S სისტემაში მას აქვს შემდეგი სახე:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const} \quad (\text{VI}, 28)$$

(განიხილება ორი ნაწილაკის შემთხვევა).

S' ინერციულ სისტემაზე გადასვლისათვის გამოვიყენოთ (VI,23) ფორმულა, მივიღებთ

$$m_1(\vec{v}_1' + \vec{V}) + m_2(\vec{v}_2' + \vec{V}) = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' + (m_1 + m_2) \vec{V} = \text{const.}$$

ვინაიდან როგორც $m_1 + m_2$, ისე \vec{V} მუდმივი სიდიდეებია, დავასკვნით, რომ

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = \text{const.} \quad (\text{VI}, 29)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ იმპულსის კანონს ისეთივე სახე აქვს ახალ სისტემაში, როგორიც ძველში, ე. ი. იგი ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ [რასაკვირველია (VI,28) ფორმულის მუდმივა განსხვავდება (VI,29) ფორმულის მუდმივისაგან]. ანალოგიურად განვიხილოთ ენერგიის მუდმივობის კანონი. S სისტემაში მას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \text{const.}$$

(VI,26) და (VI,27) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2'^2}{2} + (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \vec{V} - \frac{m_1 V^2}{2} - \frac{m_2 V^2}{2} + \\ + U'(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \text{const.} \end{aligned} \quad (\text{VI}, 30)$$

რადგანაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$ მუდმივი სიდიდეა, ეს ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ასე:

$$\frac{m_1 \vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2'^2}{2} + U'(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') = \text{const}, \quad (\text{VI}, 31)$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ენერგიის მუდმივობის კანონიც ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. მივაქციოთ ყურადღება ერთ გარემოებას. ვთქვათ, ჩვენ დადგენილი გვაქვს ენერგიის მუდმივობის კანონი, ხოლო იმპულსის მუდმივობის კანონი კა ცნობილი არ არის. თუ ჩვენ მოვითხოვთ, რომ ენერგიის მუდმივობის კანონი ინვარიანტული იყოს გალილეის გარდაქმნების მიმართ, ე. ი. მოვითხოვთ, რომ მართებული იყოს (VI,31) ფორმულა, მაშინ (VI,30) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$ სიდიდეც მუდმივი უნდა იყოს. მაშასადამე, ენერგიის მუდმივობის კანონიდან და ფარდობითობის პრინციპიდან ჩვენ შეგვიძლია თეორიულად გამოვიყვანოთ იმპულსის მუდმივობის კანონი.

განვიხილოთ ახლა მექანიკის ძირითადი განტოლება (ნიუტონის მეორე კანონი)

$$m \vec{a} = \vec{F}.$$

ვინაიდან არც აჩქარება და არც ძალა არ იცვლება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, S' სისტემაში ამ განტოლებას ისეთივე სახე ექნება როგორც S სისტემაში

$$m \vec{a}' = \vec{F}',$$

ე. ი. ნიუტონის მეორე კანონი ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ცხადია, რომ ასევე ინვარიანტული იქნება ნიუტონის მესამე კანონი; თუ S სისტემაში

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1,$$

S' სისტემაში გვექნება

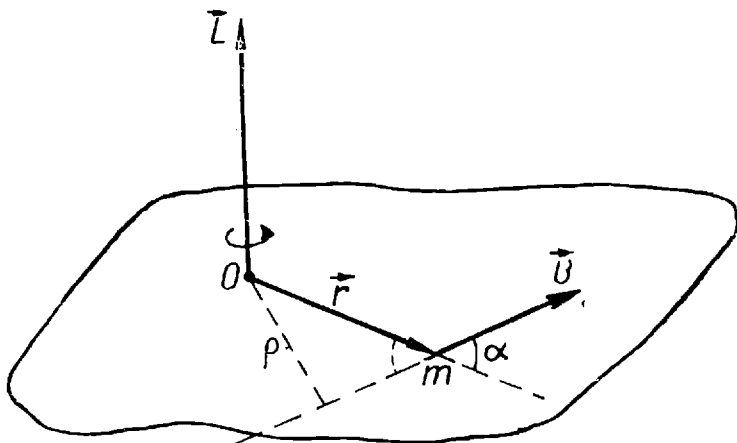
$$\vec{F}_2' = -\vec{F}_1'.$$

მიღებული შედეგები ნათლად გვიჩვენებენ, რომ მექანიკის კანონები არ იცვლიან სახეს ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს მიუხედავად იმისა, რომ მათში შემავალ სიდიდეებს შეიძლება სხვადასხვა მნიშვნელობა ჰქონდეთ სხვადასხვა სისტემაში. ეს შედეგი სავსებით ეთანხმება გალილეისა და ნიუტონის ფარდობითობის პრინციპს. ყოველივე ეს მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორე აგრეთვე ინერციულ სისტემაზე გადავდივართ. სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ინერციული სისტემიდან არაინერციულ სისტემაზე გადავალთ. ამ შემთხვევაში მექანიკის კანონები ინვარიანტული აღარ იქნება. საკითხს იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება მექანიკის კანონები არაინერციულ სისტემაზე გადასვლისას, გავარჩევთ მათე თავში.

იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი

§ 33. იმპულსის მომენტი

გარდა იმპულსისა და ენერჯიის მუდმივობის კანონებისა, ფიზიკაში დიდ როლს ასრულებს ე. წ. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი. ჯერ განვმარტოთ რა სიდიდეს ეწოდება იმპულსის მომენტი. განვიხილოთ ნივთიერი წერტილი, რომლის მასა არის m და სიჩქარე \vec{v} . ვთქვათ, აღებულ მომენტში მისი მდებარეობა რაიმე ათვლის სისტემის მიმართ განისაზღვრება \vec{r} რადიუს-ვექტორით (ნახ. 72). ამ წერტილის იმპულსის მომენტი O სათავეს მიმართ



ნახ. 72.

განისაზღვრება როგორც რადიუს-ვექტორის ვექტორული ნამრავლი იმპულსზე. თუ იმპულსის მომენტს \vec{L} -ით აღვნიშნავთ, გვექნება

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = m[\vec{r} \cdot \vec{v}]. \quad (\text{VII}, 1)$$

როგორც ეს ფორმულა გვიჩვენებს, იმპულსის მომენტი წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც \vec{r} და \vec{v} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის

მართობია და მოგეზულია ისე, რომ \vec{r} , $m\vec{v}$ და \vec{L} ვექტორები შეადგენენ მარჯვენა სისტემას. მეორენაირად \vec{L} ვექტორის მიმართულება ასე შეიძლება განისაზღვროს: \vec{L} ვექტორი ისე უნდა იყოს მიმართული, რომ, თუ მის გასწვრივ გავჩერდებით და \vec{r} და \vec{v} ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეს დავხედავთ, წერტილის მოძრაობა საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით უნდა წარმოებდეს. იმპულსის მომენტის სიდიდე შემდეგი სკალარული ფორმულით გამოისახება:

$$L = mrv \sin \alpha = mv \cdot \rho, \quad (\text{VII}, 2)$$

სადაც α არის კუთხე \vec{r} და \vec{v} ვექტორებს შორის, ხოლო ρ —სიგრძე მართობისა, რომელიც O წერტილიდან სიჩქარის მიმართულებაზე დაშვებული. იმპულსის მომენტის განსაზღვრა გვიჩვენებს, რომ იგი დამოკიდებულია არა მარტო ნაწილაკის იმპულსზე, არამედ იმ წერტილის (სათავის) არჩევაზედაც, რომლის მიმართაც იგი განისაზღვრება.

იმპულსის მომენტის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე ხშირად ეწოდებათ აგრეთვე იმპულსის მომენტები სათანადო ღერძების მიმართ; მაგალითად, იმპულსის მომენტი Ox ღერძის მიმართ იქნება:

$$L_x = m(yv_z - zv_y), \quad (\text{VII}, 3)$$

ანალოგიურად გამოისახება L_y და L_z .

რამდენიმე ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის იმპულსის მომენტი განისაზღვრება როგორც ჯამი ცალკეული ნაწილაკების იმპულსების მომენტებისა

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i]. \quad (\text{VII}, 4)$$

§ 34. ძალის მომენტი

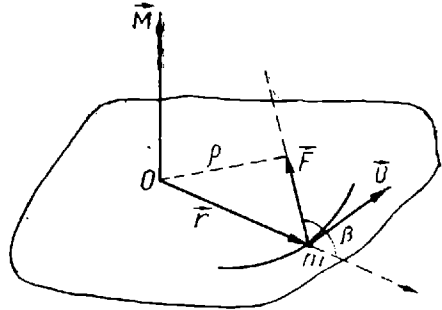
იმპულსის მომენტის ანალოგიურად განისაზღვრება აგრეთვე ძალის მომენტი. ვთქვათ, რაიმე ნაწილაკზე, რომლის რადიუს-ვექტორი O სათავის მიმართ არის \vec{r} , მოქმედებს \vec{F} ძალა (ნახ. 73). მაშინ ძალის მომენტი O სათავის მიმართ განისაზღვრება როგორც \vec{r} რადიუს-ვექტორის ვექტორული ნამრავლი \vec{F} ძალაზე. თუ ძალის მომენტს \vec{M} -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII}, 5)$$

სკალარულად ეს ფორმულა ასე დაიწერება:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \beta = \rho F, \quad (\text{VII}, 6)$$

სადაც β არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და ძალას შორის, ხოლო ρ —სიგრძე მართობისა, რომელიც O სათავიდან ძალის მოქმედების მიმართულდება დაშვებული. ρ სიდიდეს ძალის მხარი ეწოდება. ისევე როგორც იმპულსის მომენტის შემთხვევაში, ძალის მომენტის გეგმილები ღერძებზე— M_x , M_y და M_z წარმოადგენენ ძალის მომენტებს სათანადო ღერძების მიმართ. ამ შემთხვევაშიც ძალის მომენტი, გარდა ძალისა, დამოკიდებულია იმ წერტილის შერჩევაზე, რომლის მიმართაც გამოითვლება მომენტი. ძალის მომენტი მართობია ძალაზე და რადიუს-ვექტორზე გამავალი სიბრტყისა და, ანალოგიურად იმპულსის მომენტისა, მიმართულია მარჯვენა ბურღის წესის მიხედვით.



ნახ. 73.

მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაში მოქმედი ძალების საერთო მომენტი მიიღება ცალკეულ ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების მომენტების შეკრებით

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i], \quad (\text{VII}, 7)$$

სადაც \vec{r}_i და \vec{F}_i არის i -ური ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი და მასზე მოქმედი ძალა.

§ 35. მომენტების განტოლება

დავამტკიცოთ, რომ იმპულსის მომენტსა და ძალის მომენტს შორის გარკვეული კავშირი არსებობს. ასეთი კავშირის არსებობა, იქიდანაც ჩანს, რომ მოძრაობის განტოლების თანახმად არსებობს კავშირი იმპულსსა და ძალას შორის. მართლაც, ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად იმპულსის წარმოებული დროის მიმართ ძალის ტოლია:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (\text{VII},8)$$

გავამრავლოთ ვექტორულად ამ ტოლობის ორივე მხარე ნაწილაკის რადიუს-ვექტორზე, მივიღებთ

$$\left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \right] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII},9)$$

გარდავქმნათ მარცხენა მხარეში მდგომი გამოსახულება. ამისათვის განვიხილოთ იმპულსის მომენტის წარმოებულ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}].$$

გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{v} \cdot m\vec{v}] + [\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} (m\vec{v})],$$

ვინაიდან პირველი წევრი ნულის ტოლია (იგი წარმოადგენს პარალელური ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს), ამიტომ ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = \left[\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \right]. \quad (\text{VII},10)$$

როგორც ვხედავთ, (VII,10) ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს იმპულსის მომენტის წარმოებულს და ამიტომ ეს ტოლობა შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m\vec{v}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{VII},11)$$

მარცხენა მხარე არის იმპულსის მომენტის წარმოებულნი, ხოლო მარჯვენა—ძალის მომენტი. მაშასადამე, ვღებულობთ ასეთ შედეგს: ნაწილაკის იმპულსის მომენტის წარმოებულნი დროით ძალის მომენტის ტოლია

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{VII},12)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ იმპულსის მომენტსა და ძალის მომენტს შორის ისეთივე კავშირია, როგორც თვით იმპულსსა და ძალას შორის.

ცხადია, რომ ასეთივე შედეგს მივიღებთ მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის, ვინაიდან მთელი სისტემის იმპულ-

სის მომენტი და ძალის მომენტი ცალკეული ნაწილაკების იმპულსებისა და ძალების მომენტების ჯამის ტოლია

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M}. \quad (\text{VII},13)$$

განვიხილოთ მიღებული შედეგი უფრო დაწვრილებით, რაც შესაძლებელს გახდის მივცეთ მას შემდეგი გამოყენებისათვის უფრო ხელსაყრელი სახე. სიმარტივისათვის გავარჩიოთ ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა. (VII,13) ფორმულა გაშლილი სახით ასე დაიწერება:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_2], \quad (\text{VII},14)$$

სადაც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 პირველ და მეორე ნაწილაკებზე მოქმედი ძალებია. თუ სისტემა იზოლირებული არ არის, მაშინ ყოველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ორ ძალად შეიძლება გავყოთ: მაგალითად, პირველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ორი ძალისაგან იქნება შემდგარი. პირველი იქნება ძალა, რომლითაც მასზე მოქმედებს ამავე სისტემის მეორე წევრტილი—აღვნიშნოთ იგი \vec{F}_{12} -ით. მეორე კი იქნება ძალა, რომლითაც ამ ნაწილაკზე მოქმედებენ გარეშე სხეულები—აღვნიშნოთ ეს ძალა \vec{F}_{1e} -თი და ვუწოდოთ მას გარე ძალა. მაშასადამე, გვექნება

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{1e}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ მეორე ნაწილაკისათვის

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{2e},$$

სადაც \vec{F}_{21} არის მეორე ნაწილაკზე მოქმედი შიგა ძალა, გამოწვეული პირველი ნაწილაკით, ხოლო \vec{F}_{2e} გარეშე ძალა. (VIII,14) ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{21}] + [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_{1e}] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_{2e}]. \quad (\text{VII},15)$$

მაგრამ ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

და ორივე ეს ძალა ნაწილაკების შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ არის მიმართული, ამიტომ (VIII,15) ფორმულა შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{F}'_{12}] + [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}'_{1e}] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}'_{2e}].$$

ვინაიდან $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ არის მეორე წერტილიდან პირველი წერტილისაკენ გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორი და \vec{F}'_{12} ძალა მის გასწვრივ არის მიმართული, მათი ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლი იქნება (ნახ. 74)

$$[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{F}'_{12}] = 0$$

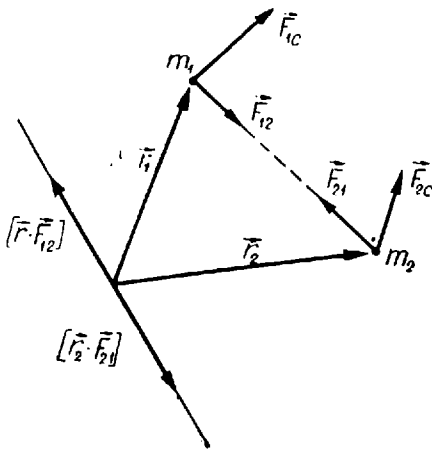
და ამიტომ წინა ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}_1 \cdot \vec{F}'_{1e}] + [\vec{r}_2 \cdot \vec{F}'_{2e}]. \quad (\text{VII}, 16)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ტოლობის მარჯვენა მხარეში დარჩა მხოლოდ გარეშე ძალების მომენტები, ამიტომაც შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e, \quad (\text{VII}, 17)$$

სადაც \vec{M}_e არის სისტემაზე მოქმედი სისტემის იმპულსის მომენტის



ნახ. 74.

გარეშე ძალების მომენტი. წარმოებულ დროით გარეშე ძალების მომენტების ჯამის ტოლია. შიგა ძალები სრულიად გამოირიცხნენ, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი არაერთმხრივ გავლენას არ ახდენენ იმპულსის მომენტის ცვლილებაზე. სრულიად ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს (VIII, 17) კანონის მართებულება მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის. ნაწილაკთა ყოველი წყვილისათვის მათი ურთი-

ერთმანეთის ძალების მომენტების ჯამი ნულის ტოლი იქნება და დარჩება მხოლოდ გარეშე ძალების მომენტები.

§ 36. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი. ფართობითი სიჩქარე

განვიხილოთ ახლა იმპულსის მომენტის ძალის მომენტთან დამაკავშირებელი ფორმულის შედეგები. ვთქვათ, განსახილველი

სისტემა იზოლირებულია, მაშინ მასზე მოქმედი ძალები ნულის ტოლი იქნება და მათი მომენტების ჯამიც ნულს გაუტოლდება. (VII,17) ფორმულიდან მივიღებთ

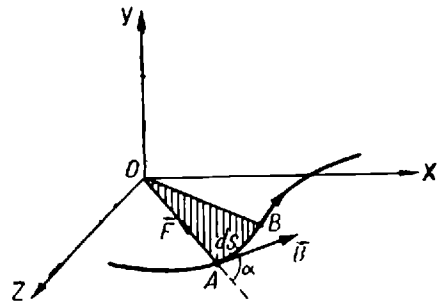
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

ან

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (\text{VIII}, 18)$$

როგორც ვხედავთ, იზოლირებული სისტემის იმპულსის მომენტი მუდმივი სიდიდეა. ამ კანონს ეწოდება იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი; იგი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფიზიკაში. ვინაიდან იმპულსის მომენტის ცვლილება შეიძლება გამოიწვიოს მხოლოდ გარეშე ძალებმა, შიგა ძალების მოქმედება ვერაფრით გავლენას ვერ მოახდენს იმპულსის მომენტზე. შიგა ძალებმა შეიძლება შესცვალოს ცალკეული ნაწილაკების სიჩქარეები, მათი მანძილები ცენტრამდე, რომლის მიმართაც გამოითვლება იმპულსის მომენტი, მაგრამ ეს ცვლილება ისე ხდება, რომ არ იცვლება მთელი სისტემის იმპულსის მომენტი.

ადვილი მისახვედრია, რომ იმპულსის მომენტი შეიძლება მუდმივი იყოს არაიზოლირებული სისტემის შემთხვევაშიც. ვთქვათ, არაიზოლირებული სისტემის ნაწილაკებზე მოქმედებენ გარეშე ძალები, მაგრამ ეს ძალები ისეთი ხასიათისაა, რომ მათი მომენტების ჯამი ნულის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ისეთი შემთხვევები, როდესაც სისტემა არაიზოლირებულია, მაგრამ გარეშე ძალების მომენტი ნულის ტოლია. (VII,17) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაშიც იმპულსის მომენტი მუდმივი სიდიდე იქნება.



ნახ. 75.

აღნიშნული შემთხვევის განსაკუთრებით მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს მოძრაობა ნაწილაკისა, რომელზე მოქმედი ძალაც ერთი უძრავი წერტილისაკენ არის მიმართული (ნახ. 75). ვინაიდან ამ შემთხვევაში \vec{F} ძალა მიმართულია რადიუს-ვექტორის გასწვრივ, მისი მომენტი ნულის ტოლია და იმპულსის მომენტი მუდმივი იქნება. თუ მოძრაობა XOZ სიბრტყეში წარმოებს, იმპულსის მომენტი მიმართული იქნება OY ღერძის გასწვრივ.

განხილულ შემთხვევაში იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი სხვა სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ. დავწეროთ იმპულსის მომენტი სკალარულად

$$L = mrv \sin \alpha = m\rho v. \quad (\text{VII}, 19)$$

გადავწეროთ ეს გამოსახულება შემდეგნაირად:

$$L = mrv \frac{ds}{dt} \sin \alpha. \quad (\text{VII}, 20)$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ $r ds \cdot \sin \alpha$ არის გაორკეცებული ფართობი OAB სამკუთხედისა, რომელსაც შემოსწერს \vec{r} რადიუს-ვექტორი dt დროის განმავლობაში. ვინაიდან m მუდმივი სიდიდეა, იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const.} \quad (\text{VII}, 21)$$

$\frac{dS}{dt}$ სიდიდე წარმოადგენს რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ერთეულში შემოწერილ ფართობს. მას უწოდებენ ფართობით სიჩქარეს, ხოლო (VII, 21) ფორმულით გამოსახულ კანონს—ფართობითი სიჩქარის მუდმივობის კანონს. ცხადია, რომ ეს კანონი არის იმპულსის მუდმივობის კანონის კერძო შემთხვევა. ამ კანონის შინაარსი ასე უნდა გავიგოთ. ვინაიდან დროის ერთეულში შემოწერილი ფართობები ტოლი უნდა იყოს, ამიტომ, რაც უფრო შორს იქნება ნაწილაკი ძალის მოქმედების ცენტრიდან, მით უფრო ნელა უნდა მოძრაობდეს იგი. ცენტრთან მიახლოებისას სიჩქარე სათანადოდ უნდა მატულობდეს.

იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი ნათელ გამოხატულებას პოულობს იმ შემთხვევებში, როდესაც მბრუნავი სისტემის ნაწილაკები იცვლიან მანძილებს ბრუნვის ღერძამდე. ნაწილაკების მიახლოება ღერძამდე იწვევს (VII, 4) ფორმულაში შემავალი \vec{r}_i სიდიდეების შემცირებას, და ვინაიდან იმპულსის მომენტი უცვლელი უნდა იყოს (იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში), ეს გამოიწვევს ნაწილაკების სიჩქარეების გადიდებას, ე. ი. ბრუნვის აჩქარებას; ეს ნათლად ჩანს შემდეგი მარტივი ცდიდან. დამკვირვებელი თავსდება მბრუნავ სკამზე. გაშლილ ხელებში მას უჭირავს მძიმე ბირთვები. თუ ბრუნვის პროცესში იგი მიიახლოებს ბირთვებს, ე. ი. შეამ-

ცირებს მათ მანძილებს ღერძამდე, ეს გამოიწვევს ბრუნვის სიჩქარის პროპორციულ ზრდას. ამითვე აიხსნება მრავალი სხვა მოვლენა (გადახტომის დროს შემობრუნების შესაძლებლობა, მოცეკვავის ბრუნვის აჩქარება ან შენელება ტანთან ხელების მიკვრის ან გაშლის შემთხვევაში და სხვა). ფიქრობენ, რომ დედამიწის თანდათანობითი გაცივების გამო იგი განუწყვეტლად იკუმშება, რაც იმპულსის მუდმივობის კანონის თანახმად უნდა იწვევდეს მისი ბრუნვის აჩქარებას, ე. ი. დღე-ღამის ხანგრძლიობის შემცირებას.

ღისიპაციური პროცესები ნერვოზის მექანიკაში

**§ 37. ღისიპაციური (ხახუნის) ქალეზი.
მოდრაობის განტოლუბეზი**

წინა თავში ჩვენ განვიხილეთ მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი და ამ კანონისა და ფარდობითობის პრინციპის საშუალებით გამოვიყვანეთ მოძრაობის განტოლებები. იქვე აღნიშნული იყო, რომ ყოველივე ეს მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც განსახილველ სისტემაში არ ხდება რაიმე არამექანიკური პროცესები, რომლებიც იწვევენ მექანიკური ენერგიის გარდაქმნას სხვა სახის ენერგიად. მაგრამ ბუნებაში ასეთი იდეალური შემთხვევა არასოდეს არ გვხვდება. ყოველი მექანიკური მოძრაობის დროს აუცილებლად ხდება ისეთი პროცესები (გარემოსთან ხახუნი, სხეულების დეფორმაცია და სხვა), რომელთა შედეგად მოძრავი სხეულის სრული მექანიკური ენერგია კლებულობს.

განვიხილოთ, მაგალითად, საქანის რხევა წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. რომ არ იყოს ჰაერის წინააღმდეგობა, ხახუნი დამაგრების ადგილას და ძაფის დეფორმაცია, საქანის სრული ენერგია—კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი—მუდმივი სიდიდე იქნებოდა და საქანი განაგრძობდა რხევას მუდმივი ამპლიტუდით. ფაქტობრივად კი საქანი თანდათან ამცირებს რხევის ამპლიტუდას და მისი ენერგია კლებულობს სითბურ ენერგიად გარდაქმნის შედეგად. ასევე კარგავს მექანიკურ ენერგიას რაიმე ზედაპირზე მოძრავი სხეული, ატმოსფეროში მოძრავი ყუმბარა, მანქანის მოძრავი ნაწილები და სხვადასხვა. ბოლოს, მექანიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ ან, როგორც ამბობენ: განიცდის დისიპაციას. ისეთ პროცესებს, რომელთა დროს მექანიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ, დისიპაციური პროცესები ეწოდებათ.

ცხადია, რომ მექანიკური ენერგიის დისიპაციის პირობებში მოძრაობის პროცესი აღარ არის წმინდა მექანიკური ხასიათისა და

ამიტომაც მისი განხილვა მექანიკური მოძრაობის კანონების საშუალებით შეუძლებელია. პროცესის სრული დახასიათებისათვის საჭიროა გამოვარკვიოთ როგორი მექანიკური და სითბური პროცესები მიმდინარეობს გარემოში და განსახილველ სხეულში; აქედან გამომდინარეობს, რომ სხეულის ურთიერთქმედება გარემოსთან იქნება დამოკიდებული არა მხოლოდ გარეშე სხეულების კონფიგურაციაზე, არამედ თვით სხეულის სიჩქარეზე და გარემოს შინაგან მდგომარეობაზე.

მიუხედავად ამისა, მექანიკაში მაინც იხილავენ მექანიკურ მოძრაობას, რომელიც წარმოებს ენერგიის დისიპაციის, ე. ი. ხახუნის პირობებში და ამისათვის აკეთებენ დაშვებებს დაკარგული მექანიკური ენერგიის შესახებ. უმეტეს შემთხვევაში თვლიან, რომ მექანიკური ენერგიის შემცირება, გამოწვეული ხახუნით, დამოკიდებულია მხოლოდ მოძრავი სხეულის სიჩქარეზე. ეს დაშვება საკმარისად კარგად დასტურდება ცდებით, რომლებიც ჩატარებული იყო სხვადასხვა გარემოში მოძრავ სხეულზე.

გამოვარკვიოთ ახლა როგორ შეიცვლება მოძრაობის განტოლებები, თუ მხედველობაში მივიღებთ დისიპაციურ პროცესებს. აღვნიშნოთ $\phi(\vec{r})$ -ით მოძრავი სხეულის მექანიკური ენერგიის შემცირება დროის ერთეულში, გამოწვეული გარემოს ხახუნით. მაშინ შეიძლება დავწეროთ

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}, t) \right) = \Phi(\vec{v}),$$

სადაც $-\frac{dE}{dt}$ არის სხეულის სრული ენერგიის შემცირება დროის ერთეულში. ეს ფორმულა ასე შეიძლება დავწეროთ:

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -\Phi(\vec{r}) dt. \quad (\text{VIII}, 1)$$

მისი შედარება (VI,7) ფორმულასთან გვიჩვენებს, რომ მათ შორის განსხვავება (VIII,1) ფორმულის მხოლოდ მარჯვენა მხარეში მდგომი წევრით გამოისახება. ცხადია, რომ ანალოგიურად დაიწერება იმავე პარაგრაფის (VI,7) ფორმულა, რომელიც ეთანადება \vec{r}_0 სიჩქარით მოძრავ ახალ ინერციულ სისტემას

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) - \vec{v}_0 d(m\vec{v}) + \frac{dU}{d\vec{r}} \cdot d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v}_0 dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -\Phi(\vec{v} - \vec{v}_0) dt. \quad (\text{VIII}, 2)$$

(VIII,2) განტოლების გამოკლება (VIII,1) განტოლებიდან მოგვცემს

$$\vec{r}_0 d(m\vec{r}) + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{r}_0 dt = \{ \Phi(\vec{r} - \vec{r}_0) - \Phi(\vec{r}) \} dt. \quad (\text{VIII,3})$$

ვინაიდან \vec{r}_0 ნებისმიერია, ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ იგი საკმარისად მცირეა და დავწეროთ

$$\Phi(\vec{v} - \vec{v}_0) - \Phi(\vec{v}) = - \frac{d\Phi}{d\vec{v}} \vec{v}_0,$$

რის შემდეგ (VIII,3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{v}_0 \left\{ d(m\vec{v}) + \frac{dU}{d\vec{r}} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{v}} dt \right\} = 0. \quad (\text{VIII,4})$$

\vec{v}_0 ვექტორის ნებისმიერობის გამო, აქედან მივიღებთ შემდეგ მოძრაობის განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{v}}. \quad (\text{VIII,5})$$

ასეთია მოძრაობის განტოლება დისიპაციური პროცესის არსებობის შემთხვევაში. ჩვენ ვხედავთ, რომ წმინდა მექანიკური მოძრაობის განტოლებისაგან იგი განსხვავდება მარჯვენა მხარეში მდგომი მეორე წევრით. აღვნიშნოთ ეს წევრი \vec{F}_d -თი

$$\vec{F}_d = - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{v}}. \quad (\text{VIII,6})$$

თუ გავიხსენებთ, რომ მარჯვენა მხარის პირველი წევრი $-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ გამოხატავს სხეულზე მოქმედ წმინდა მექანიკურ ძალას, დაკავშირებულს პოტენციალურ ენერგიასთან, სავსებით ბუნებრივი იქნება დამატებით წვევს $-\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{v}}$, რომელიც ენერგიის დისიპაციასთან არის დაკავშირებული, ვუწოდოთ დისიპაციური, ანუ ხახუნის, ძალა და მიღებული მოძრაობის კანონი

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F} + \vec{F}_d \quad (\text{VIII,7})$$

შემდეგნაირად ჩამოვყალიბოთ: დისიპაციური პროცესების არსებობის დროს სხეულის იმპულსის წარმოებულ დროის მიმართ ტოლია მექანიკური და დისიპაციური ძალების ჯამისა.

დისიპაციური, ანუ ხახუნის, ძალის დამოკიდებულება სხეულის სიჩქარეზე და გარემოს მდგომარეობაზე სხვადასხვა შემთხვევაში სხვადასხვაა და რაიმე ზოგადი კანონზომიერების დადგენა ამ დამოკიდებულებისათვის შეუძლებელია. ჩვეულებრივად ამ დამოკიდებულებას არკვევენ ექსპერიმენტების საშუალებით. განვიხილოთ რამდენიმე უმარტივესი შემთხვევა.

§ 38. სიჩქარის პროპორციული ხახუნის ძალა

დაკვირვებები ჰაერში მოძრავ სხეულებზე გვიჩვენებს, რომ მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში სრული მექანიკური ენერჯის კარგვა სიჩქარის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\Phi(\vec{v})$ სიდიდეს შემდეგი სახე უნდა ჰქონდეს:

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{1}{2} \gamma v^2, \quad (\text{VIII}, 8)$$

სადაც γ პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომლის მნიშვნელობა ყოველ ცალკეულ შემთხვევაში უნდა მოიძებნოს ექსპერიმენტის საშუალებით. ცხადია, რომ γ ყველა შემთხვევაში დადებითი უნდა იყოს, ვინაიდან ხახუნის არსებობისას აუცილებლად უნდა წარმოებდეს მექანიკური ენერჯის კარგვა [$\Phi(\vec{v}) > 0$].

ხახუნის ძალას მივიღებთ (VIII,8) ფორმულის გაწარმოებით

$$\vec{F}_a = -\gamma \vec{v}. \quad (\text{VIII}, 9)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში, ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. γ კოეფიციენტს ეწოდება ხახუნის კოეფიციენტი და მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე, მისი ზედაპირის სიგლუვეზე, გარემოს გვარობასა და მდგომარეობაზე.

როგორც მაგალითი ხახუნის ძალის მოქმედებისა, განვიხილოთ წინააღმდეგობის გამწვევ გარემოში \vec{r}_0 საწყისი სიჩქარით მოძრავი სხეული. დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს OX ღერძის გასწვრივ. თუ სხეულზე, ხახუნის ძალის გარდა, სხვა გარეშე ძალა არ მოქმედებს, მისი მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = -\gamma v; \quad (\text{VIII}, 10)$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma}{m} dt;$$

აქედან ინტეგრებით მივიღებთ

$$\lg r = -\frac{\gamma}{m} t + C_1.$$

C_1 მუდმივის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, რომ როცა $t=0$, $r = r_0$, ჩასმა მოგვცემს

$$\lg r_0 = C_1.$$

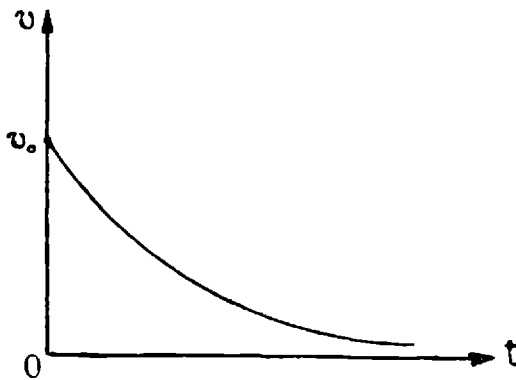
აქედან მივიღებთ

$$\lg \frac{r}{r_0} = -\frac{\gamma}{m} t,$$

ანუ

$$r = r_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t}. \quad (\text{VIII}, 11)$$

ამ კანონის მიხედვით კლებულობს სიჩქარე დროის განმავლობაში (სათანადო გრაფიკი მოყვანილია 76-ე ნახაზზე). გავლილი მანძილის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ტოლობა



ნახ 76.

$$\frac{dx}{dt} = v = r_0 e^{-\frac{\gamma}{m} t}.$$

მისი ინტეგრება მოგვცემს

$$x = -\frac{m r_0}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m} t} + C_2.$$

C_2 მუდმივა განისაზღვრება მეორე საწყისი პირობით, რომ $t=0$ მომენტში ნაწილაკი იმყოფება კოორდინატა სათავეში ($x=0$). ჩასმა მოგვცემს

$$0 = -\frac{mv_0}{\gamma} + C_2, \quad C_2 = \frac{mv_0}{\gamma},$$

საიდანაც x -ისათვის მივიღებთ

$$x = \frac{mv_0}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right). \quad (\text{VIII},12)$$

ცხადია, რომ x -ის (ე. ი. გავლილი მანძილის) უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება უსასრულოდ დიდი დროის შემდეგ ($t = \infty$); ამ მნიშვნელობის ჩასმით (VIII,12) განტოლებაში მივიღებთ

$$x_{max} = \frac{mv_0}{\gamma}. \quad (\text{VIII},13)$$

მოდრავი სხეულის მთელი საწყისი კინეტიკური ენერგია გარდაიქმნება სითბოდ, რომელიც გადაეცემა თვით სხეულსა და გარემოს.

გავარჩიოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, ხახუნის ძალა ისევ პროპორციულია სიჩქარისა და, გარდა ამ ძალისა, ნაწილაკზე მოქმედებს მუდმივი F ძალა. მოძრაობა ისევ სწორხაზოვანი იყოს. მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = F - \gamma v. \quad (\text{VIII},14)$$

საწყისი პირობები შემდეგნაირად შევარჩიოთ: $t=0$, $v=0$ და $x=0$. მოძრაობის ჩასათი შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ (VIII,14) განტოლების ანალიზის საშუალებით, ინტეგრების გარეშე. საწყის მომენტში, ვინაიდან $v=0$, ერთადერთი მოქმედი ძალა იქნება F ძალა. მისი გავლენით ნაწილაკის სიჩქარე გაიზრდება, რაც გამოიწვევს ხახუნის ძალის გაჩენას და თანდათანობით ზრდას. მიუხედავად ამისა, სანამ F ძალა მეტი იქნება, ვიდრე ხახუნის γv ძალა, სიჩქარის ზრდა გაგრძელდება

$$F - \gamma v > 0, \quad \frac{dv}{dt} > 0. \quad (\text{VIII},15)$$

სიჩქარის ეს ზრდა გაგრძელდება მანამდე, სანამ ხახუნის ძალა არ გაუტოლდება F ძალას; ამ მომენტში (VIII,14) განტოლების მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი გახდება და სიჩქარის ზრდა შეწყდება

(ნახ. 77). ცხადია, რომ მაქსიმალური სიჩქარე მიიღება პირობიდან

$$F - \gamma v_{max} = 0,$$

საიდანაც

$$v_{max} = \frac{F}{\gamma}. \quad (VIII,16)$$

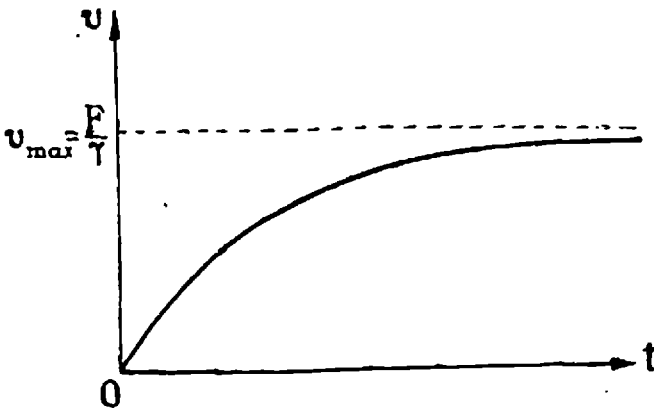
იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ ინტეგრებით. პირველი ინტეგრება და სათანადო საწყისი პირობის გამოყენება გვაძლევს

$$v = \frac{F}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{F}{m\gamma} t} \right), \quad (VIII,17)$$

საიდანაც, როცა $t \rightarrow \infty$, მივიღებთ (VIII,16) ფორმულას.

ასეთი სახისაა სხეულის, მაგალითად წვიმის წვეთის, ვარდნა ჰაერში, თუ ვარდნის სიჩქარე საკმარისად მცირეა.

საერთოდ უნდა აღვნიშნოთ, რომ თუ ხახუნის ძალა განუსაზღვრელად იზრდება სიჩქარის ზრდის დროს, ეს ძალა ბოლოს და ბო-



ნახ. 77.

ლოს გაუტოლდება მოძრაობის გამომწვევ ძალას, რის შემდეგ ნაწილაკის სიჩქარე აღარ შეიცვლება. ამ სიჩქარეს ეწოდება ზღვრული, ანუ მაქსიმალური სიჩქარე. თუ მოძრაობის გამომწვევი ძალა წინააღმდეგობის ძალაზე მეტი იქნება, ნაწილაკის სიჩქარე თანდათან გაიზრდება და, ბოლოს, გახდება ზღვრული სიჩქარის ტოლი. თუ ნაწილაკმა დაიწყო მოძრაობა ზღვრულ სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით, წინააღმდეგობა მამოძრავებელ ძალაზე მეტი იქნება, რის გამოც სიჩქარე თანდათან შემცირდება, სანამ ისევ არ გახდება ზღვრული სიჩქარის ტოლი.

მყარი სხეულების შეხების დროს წარმოშობილ ხახუნს და მის გავლენას მოძრაობაზე ჩვენ განვიხილავთ შემდეგში. მყარი სხეულების გარჩევის დროს.

§ 39. სიჩქარის კვადრატის კოვარიანტიული ხახუნის ძალა

თუ სხეულის სიჩქარე დიდია, ირკვევა, რომ ხახუნის ძალა აღარ გამოისახება (VIII,9) ფორმულით; ამ შემთხვევაში გამოიყენებენ ემპირიულ დაშვებას, რომ მექანიკური ენერჯიის კარგვა პირდაპირპრობორციულია სიჩქარის კუბისა, რაც წინა მსჯელობის ანალოგიურად გვაძლევს ხახუნის ძალის შემდეგ დამოკიდებულებას სიჩქარეზე:

$$\vec{F}_d = -\gamma v \cdot \vec{v}. \quad (\text{VIII},18)$$

ამ შემთხვევაშიც γ დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ისევ სიჩქარის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. ეს კვადრატული კანონი ხახუნის ძალისათვის ხშირად გამოიყენება ბალისტიკური გაანგარიშების დროს, თუმცა არც ის არის მართებული ყოველგვარი სიჩქარისათვის და ყოველგვარი პირობებისათვის; მაგალითად, იგი არ შეიძლება გამოვიყენოთ მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში. მოძრაობის დინამიკური განტოლების ამოხსნა (VIII,18) ფორმულით გამოსახული ხახუნის ძალის შემთხვევაში დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს, თუ ნაწილაკზე, გარდა ხახუნის ძალისა, სხვა ძალა არ მოქმედებს. მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma v^2 \quad (\text{VIII},19)$$

შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით:

$$-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{m}. \quad (\text{VIII},19')$$

ინტეგრება მოგვცემს

$$\frac{1}{v} = \frac{\gamma}{m} t + C. \quad (\text{VIII},20)$$

ინტეგრების მუდმივა განისაზღვრება საწყისი პირობების საშუალებით; თუ $t=0$ მომენტში ნაწილაკი იმყოფებოდა $x=0$ მდებარეობაში და ჰქონდა v_0 სიჩქარე, მივიღებთ

$$\frac{1}{v} = \frac{\gamma}{m} t + \frac{1}{v_0}. \quad (\text{VIII},21)$$

მეორე მხრივ, (VIII,19) განტოლება შეიძლება ასეც წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -\frac{\gamma}{m}.$$

ინტეგრება და საწყისი პირობების გამოყენება მოგვცემს

$$v = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m} x}. \quad (\text{VIII},22)$$

(VIII,21) და (VIII,22) განტოლებებიდან სიჩქარის გამორიცხვა მოგვცემს მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებას

$$x = \frac{m}{\gamma} \lg \left(1 + \frac{\gamma v_0 t}{m} \right). \quad (\text{VIII},23)$$

მიღებული შედეგები გვიჩვენებენ, რომ ხახუნის ძალისათვის კვადრატული კანონის შემთხვევაში სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება უსასრულო დროის და უსასრულო მანძილის გავლის შემდეგ. მაგრამ ეს შედეგი არ შეიძლება გამოვიყენოთ პრაქტიკულად, ვინაიდან, როდესაც სიჩქარე საკმაოდ მცირე გახდება, კვადრატული კანონი ხახუნის ძალისათვის აღარ იქნება მართებული. გამოყვანილი ფორმულები გამოდგება სიჩქარის მნიშვნელობის მხოლოდ გარკვეულ ფარგლებში.

§ 40. მუშაობა ხახუნის ძალის არსებობის დროს

ჩვენ გამოვარკვეთ, რომ ნაწილაკის წმინდა მექანიკური მოძრაობის დროს, როდესაც ურთიერთქმედება ხასიათდება მდებარეობაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიით, ნაწილაკზე მოქმედი ძალის მუშაობა რაიმე მონაკვეთზე ტოლია პოტენციალური ენერგიის შემცირებისა

$$\int_1^2 F_s ds = U_1 - U_2, \quad (\text{VIII},24)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მუშაობა არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიაზე, რომლითაც ხდება გადასვლა პირველი მდებარეობიდან მეორეში.

აქედან იქნა მიღებული აგრეთვე შედეგი, რომ ჩაკეტილი გზის შემოვლის დროს შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია

$$\oint F_s ds = 0. \quad (\text{VIII},25)$$

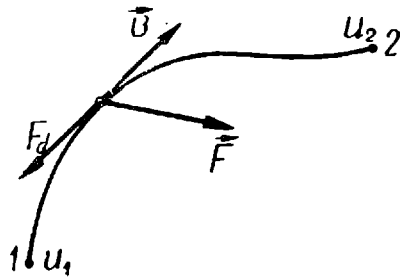
ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ძალა განისაზღვრება როგორც კონფიგურაციაზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიის წარმოებულ კოორდინატით. ცხადია, რომ ეს

ასე არ იქნება ხახუნის ძალების არსებობის შემთხვევაში. აღვნიშნოთ \vec{F}_0 -ით ნაწილაკზე მოქმედი საერთო ძალა, რომელიც არის ჯამი პოტენციალური და ხახუნის ძალებისა (ნახ. 78)

$$\vec{F}_0 = \vec{F} + \vec{F}_d. \quad (\text{VIII}, 26)$$

მის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება.

$$\int_1^2 F_{d,s} ds = \int_1^2 F_s ds + \int_1^2 F_{d,s} ds = U_1 - U_2 + \int_1^2 F_{d,s} ds. \quad (\text{VIII}, 27)$$



ნახ. 78.

ჩაკეტილი გზისათვის მივიღებთ

$$\oint F_0 ds = \oint F_{d,s} ds, \quad (\text{VIII}, 28)$$

ე. ი. ჩაკეტილი გზის შემოწერის დროს შესრულებული მუშაობა მხოლოდ ხახუნის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის ტოლია.

ანალოგიურად მივიღებთ ფორმულას კინეტიკური ენერგიის ცვლილებისათვის ხახუნის ძალების არსებობის შემთხვევაში

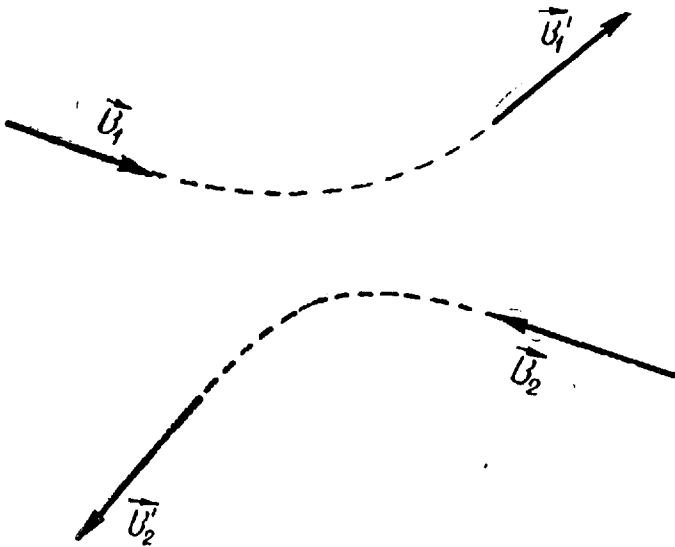
$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U_1 - U_2 + \int_1^2 F_{d,s} ds, \quad (\text{VIII}, 29)$$

ე. ი. კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი უდრის პოტენციალური ენერგიის შემცირების და ხახუნის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობის ჯამს.

ნაწილაკების დაჯახება

§ 41. დაჯახების პროცესის ზოგადი დახასიათება

ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი შემთხვევა არის დაჯახება. ეს მოვლენა შემდეგში მდგომარეობს. ნაწილაკები, რომლებიც საწყის მომენტში იმდენად შორს არიან ერთმანეთისაგან, რომ მათი ურთიერთქმედება შეიძლება უგულვებელვყოთ, მოძრაობის შედეგად უახლოვდებიან ერთმანეთს. საკმაოდ დაახლოებისას მათი ურთიერთქმედება უკვე საგრძნობი ხდე-



ნახ. 79.

ბა, ნაწილაკები გადასცემენ ერთმანეთს იმპულსსა და ენერგიას და ისევ შორდებიან ერთმანეთს უკვე სხვა სიდიდისა და მიმართულების სიჩქარეებით (ნახ. 79).

დაჯახების მოვლენის მაგალითები მრავალია. ასეთია, მაგალითად, დრეკადი და არადრეკადი ბირთვების დაჯახება, ელექტრონის დაჯახება ატომთან ან მოლეკულასთან, ატომებისა და მოლე-

კულების ურთიერთდაჯახება, პროტონების, ნეიტრონების და სხვა ელემენტარული ნაწილაკების დაჯახება ერთიმეორესთან და ატომის ბირთვებთან, ციური სხეულების გავლა ერთიმეორის მახლობლად და მრავალი სხვა.

დაჯახების მოვლენების შესწავლა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია თანამედროვე ატომურ და ბირთვულ ფიზიკაში, ვინაიდან იმისდა მიხედვით, თუ როგორი გახდა ნაწილაკების სიჩქარეები (მიმართულებითა და სიდიდით) დაჯახების შემდეგ, შეიძლება გარკვეული დასკვნები გავაკეთოთ ნაწილაკთა ბუნებისა და ურთიერთქმედების შესახებ. ატომებთან და ბირთვებთან სხვადასხვაგვარი ნაწილაკების დაჯახების პროცესების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს აგრეთვე გამოვიკვლიოთ ატომისა და მისი ბირთვის შინაგანი აგებულება.

ჩვეულებრივად, როდესაც მსჯელობენ დაჯახებაზე, გულისხმობენ, რომ ნაწილაკები რომელიღაც მომენტში ეხებიან ერთმანეთს, მაგრამ კარგად უნდა იქნას გაგებული, რომ ნივთიერების აღნაგობის შესახებ თანამედროვე წარმოდგენების მიხედვით ნაწილაკების შეხებაზე ლაპარაკი საერთოდ არ შეიძლება. იმისათვის, რომ გავერკვეთ ამ საკითხში, განვიხილოთ როგორ ხდება, მაგალითად, α -ნაწილაკის დაჯახება ატომის ბირთვთან (დავუშვათ, რომ ატომის ბირთვი უძრავია). საწყის მომენტში α -ნაწილაკი მოძრაობს ბირთვისაკენ სწორხაზოვნად. თანდათანობითი მიახლოების გამო მათ შორის განზიდვის ძალები უკვე საგრძნობი გახდებიან და დაიწყება α -ნაწილაკის სიჩქარის შემცირება. ბოლოს, გარკვეულ მანძილზე (რომელიც საწყის კინეტიკურ ენერგიაზე დამოკიდებულია), α -ნაწილაკი გაჩერდება და შემდეგ ამოძრავდება საწინააღმდეგო მიმართულებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ნაწილაკების დაახლოება წარმოებს მანამდე, სანამ ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია, რომელიც იხარჯება განზიდვის ძალების საწინააღმდეგოდ მუშაობის შესრულებაზე, არ გახდება ნულის ტოლი. არავითარი უშუალო შეხება ნაწილაკებისა არ ხდება. ასეთივე მდგომარეობაა სხვა შემთხვევებშიც, მაგალითად, ჩვეულებრივი ლითონის ბირთვების დაჯახების დროს. პირველი შეხედვით აქ სხეულების ნამდვილი შეხება ხდება, მაგრამ ის, რასაც ჩვენ შეხებას ვუწოდებთ, არის ბირთვის ზედაპირების დაახლოება ძალიან მცირე — დაახლოებით 10^{-7} — 10^{-8} *cm*-ის ტოლი მანძილით. ამ მანძილზე ატომებს შორის განზიდვის ძალები იმდენად დიდი ხდებიან, რომ აღარ აძლევენ საშუალებას ბირთვებს, კიდევ უფრო მეტად დაუახლოვდნენ ერთმანეთს (ჩვეულებრივი წნევის პირობებში).

ნაწილაკების დაჯახების პროცესი შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვიდგინოთ. საწყის მომენტში (დაჯახებამდე) გვაქვს ორი ნაწილაკი. რომლებიც გარკვეული სიჩქარეებით მოძრაობენ ისე, რომ უახლოვდებიან ერთმანეთს. რაც უფრო ახლოს იქნებიან ისინი ერთმანეთთან, მით უფრო შესამჩნევი იქნება მათ შორის ურთიერთქმედება, რომელიც გამოიწვევს მათი სიჩქარეების შეცვლას. გარკვეული უმცირესი მანძილით დაახლოების შემდეგ ნაწილაკები ისევ იწყებენ ერთმანეთისაგან დაშორებას და განაგრძობენ მოძრაობას უკვე სხვა სიჩქარეებით. დაჯახების შესწავლის დროს დასმული ძირითადი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: ცნობილია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე, უნდა გავიგოთ მათი სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ. თავისთავად ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა ვიცოდეთ რა ხდება დაჯახების არეში, ე. ი. ვიცოდეთ ურთიერთქმედების ხასიათი. მაგრამ ჩვენი მიზანია არა ამ სრული და საკმაოდ რთული ამოცანის ამოხსნა, არამედ გარკვევა უფრო მარტივი საკითხისა: რა დასკვნების გამოტანა შეიძლება ნაწილაკების დაჯახების შემდეგ სიჩქარეების შესახებ მხოლოდ იმპულსისა და ენერგიის მუდმივობის კანონების მიხედვით და ურთიერთქმედების ხასიათის ცოდნის გარეშე?

§ 42. დაჯახების კლასიფიკაცია

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის დაჯახება. აღვნიშნოთ მათი მასები m_1 -ითა და m_2 -ით. სიჩქარეები დაჯახებამდე იყოს \vec{v}_1 და \vec{v}_2 , ხოლო დაჯახების შემდეგ u_1 და u_2 . როგორი ხასიათისაა არ უნდა იყოს დაჯახება, ყოველთვის უნდა შესრულდეს იმპულსის მუდმივობის კანონი

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (\text{IX}, 1)$$

ასეთია ის პირველი ძირითადი განტოლება, რომელიც აკავშირებს ნაწილაკების დაჯახების შემდეგ მიღებულ სიჩქარეებს მათ სიჩქარეებთან დაჯახებამდე.

მეორე კანონი, რომელიც გამოიყენება დაჯახების მოვლენის შესწავლის დროს, არის ენერგიის მუდმივობის კანონი. ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის ენერგია სამი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი არის კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

მეორე ნაწილი არის ამ ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია U_{12} . თუ ნაწილაკები, რომელთა დაჯახებასაც

ჩვენ ვიხილავთ, რთული აგებულებისაა (მაგალითად: ატომები, მოლეკულები, ლითონის ბირთვები და ა. შ.), იქნება მესამე ნაწილიც, რომელიც არის ამ ნაწილაკების შინაგანი ენერგიების ჯამი. აღვნიშნოთ ეს შინაგანი ენერგია (ორივე ნაწილაკისა) დაჯახებამდე ϵ -ით, ხოლო დაჯახების შემდეგ ϵ' -ით. დაჯახებამდე, როდესაც ნაწილაკები საკმაოდ შორს არიან ერთმანეთისაგან, პოტენციალური ენერგია შეიძლება უგულებელვყოთ და ნაწილაკების სრული ენერგიისათვის მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \epsilon.$$

დაჯახების შემდეგაც შეიძლება უგულებელვყოთ ურთიერთქმედების ენერგია და ამიტომ დაჯახების შემდეგ სრული ენერგიისათვის მივიღებთ

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \epsilon'.$$

ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად გვექნება

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \epsilon' = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \epsilon. \quad (\text{IX}, 2)$$

ეს არის მეორე ძირითადი განტოლება, რომელიც საზღვრავს დაჯახების პროცესს.

იმის მიხედვით, თუ როგორია დაჯახების დროს ნაწილაკების შინაგანი ენერგიის ცვლილება, არჩევენ სხვადასხვა ტიპის დაჯახებებს.

1. დრეკადი დაჯახება ისეთ დაჯახებას ეწოდება, რომლის დროსაც ნაწილაკთა შინაგანი ენერგიები არ იცვლება, ე. ი. როდესაც

$$\epsilon' = \epsilon. \quad (\text{IX}, 3)$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მართებული იქნება მხოლოდ კინეტიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

2. არადრეკადი დაჯახება ისეთ დაჯახებას ეწოდება, რომლის დროსაც ხდება ნაწილაკთა შინაგანი ენერგიების ცვლილება, ე. ი. როდესაც

$$\epsilon' \neq \epsilon. \quad (\text{IX}, 4)$$

თვით არადრეკადი დაჯახებები შეიძლება ორ სახედ გაიყოს იმის-
და მიხედვით, დიდდება თუ კლებულობს ნაწილაკების შინაგანი
ენერგია. თუ დაჯახების შედეგად შინაგანი ენერგია მატულობს,
ე. ი. კინეტიკური ენერგიის ნაწილი იხარჯება შინაგანი ენერგიის
გაზრდაზე, დაჯახებას ეწოდება პირველი გვარის არადრე-
კადი დაჯახება. თუკი შინაგანი ენერგია კლებულობს, ე. ი.
ამ შინაგანი ენერგიის ნაწილი კინეტიკურ ენერგიაში გადადის, და-
ჯახებას მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება ეწო-
დება.

განვიხილოთ მაგალითები. დაჯახების ყველაზე ცნობილი მაგა-
ლითია ლითონის, სპილოს ძვლის ან სხვა დრეკადი მასალისაგან
დამზადებული ბირთვების დაჯახება. თუ ბირთვები ფოლადისა ან
სპილოს ძვლისაა, ე. ი. ისეთი მასალისაგანაა დამზადებული, რომ
გარეშე ძალის გავლენით გამოწვეული მისი დეფორმაცია თითქმის
მთლიანად ისპობა ძალის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ, მაშინ
დაჯახება დრეკადი იქნება, ვინაიდან დაჯახების შემდეგ ბირთვე-
ბის ფორმა და მოცულობა მთლიანად აღდგება და შინაგანი ენერ-
გიის არავითარი ცვლილება არ მოხდება. პირველი გვარის არად-
რეკადი დაჯახების მაგალითს წარმოადგენს ტყვიისაგან დამზადე-
ბული ბირთვების დაჯახება. ამ შემთხვევაში დაჯახების შედეგად
მომხდარი დეფორმაცია მთლიანად არ მოისპობა, კინეტიკური ენ-
ერგიის ნაწილი დაიხარჯება ბირთვების შინაგანი ენერგიის გადი-
დებაზე და ამიტომაც დაჯახება იქნება პირველი გვარის არადრე-
კადი დაჯახება.

როგორც შემდეგი მაგალითი განვიხილოთ ელექტრონის ან
რაიმე სხვა ელემენტარული ნაწილაკის დაჯახება ატომთან. ელექ-
ტრონს შინაგანი ენერგია არა აქვს, ვინაიდან იგი ელემენტარული
ნაწილაკია. ატომს კი, როგორც რთულ სისტემას, შემდგარს ბირ-
თვისა და ელექტრონებისაგან, გააჩნია შინაგანი ენერგია (პოტენ-
ციალური ენერგია), რომელიც დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა მან-
ძილზეა ატომური ელექტრონი ბირთვისაგან. რაც უფრო შორეულ
ორბიტაზეა ატომური ელექტრონი, მით უფრო მეტია ატომის ში-
ნაგანი ენერგია. ვთქვათ, ელექტრონი დაეჯახა ატომს. შესაძლე-
ბელია სამი შემთხვევა. პირველი, როდესაც დამჯახებელი ელექ-
ტრონი ისე შეიცვლის სიჩქარის სიდიდესა და მიმართულებას, რომ
ატომის შინაგანი ენერგია არ შეიცვლება. შეიცვლება მხოლოდ
ატომის კინეტიკური ენერგია. ასეთი დაჯახება დრეკადი იქნება.
მაგრამ შეიძლება დაჯახების დროს დამჯახებელმა ელექტრონმა
გადაიყვანოს ატომური ელექტრონი უფრო შორს მანძილზე ბირ-

თვიდან, ე. ი. გაადიდოს ატომის შინაგანი ენერგია თავისი კინეტიკური ენერგიის ხარჯზე. ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგიების ჯამი შემცირდება, ამ ენერგიის ნაწილი გადაეცემა ატომს შინაგანი ენერგიის სახით. დაჯახება იქნება პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება. შესაძლებელია აგრეთვე მესამე შემთხვევა. დაჯახების დროს ატომური ელექტრონი შეიძლება გადავიდეს უფრო ახლო ორბიტაზე, ე. ი. ატომის შინაგანი ენერგია შეიძლება შემცირდეს და ამ ენერგიის ნაწილი გადავიდეს დამჯახებელი ელექტრონის კინეტიკურ ენერგიაში. კინეტიკური ენერგია დაჯახების შემდეგ მეტი იქნება, ვიდრე დაჯახებამდე—გვექნება ე. წ. მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება.

§ 43. დრეკადი დაჯახება

განვიხილოთ ორი ნაწილაკის დრეკადი დაჯახება. როგორც წინა პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, ასეთი დაჯახების შემთხვევაში მუდმივია როგორც იმპულსების, ისე კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (\text{IX}, 5)$$

და

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (\text{IX}, 6)$$

ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს. ცნობილია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე, ე. ი. \vec{v}_1 და \vec{v}_2 . საძიებელია სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ, ე. ი. ვექტორები \vec{u}_1 და \vec{u}_2 . ვინაიდან ყოველ საძიებელ სიჩქარეს სამი კომპონენტი აქვს, საძიებელია ექვსი სკალარული სიდიდე; u_{1x} , u_{1y} , u_{1z} და u_{2x} , u_{2y} , u_{2z} . სკალარულ განტოლებათა რაოდენობა კი, რომლებსაც გვაძლევენ (IX,5) და (IX,6) განტოლებები, არის ოთხი (სამ სკალარულ განტოლებას გვაძლევს იმპულსის კანონი და ერთ განტოლებას ენერგიის კანონი).

ცხადია, რომ განტოლებათა რაოდენობა არ არის საკმარისი ყველა უცნობი სიდიდის საპოვნელად. ეს გასაგებია, ვინაიდან ამოცანის სრული ამოხსნისათვის ჩვენ უნდა ვიცოდეთ იმ ურთიერთქმედების ხასიათი, რომელმაც გამოიწვია სიჩქარეების ცვლილება. საქმე იმაშია, რომ ჩვენ გვსურს გამოვიკვლიოთ დაჯახების შედეგი მხოლოდ ენერგიისა და იმპულსის კანონების საშუალებით და ამიტომაც გამოკვლევა სრული არ შეიძლება იყოს. ჩვენთვის უცნობია ის, რაც ხდება ურთიერთქმედების არეში და ამიტომაც ამოცანა სათანადოდ უნდა შეიზღუდოს.

ჩვენ შემდეგნაირად დავსვამთ საკითხს: მოცემულია ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახებამდე. ცნობილია აგრეთვე, რომ ერთ-ერთი ნაწილაკი, მაგალითად პირველი, დაჯახების შემდეგ მოძრაობს გარკვეული მიმართულებით. მოვძებნოთ მეორე ნაწილაკის ვექტორული სიჩქარე (სამი სიდიდე) და პირველი ნაწილაკის სიჩქარის სიდიდე (ერთი სკალარული სიდიდე). დასმული ამოცანის ამოხსნისათვის ხელსაყრელია შემდეგნაირად მოვიქცეთ. შემოვიღოთ ახალი ინერციული ათვლის სისტემა, რომლის სათავე მოთავსებულია ნაწილაკთა ინერციის ცენტრში და ამ ინერციის ცენტრთან ერთად მოძრაობს. შევისწავლოთ დაჯახების მოვლენა ამ ათვლის სისტემაში და შემდეგ დავუბრუნდეთ ისევ ძველ სისტემას. აღვნიშნოთ ძველი სისტემა L ასოთი და ვუწოდოთ მას ლაბორატორიული სისტემა (მოკლედ L სისტემა). ინერციის ცენტრთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა აღვნიშნოთ C ასოთი და ვუწოდოთ მას ინერციის ცენტრის სისტემა (მოკლედ C სისტემა). ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემაში აღვნიშნოთ იმავე ასოებით, რითაც L სისტემაში, მხოლოდ გავუკეთოთ ინდექსი C ; მაგალითად, \vec{v}_{1c} იქნება პირველი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახებამდე C სისტემაში. დავაკავშიროთ ერთმანეთთან ნაწილაკების სიჩქარეები L და C სისტემებში. ამისათვის გამოვთვალოთ C სისტემის ან, რაც იგივეა, ინერციის ცენტრის სიჩქარე L სისტემის მიმართ. ინერციის ცენტრის სიჩქარის ფორმულის თანახმად

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{M}$$

სადაც $M = m_1 + m_2$. იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემის მიმართ, მათ სიჩქარეებს L სისტემის მიმართ უნდა გამოვაკლოთ C სისტემის სიჩქარე, ე. ი. \vec{v}_c , მივიღებთ

$$\vec{v}_{1c} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{M} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

(IX,7)

$$\vec{v}_{2c} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \frac{m_1}{M} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

ასეთია ნაწილაკების სიჩქარეები C სისტემის მიმართ, დაჯახებამდე.

გამოვთვალოთ ახლა მათი სიჩქარეები ამავე სისტემაში, დაჯახების შემდეგ, ე. ი. ამოვხსნათ დაჯახების ამოცანა C სისტემაში. გამოვიყენოთ იმპულსისა და ენერჯიის კანონები

$$m_1 \vec{u}_{1c} + m_2 \vec{u}_{2c} = m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c},$$

$$\frac{m_1 u_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2c}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2}.$$

მაგრამ ცხადია, რომ ნაწილაკების საერთო იმპულსი C სისტემაში ნულის ტოლია როგორც დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგ, ე. ო.

$$m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c} = 0 \quad (\text{IX}, 8)$$

და

$$m_1 \vec{u}_{1c} + m_2 \vec{u}_{2c} = 0. \quad (\text{IX}, 9)$$

სწორედ ეს გარემოება, რომ იმპულსების ჯამი ნულია, ამარტივებს დაჯახების მოვლენის განხილვას C სისტემაში. (IX,8) და (IX,9) განტოლებებიდან მივიღებთ

$$\vec{v}_{2c} = \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_{1c}, \quad \vec{u}_{2c} = -\frac{m_1}{m_2} \vec{u}_{1c}.$$

ჩასმა ენერჯიის მუდმივობის კანონის ფორმულაში გვაძლევს

$$m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{v}_{1c}^2 = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{u}_{1c}^2,$$

ანუ

$$v_{1c}^2 = u_{1c}^2,$$

ე. ო.

$$|v_{1c}| = |u_{1c}|.$$

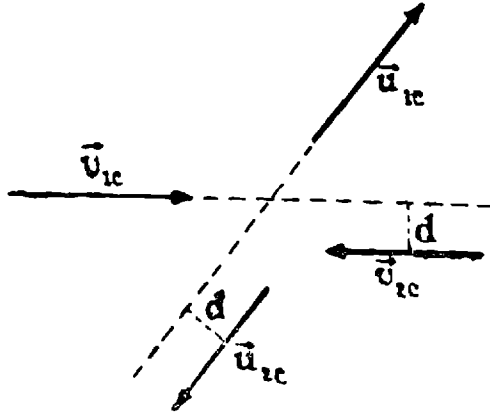
ანალოგიურად მივიღებთ

$$|v_{2c}| = |u_{2c}|.$$

აქედან ვასკვნით, რომ C სისტემაში დაჯახების დროს ნაწილაკების სიჩქარეების სიდიდეები უცვლელი რჩება, ყოველი ნაწილაკი ინარჩუნებს იმ სიჩქარის სიდიდეს, რომელიც მას ჰქონდა დაჯახებამდე. ცხადია, რომ ერთადერთი, რაც შეიძლება მოხდეს, არის სიჩქარეების მიმართულებათა შეცვლა. მე-80 ნახაზზე ნაჩვენებია ნაწილაკების დაჯახების პროცესი C სისტემაში. ნაწილაკთა სიჩქარეები ურთიერთანტიპარალელურია როგორც დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგ. რასაკვირველია, არ არის აუცილებელი, რომ სიჩქარეები ერთ სწორ ხაზზე მდებარეობდნენ (ეს იქნებოდა ცენტრალური დაჯახების შემთხვევა). საზოგადოდ სიჩქარეების მიმართულებებს შორის გარკვეული მანძილია, რომელსაც დაჯახების პარამეტრი ეწოდება (მონაკვეთი, რომელიც ნახაზზე μ ასოთია აღნიშნული). იმის გარკვევა, თუ რა კუთხით მობრუნდნენ სიჩქა-

რეები დაჯახების შემდეგ, შეუძლებელია გამოყენებული კანონების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა ურთიერთქმედების ხასიათის და დაჯახების პარამეტრის ცოდნა.

ვთქვათ, პირველი ნაწილაკის სიჩქარის მიმართულება დაჯახების შემდეგ განსაზღვრულია ერთეულოვანი ვექტორით \vec{n}_{1c} (C სისტე-



ნახ. 80.

მაში). მაშინ სიჩქარეებისათვის დაჯახების შემდეგ მივიღებთ

$$\vec{u}_{1c} = v_{1c} \vec{n}_{1c} = \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}_{1c},$$

$$\vec{u}_{2c} = -v_{2c} \vec{n}_{1c} = -\frac{m_1}{M} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \vec{n}_{1c}.$$

დაეუბრუნდეთ ლაბორატორიულ სისტემას, ე. ი. გამოვთვალოთ ნაწილაკთა სიჩქარეები ამ სისტემაში დაჯახების შემდეგ. ამისათვის სიჩქარეებს C სისტემაში უნდა მივუმატოთ C სისტემის სიჩქარე L სისტემის მიმართ, მივიღებთ

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 + \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \vec{n}_{1c}, \quad (\text{IX}, 10)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 - \frac{m_1}{M} |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \vec{n}_{1c}. \quad (\text{IX}, 11)$$

ეს ფორმულები გვაძლევენ ამოცანის ამოხსნას. ისინი საზღვრავენ ნაწილაკთა სიჩქარეებს დაჯახების შემდეგ (L სისტემაში), თუ ცნობილია ნაწილაკთა სიჩქარეები დაჯახებამდე (იმავე სისტემაში) და პირველი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება (\vec{n}_{1c}) C სისტემაში,

დაჯახების შემდეგ. ყველა სიჩქარე ამ ფორმულებში არის სიჩქარეები ლაბორატორიული სისტემის მიმართ, მხოლოდ ვექტორი \vec{n}_{1c} არის აღებული C სისტემის მიმართ.

მიღებული ფორმულები შესამჩნევად მარტივდება იმ შემთხვევაში, როდესაც დაჯახებამდე ერთ-ერთი ნაწილაკი, მაგალითად მეორე, უძრავია, ე. ი. $\vec{v}_2 = 0$. მაშინ ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} |\vec{v}_1| \vec{n}_{1c}, \quad (\text{IX}, 12)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 - \frac{m_1}{M} |\vec{v}_1| \vec{n}_{1c}. \quad (\text{IX}, 13)$$

ჩვენ შემდეგში ყოველთვის ამ ფორმულებს გამოვიყენებთ სხვადასხვა სახის დაჯახებათა გარჩევისათვის, ე. ი. ლაბორატორიულ სისტემად ისეთ ათვლის სისტემას ჩავთვლით, რომლის მიმართ ერთ-ერთი ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია.

§ 44. დამკადნი დაჯახების გარეშე მიღებული წარმოდგენა

დრეკადი დაჯახების პროცესის გასარჩევად ფრიად ხელსაყრელია (IX, 12, 13) ფორმულების გრაფიკული წარმოდგენა; ამისათვის სიჩქარეებიდან გადავიდეთ იმპულსებზე. გავამრავლოთ (IX, 12) განტოლება m_1 -ზე, ხოლო (IX, 13) განტოლება m_2 -ზე და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: ნაწილაკების იმპულსები დაჯახებამდე აღვნიშნოთ \vec{p}_1 -ით და $\vec{p}_2 = 0$ (მეორე ნაწილაკი უძრავია), ხოლო იმპულსები დაჯახების შემდეგ \vec{p}'_1 და \vec{p}'_2 . მივიღებთ

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1}{M} \vec{p}_1 + \frac{m_2}{M} p_1 \cdot \vec{n}_{1c}, \quad (\text{IX}, 14)$$

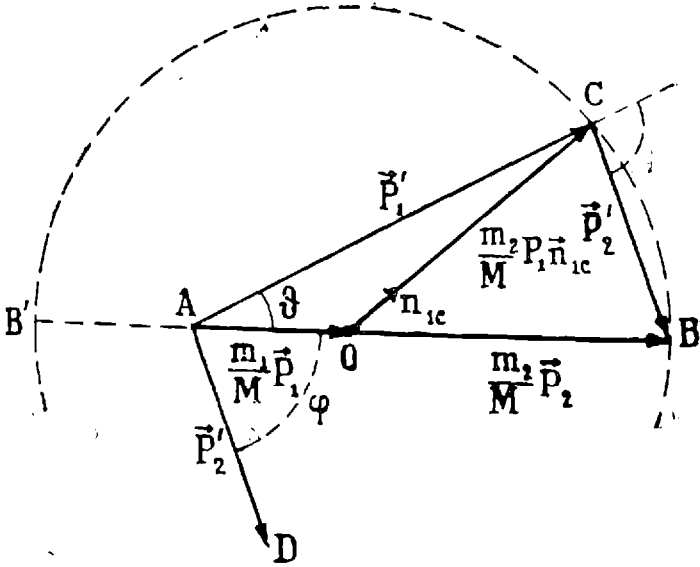
$$\vec{p}'_2 = \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 - \frac{m_2}{M} p_1 \cdot \vec{n}_{1c}. \quad (\text{IX}, 15)$$

გადავზომოთ \vec{AB} ვექტორი, რომელიც გამოხატავს პირველი ნაწილაკის იმპულსს დაჯახებამდე (იმავე დროს ეს არის ორივე ნაწილაკის საერთო იმპულსი) (ნახ. 81).

გავარჩიოთ ცალ-ცალკე სხვადასხვა კერძო შემთხვევა:

1. დავუშვათ, რომ პირველი ნაწილაკის (მოდრავის) მასა ნაკლებია, ვიდრე უძრავისა: $m_1 < m_2$. გავყოთ AB მონაკვეთი O წერტილით ნაწილაკების მასების პროპორციულ-

ლად ისე, რომ \vec{AO} იყოს $\frac{m_1}{M} \vec{p}_1$, ხოლო \vec{OB} კი $\frac{m_2}{M} \vec{p}_1$. გავატა-
როთ O წერტილიდან ერთეულოვანი ვექტორი \vec{n}_{1c} , რომელიც
გვიჩვენებს პირველი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულებას დაჯ-
ახების შემდეგ (C სისტემაში), და გადავზომოთ ამ მიმართულებით
 OB -ს ტოლი მონაკვეთი OC . ცხადია, რომ $\vec{OC} = \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_{1c}$. მაშინ
(IX,14) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პირველი ნაწილაკის იმპულსი



ნახ. 81.

დაჯახების შემდეგ ლაბორატორიულ სისტემაში მოცემული იქნება
 \vec{AC} ვექტორით.

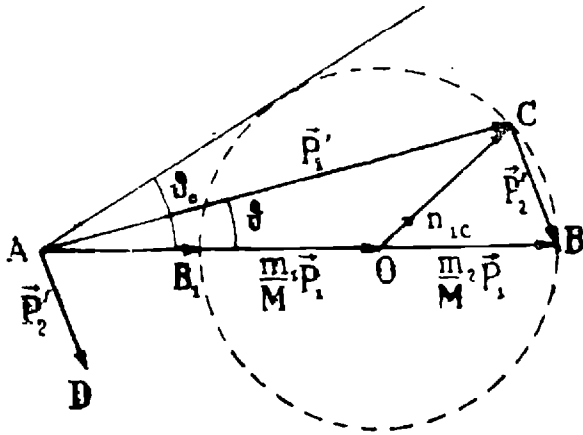
ვინაიდან \vec{p}'_2 არის $\frac{m_2}{M} \vec{p}_1$ ვექტორისა და $\frac{m_2}{M} p_1 \vec{n}_{1c}$ ვექტორის

სხვაობა, იგი გამოიხატება, \vec{CB} ვექტორით ან მისი პარალელური
და ტოლი \vec{AD} ვექტორით. თუ \vec{n}_{1c} ვექტორის მიმართულებას შევ-
ცვლით, ე. ი. დავუშვებთ, რომ C სისტემაში პირველი ნაწილაკი
რალაც სხვა მიმართულებით ამოძრავდა, \vec{OC} ვექტორი მობრუნდებ-
ა სიდიდის შეუცვლელად. ეს იმას ნიშნავს, რომ როგორც არ
უნდა იყოს გაფანტვის მიმართულება, C წერტილი ყოველთვის მო-
თავსდება O წერტილის ირგვლივ შემოვლებული და $\frac{m_2}{M} p_1$ რა-
დიუსის მქონე წრეხაზზე. \vec{n}_{1c} ვექტორის მობრუნებასთან, ე. ი. წრე-

ხაზზე C წერტილის გადანაცვლებასთან ერთად იცვლება \vec{AC} და \vec{CB} ვექტორების სიდიდე და მიმართულება, მაგრამ ისინი ყოველთვის გვაძლევენ ნაწილაკების იმპულსებს დაჯახების შემდეგ.

ნახაზი გვიჩვენებს, რომ, თუ დაჯახებამდე პირველი ნაწილაკი მოძრაობდა \vec{AB} -ს მიმართულებით, დაჯახების შემდეგ იგი იმობრავებს \vec{AC} ვექტორის მიმართულებით. ზუსტად, რომელსაც დაჯახების შემდეგ იმპულსი შეადგენს დაჯახებამდე იმპულსთან, ეწოდება გაფანტვის (გაბნევის) კუთხე. ხშირად თვით დაჯახების მოვლენასაც გაფანტვის (გაბნევის) მოვლენა ეწოდება. დაჯახების შედეგად უძრავი ნაწილაკი (მეორე) ამობრავდება $A(O)$ ვექტორის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოხდა უკუცემა, ხოლო φ კუთხეს, რომელსაც მეორე ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება ადგენს დამჯახებელი ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულებასთან, უწოდებენ უკუცემის კუთხეს.

ნახაზიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ განსახილველ შემთხვევაში, როდესაც მცირე მასის ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის უძრავ ნაწილაკს, გაფანტვის კუთხემ შეიძლება მიიღოს ყოველნაირი



ნახ. 82.

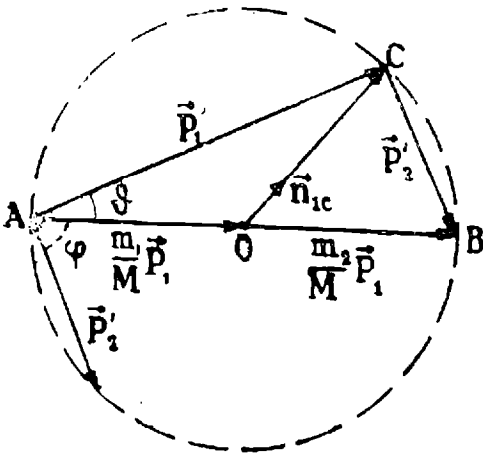
შნიშვნელობა 0-სა და π -ს შორის, ე. ი. პირველი ნაწილაკი შეიძლება ამობრავდეს როგორც წინ, ისე უკან. კუთხე გაფანტულ ნაწილაკებს შორის შეიძლება მოთავსებული იყოს $\frac{\pi}{2}$ -სა და π -ს შორის.

2. დიდი მასის ნაწილაკის დაჯახება მცირე მასის უძრავ ნაწილაკთან ($m_1 > m_2$). ამ შემთხვევაში (ნახ. 82) AO

მონაკვეთი მეტი იქნება OB მონაკვეთზე და A წერტილი მოთავსდება C წერტილის მიერ შემოწერილი წრეხაზის გარეთ.

C წერტილის სხვადასხვა მდებარეობას წრეხაზზე ეთანადება დაჯახებათა სხვადასხვა შემთხვევა. ნახაზის განხილვა გვიჩვენებს, რომ როდესაც დიდი მასის ნაწილაკი ეჯახება მცირე მასის უძრავ ნაწილას, გაფანტვის კუთხე არ შეიძლება იყოს ყოველნაირი. ამ შემთხვევაში არსებობს გაფანტვის მაქსიმალური φ_0 კუთხე (როდესაც AC ხაზი ეხება წრეხაზს). წრეხაზზე C წერტილის მოძრაობის დროს (B წერტილიდან B_1 წერტილამდე) გაფანტვის კუთხე ჯერ იზრდება, აღწევს φ_0 მაქსიმალურ მნიშვნელობას და შემდეგ ისევ მცირდება.

როგორც ვხედავთ, დიდი მასის მქონე ნაწილაკი მცირე მასის უძრავ ნაწილაკთან დაჯახების დროს არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება უკან დაბრუნდეს. მან შეიძლება შეიცვალოს



ნახ. 83.

მოძრაობის მიმართულება, მაგრამ გაფანტვის კუთხე ყოველთვის მახვილი იქნება. კუთხე გაფანტულ ნაწილაკებს შორის შეიძლება მოთავსებული იყოს 0 -სა და $\frac{\pi}{2}$ -ს შორის.

3. ტოლი მასების მქონე ნაწილაკების დაჯახება ($m_1 = m_2$). განსაკუთრებული შემთხვევა იქნება მაშინ, როდესაც $m_1 = m_2$; ამ შემთხვევაში O წერტილი შუაზე ყოფს AB მონაკვეთს და C წერტილის მიერ შემოხაზული წრეხაზი A წერტილზე გადის. როგორც 83-ე ნახაზი გვიჩვენებს, ამ შემთხვევაში გაფანტვის კუთხე მოთავსებულია $0 < \frac{\pi}{2}$ ფარგლებში. ვინაიდან A , B და C წერტილები ერთ წრეხაზზე მდებარეობენ, $\angle ACB$ იქნება მართი და, მაშასადამე, ტოლი მასის ნაწილაკები ერთმანეთის მიმართ ყოველთვის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით გაიფანტებიან $\left(\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

კუთხე მოთავსებულია $0 < \frac{\pi}{2}$ ფარგლებში. ვინაიდან A , B და C წერტილები ერთ წრეხაზზე მდებარეობენ, $\angle ACB$ იქნება მართი და, მაშასადამე, ტოლი მასის ნაწილაკები ერთმანეთის მიმართ ყოველთვის $\frac{\pi}{2}$ კუთხით გაიფანტებიან $\left(\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 45. ცენტრალური დრეკადი დაჯახება

განსაკუთრებით მარტივია ცენტრალური დრეკადი დაჯახების შემთხვევა. ასეთი დაჯახების დროს C სისტემაში ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ მიმართული არიან დაჯახებამდე სიჩქარეების საწინააღმდეგოდ, ე. ი. \vec{u}_{1c} მიმართულია \vec{v}_{1c} -ს საწინააღმდეგოდ; აქედან ვღებულობთ, რომ ცენტრალური დაჯახების შემთხვევაში

$$\vec{u}_{1c} = -\vec{v}_{1c} = -\frac{m_2}{M} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

$$\vec{u}_{2c} = -\vec{v}_{2c} = -\frac{m_1}{M} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

ამიტომ \vec{u}_1 -ისა და \vec{u}_2 -ისათვის მივიღებთ

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{M}, \quad (\text{IX, 16})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2 m_1 \vec{v}_1}{M}. \quad (\text{IX, 17})$$

გავარჩიოთ შემთხვევა, როდესაც დაჯახებამდე მეორე ნაწილაკი უძრავია. ამ შემთხვევაში $\vec{v}_2 = 0$ და წინა ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1, \quad (\text{IX, 18})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1. \quad (\text{IX, 19})$$

ხოლო იმპულსებისათვის გვექნება

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1, \quad (\text{IX, 20})$$

$$\vec{p}'_2 = \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1. \quad (\text{IX, 21})$$

გავარჩიოთ ეს ფორმულები მასების სხვადასხვა შეფარდებისათვის.

1. $m_1 < m_2$. პირველი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში \vec{u}_1 მიმართულია \vec{v}_1 -ის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. დამჯახებელი ნაწილაკი უკან ბრუნდება. იგივე შედეგი მიიღება 81-ე ნახაზიდან.

ცენტრალურ დაჯახებას ეთანადება შემთხვევა, როდესაც C წერტილი B' წერტილთან არის თანხვედნილი. მაშინ პირველი ნაწილაკის იმპულსი დაჯახების შემდეგ წარმოდგენილი იქნება \vec{OB}' ვექტორით, რომელიც დაჯახებამდე იმპულსის საწინააღმდეგოა. (IX, 20) ფორმულაც ადვილად გამოიყვანება ნახაზიდან, ვინაიდან, როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, $\vec{AB}' = \vec{AO} + \vec{OB}'$.

2. $m_1 > m_2$. პირველი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ \vec{p}'_1 მიმართულია \vec{p}_1 -ის გასწვრივ, ე. ი. დამჯახებელი ნაწილაკი დაჯახების შემდეგ განაგრძობს მოძრაობას წინანდელი მიმართულებით, მაგრამ შემცირებული იმპულსით (იმპულსის ნაწილი გადაეცა მეორე ნაწილაკს). 82-ე ნახაზი იმასვე გვიჩვენებს, ვინაიდან ცენტრალური დაჯახების დროს დამჯახებელი ნაწილაკის იმპულსი დაჯახების შემდეგ \vec{AB}' მონაკვეთით გამოიხატება.

3. $m_1 = m_2$. ამ შემთხვევაში (IX, 20, 21) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ დამჯახებელი ნაწილაკი ჩერდება ($\vec{p}'_1 = 0$), ხოლო მეორე ნაწილაკი, რომელიც დაჯახებამდე უძრავი იყო, იწყებს მოძრაობას ისეთი სიჩქარითა და იმპულსით, როგორიც ჰქონდა პირველ ნაწილაკს დაჯახებამდე ($\vec{p}'_2 = \vec{p}_1$).

განვიხილოთ კიდევ უფრო კერძო შემთხვევები. ვთქვათ, დამჯახებელი ნაწილაკის მასა იმდენად მცირეა უძრავი ნაწილაკის მასასთან შედარებით, რომ იგი შეიძლება უგულებელვყოთ, ე. ი. მივიღოთ, რომ $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$. მაშინ (IX, 20, 21) ფორმულები მოგვცემენ $\vec{p}'_1 = -\vec{p}_1$ და $\vec{p}'_2 = 2\vec{p}_1$. აქედან ვღებულობთ, რომ უსასრულო მასის უძრავ ნაწილაკთან დაჯახებისას (დაჯახება კედელთან) დამჯახებელი ნაწილაკი ბრუნდება უკან უცვლელი სიდიდის იმპულსით, ხოლო უძრავი ნაწილაკი (კედელი) ღებულობს დაჯახების მიმართულების მქონე ორმაგ იმპულსს.

მეორე ზღვრული შემთხვევა გვექნება, როდესაც ძალიან დიდი მასის ნაწილაკი ეჯახება ძალიან მცირე მასის ნაწილაკს, ე. ი. როდესაც ვიხილავთ ზღვარს $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$. ამ შემთხვევაში (IX, 18, 19) ფორმულებში შეიძლება უგულებელვყოთ m_2 , m_1 -თან შედარებით და მივიღებთ

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 \quad \vec{p}'_1 = \vec{p}_1, \tag{IX, 22}$$

$$\vec{u}_2 = 2\vec{v}_1, \quad \vec{p}'_2 = m_2\vec{u}_2 = 0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში დამჯახებელი ნაწილაკი განაგრძობს მოძრაობას უცვლელი სიჩქარითა და იმპულსით, ხოლო უძრავი ნაწილაკი იწყებს მოძრაობას ორჯერ მეტი სიჩქარით, მაგრამ ნულოვანი იმპულსით (ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ $m_2 \rightarrow 0$).

ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ უდიდესი სიჩქარე, რომელიც შეიძლება მიიღოს უძრავმა ნაწილაკმა მასთან რაიმე ნაწილაკის დაჯახების შედეგად არ აღემატება დამჯახებელი ნაწილაკის ორმაგ სიჩქარეს. სიჩქარის ეს უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც დამჯახებელი ნაწილაკის მასა გაცილებით მეტია უძრავი ნაწილაკის მასაზე. შემდეგში ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ამ საკითხს.

ვისარგებლოთ (IX, 16, 17) ფორმულებით, რათა გამოვიყენოთ დრეკადი ცენტრალური დაჯახების ერთი დამახასიათებელი თვისება. გამოვითვალოთ ნაწილაკების ფარდობითი სიჩქარე, ე. ი. სიჩქარეების სხვაობა დაჯახების შემდეგ. ამისათვის გამოვაკლოთ \vec{u}_1 -ს \vec{u}_2 , მივიღებთ

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \quad (\text{IX}, 23)$$

როგორც ვხედავთ, დრეკადი ცენტრალური დაჯახების დროს ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება, იგი იცვლის მხოლოდ მიმართულებას საწინააღმდეგოდ.

§ 46. ენერგიის გადაცემა დრეკადი დაჯახების დროს

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ რა ენერგიის რაოდენობას გადასცემს დამჯახებელი ნაწილაკი უძრავ ნაწილაკს დრეკადი დაჯახების დროს, საჭიროა გავიგოთ როგორია უძრავი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახების შემდეგ. გამოვიყენოთ ამისათვის (IX, 13) ფორმულა. მისი კვადრატში აყვანა მოგვცემს

$$u_2^2 = \frac{2m_1^2}{M^2} v_1^2 - \frac{2m_1^2}{M^2} v_1^2 \cos \varphi_c,$$

სადაც φ_c არის კუთხე \vec{v}_1 და \vec{n}_{1c} ვექტორებს შორის; აქედან მივიღებთ

$$u_2 = \frac{\sqrt{2} m_1}{M} v_1 (1 - \cos \varphi_c)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IX}, 24)$$

იმისდა მიხედვით, თუ როგორია φ_c კუთხე, მივიღებთ u_2 -ის სხვადასხვა მნიშვნელობას. გადაცემული კინეტიკური ენერგიისათვის მივიღებთ

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v_1^2}{2} (1 - \cos \varphi_c). \quad (\text{IX, 25})$$

აქ $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ არის მოძრავი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია დაჯახებამდე, ხოლო $\frac{m_2 u_2^2}{2}$ — უძრავი ნაწილაკისათვის დაჯახების შედეგად გადაცემული კინეტიკური ენერგია. მათი შეფარდება გვიჩვენებს კინეტიკური ენერგიის რა ნაწილი გადაეცა მეორე ნაწილაკს დაჯახების შედეგად

$$\frac{m_2 u_2^2}{2} / \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \varphi_c). \quad (\text{IX, 26})$$

მოყვანილი ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ მაქსიმალურ სიჩქარეს და, მაშასადამე, მაქსიმალურ კინეტიკურ ენერგიას უძრავი ნაწილაკი მიიღებს ცენტრალური დაჯახების დროს, ე. ი. როდესაც $\varphi_c = \pi$ (\vec{m}_1 ვექტორი მიმართულია \vec{v}_1 -ის საწინააღმდეგოდ). ასეთი დაჯახების შემთხვევაში გვექნება

$$u_{2max} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1, \quad (\text{IX, 27})$$

$$\left(\frac{m_2 u_2^2}{2} \right)_{max} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (\text{IX, 28})$$

გავარჩიოთ ახლა მასებზე შეფარდების სხვადასხვა შემთხვევა:

ა). $m_1 < m_2$ — მცირე მასის ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის ნაწილაკს. ამ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ

$$\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \ll 1$$

და

$$u_{2max} \ll v_1.$$

ე. ი. უძრავი ნაწილაკი ვერ მიიღებს v_1 -ზე მეტ სიჩქარეს. რაც უფრო ნაკლებია m_1 შედარებით m_2 -თან მით უფრო ნაკლებია მეორე ნაწილაკის მიერ მიღებული სიჩქარე და კინეტიკური ენერგია. ზღვრულ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$, ე. ი. როდესაც მოძრავი ნაწილაკის მასა უმნიშვნელოა უძრავი ნაწილაკის მასასთან შე-

დარებით, მაშინ $u_{2max} \rightarrow 0$. ამ შემთხვევაში უძრავი ნაწილაკი უძრავი რჩება, დამჯახებელი ნაწილაკი კი უკან ბრუნდება უცვლელი სიჩქარით.

ბ). $m_1 > m_2$. ამ შემთხვევაში

$$\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \gg 1$$

და

$$u_{2max} \gg v;$$

ე. ი. უძრავი ნაწილაკი მიიღებს დამჯახებელი ნაწილაკის სიჩქარეზე, v_1 -ზე, მეტ სიჩქარეს. თუ m_1 ძალიან დიდია m_2 -თან შედარებით, ე. ი. თუ შესაძლებელია m_2 -ის უგულვებლყოფა m_1 -თან შედარებით, მივიღებთ

$$u_{2max} = 2 v_1: \left(\frac{m_2 v_2^2}{2} \right)_{max} = 2 m_2 v_1^2.$$

მაშასადამე, უძრავი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახების შემდეგ ორჯერ მეტია, ვიდრე დამჯახებელი ნაწილაკის სიჩქარე დაჯახებამდე. ამაზე მეტი სიჩქარის მიღება უძრავი ნაწილაკის მიერ შეუძლებელია. სათანადოდ გამოითვლება გადაცემული კინეტიკური ენერგიის ნაწილიც.

3). $m_1 = m_2$. ამ შემთხვევაში $\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} = 1$ და $u_2 = u_1$, ე. ი. უძრავი ნაწილაკი დაჯახების შემდეგ მოძრაობს იმ სიჩქარით, რომელიც ჰქონდა დამჯახებელ ნაწილაკს დაჯახებამდე, ხოლო თვით დამჯახებელი ნაწილაკი კი ჩერდება. დამჯახებელი ნაწილაკის მთელი კინეტიკური ენერგია გადაეცემა უძრავ ნაწილაკს.

§ 47. აბაღრმადი ცენტრალური დაჯახება

დრეკადი ცენტრალური დაჯახების განხილვისას ჩვენ გამოვარკვეეთ, რომ ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ გამოისახებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2) \vec{v}_1 + 2 m_2 \vec{v}_2}{M},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1) \vec{v}_2 + 2 m_1 \vec{v}_1}{M},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = -(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფარდობითი სიჩქარე იცვლის მხოლოდ მიმართულებას და არა სიდიდეს. ვინაიდან არადრეკადი დაჯახებისას შინაგანი ენერგია იცვლება (იზრდება ან მცირდება), ცხადია, რომ ნაწილაკების სიჩქარეები დაჯახების შემდეგ არ იქნება ისეთი, როგორც დრეკადი დაჯახების დროს, და, მაშასადამე, არც ფარდობითი სიჩქარე დარჩება უცვლელი სიდიდის. საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ იცვლება ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე არადრეკადი დაჯახებისას, ექსპერიმენტულად პირველად შესწავლილი იყო ნიუტონის მიერ. მან გამოარკვია, რომ ცდების შედეგები უმეტეს შემთხვევაში შემდეგი დაშვებით აიწერება. ყოველი არადრეკადი დაჯახების დროს ფარდობითი სიჩქარე კლებულობს e -ჯერ, სადაც e არის განყენებული რიცხვი, დამოკიდებული დამჯახებელი ნაწილაკების ან სხეულების გვარობაზე. ამ სიდიდეს, რომელიც არადრეკადობის ხარისხის მაჩვენებელია, ეწოდება ალდგენის კოეფიციენტი.

ალდგენის კოეფიციენტის შემოღების შემდეგ (IX, 23) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს (ვინაიდან დაჯახება ცენტრალურია, ვექტორის ნიშანი შეიძლება მოიხსნას):

$$u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1). \quad (\text{IX}, 29)$$

თუ დაჯახება პირველი გვარისაა, ე. ი. კინეტიკური ენერგია მცირდება, ფარდობითი სიჩქარეც შემცირდება და e იქნება ერთზე ნაკლები $e < 1$. მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახების დროს $e > 1$; აქედან ცხადია, რატომ ეწოდება e სიდიდეს ალდგენის კოეფიციენტი. იგი გვიჩვენებს, თუ რამდენად ალდგება ის ფარდობითი სიჩქარე, რომელიც ვექტონდა დაჯახებამდე. საბოლოოდ ვლებულობთ:

1. $e = 1$ — დრეკადი დაჯახება;
2. $e < 1$ — პირველი გვარის არადრეკადი დაჯახება;
3. $e > 1$ — მეორე გვარის არადრეკადი დაჯახება.

(IX, 29) ფორმულის და იმპულსის მუდმივობის კანონის საშუალებით შეიძლება გამოვიყენოთ ფორმულები u_1 და u_2 სიჩქარეებისათვის დაჯახების შემდეგ. ფორმულებიდან:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1)$$

შვილებით

$$u_1 = \frac{(m_1 - e m_2) v_1 + m_2 (1 + e) v_2}{M},$$

$$u_2 = \frac{(m_1 - e m_2) v_2 + m_1 (1 + e) v_1}{M}.$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც ერთ-ერთი ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია ($v_2 = 0$), გვექნება

$$u_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad (\text{IX, 30})$$

$$u_2 = \frac{m_1 (1 + e)}{m_1 + m_2} v_1. \quad (\text{IX, 31})$$

მიღებული ფორმულების საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილება არადრეკადი დაჯახების დროს, მივიღებთ

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2, \quad (\text{IX, 32})$$

სადაც ΔE_k არის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდი. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია ალდვენის კოეფიციენტი, ΔE_k -სათვის მივიღებთ სხვადასხვა მნიშვნელობას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მეორე ნაწილაკი უძრავია ($v_2 = 0$), და გამოვითვალოთ პირველი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგიის ის ნაწილი, რომელიც იხარჯება შინაგანი ენერგიის გაზრდაზე. (IX,32) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2). \quad (\text{IX, 33})$$

თუ დამჯახებელი ნაწილაკის მასა ძალიან დიდია უძრავი ნაწილაკის მასასთან შედარებით ($m_1 \gg m_2$), მაშინ შინაგან ენერგიად გარდაიქმნება საწყისი კინეტიკური ენერგიის მცირე ნაწილი. თითქმის მთელი კინეტიკური ენერგია დაიხარჯება უძრავი ნაწილაკის ასამოდრავებლად. თუ შებრუნებით, მსუბუქი ნაწილაკი ეჯახება დიდი მასის ნაწილაკს ($m_1 \ll m_2$), კინეტიკური ენერგიის დიდი ნაწილი დაიხარჯება შინაგანი ენერგიის გაზრდაზე (მაკროსკოპული სხეულების შემთხვევაში — დეფორმაციაზე) და ძალიან მცირე ნაწილი გამოიყენება უძრავი ნაწილაკის ასამოდრავებლად.

არადრეკადი დაჯახების მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ე. წ. აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება, როდესაც დაჯახების შემდეგ ნაწილაკები ერთდებიან და მოძრაობენ როგორც ერთი ნაწილაკი. ცხადია, რომ ამ შემთხვევას ეთანადება ნულის

ტოლი აღდგენის კოეფიციენტი, ვინაიდან დაჯახების შემდეგ ფარდობითი სიჩქარე ნულის ტოლი ხდება. წინა ფორმულები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M},$$

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = u_1.$$

შინაგანი ენერჯიის გაზრდაზე დახარჯული კინეტიკური ენერჯიისათვის გვექნება

$$-\Delta E_k = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (\text{IX}, 34)$$

თუ ერთ-ერთი, მაგალითად მეორე ნაწილაკი, უძრავია ($v_2 = 0$), წინა ფორმულა შეიძლება დაიწეროს შემდეგნაირად:

$$-\Delta E_k = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 v_1^2. \quad (\text{IX}, 35)$$

მამრავლი $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ გვიჩვენებს საწყისი კინეტიკური ენერჯიის რა ნაწილი იხარჯება შინაგანი ენერჯიის გაზრდაზე.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

1. ვთქვათ, ელექტრონი, რომლის მასა არის m , ხოლო სიჩქარე v , ეჯახება უძრავ ატომს M მასით. დავუშვათ, რომ დაჯახების შემდეგად ატომი აიგზნება, ე. ი. გადადის უფრო მაღალ ენერჯეტიკულ დონეზე, ხოლო დამჯახებელი ელექტრონი ეკვრება ატომს (აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება). თუ აგზნების ენერჯია არის ε , როგორი უნდა იყოს ელექტრონის მინიმალური საწყისი სიჩქარე იმისათვის, რომ მოხდეს ატომის აგზნება? პირველი შეხედვით (ენერჯიის კანონის თანახმად) ამისათვის საკმარისია, რომ დამჯახებელი ელექტრონის კინეტიკური ენერჯია ε -ზე მეტი ან, უკიდურეს შემთხვევაში, მისი ტოლი იყოს, მაგრამ (IX, 35) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ დამჯახებელ ელექტრონს არ შეუძლია გადასცეს ატომს მთელი თავისი კინეტიკური ენერჯია. ჩვენი შემთხვევისათვის $m_1 = m$, $m_2 = M$, $v_1 = v$, ხოლო $-\Delta E_k = \varepsilon$. ამიტომ გვექნება

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{m + M}{M} \varepsilon,$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \left(1 + \frac{m}{M} \right) \epsilon. \quad (\text{IX}, 36)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ატომს გადაეცეს აგზნებისათვის საჭირო ენერგია ϵ , საჭიროა, დამჯახებელ ნაწილაკს მქონდეს (IX, 36) ფორმულით განსაზღვრული ან მასზე მეტი კინეტიკური ენერგია. თუ დამჯახებელი ნაწილაკი არის ელექტრონი, მასების შეფარდებისათვის მიახლოებით მივიღებთ:

$$\frac{m}{M} \sim \frac{1}{2000},$$

რაც გვიჩვენებს, რომ დამჯახებელი ელექტრონის კინეტიკური ენერგია უმნიშვნელოდ მეტი უნდა იყოს აგზნების ენერგიაზე.

სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ ატომს ეჯახება ისეთივე მასის მქონე ნაწილაკი, როგორიც თვით ატომია. ამ შემთხვევაში

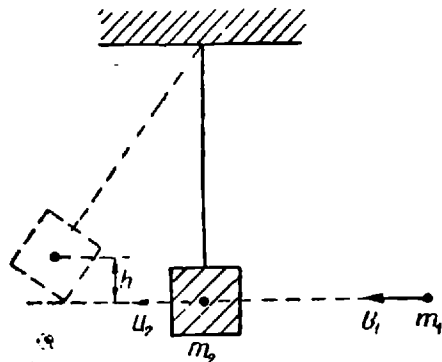
$$\frac{m}{M} \sim 1$$

და (IX, 36) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{1}{2} m v^2 \sim 2 \epsilon,$$

ე. ი. აგზნებისათვის საჭიროა, რომ დამჯახებელი ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია დაახლოებით ორჯერ მეტი იყოს, ვიდრე აგზნების ენერგია.

აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება გამოიყენება ე. წ. ბალისტიკურ საქანში, რომლის დანიშნულებაცაა მოძრაობის სხეულის, მაგალითად გასროლილი ტყვიის, სიჩქარის გაზომვა. ქვეშით სავსე ყუთი ჩამოკიდებულია თოკზე და იმყოფება წონასწორობაში. მას ესვრიან ტყვიას, რომელიც შედის ყუთში და ქვიშასთან ხახუნის გამო რჩება შიგ (ნახ. 84). საქანი მიიღებს გარკვეულ სიჩქარეს, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 84.

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

სადაც m_1 არის ტყვიის მასა, ხოლო m_2 —ქვიშიანი ყუთის მასა, მიღებული ბიძვის გამო საქანი აიწვევს გარკვეულ სიმაღლეზე, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

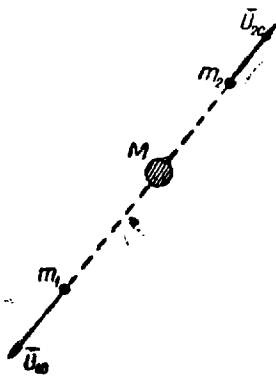
$$h = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)^2 g};$$

h სიმაღლის გაზომვა მოგვცემს საშუალებას გამოვითვალოთ ტყვიის სიჩქარე v_1 , ვინაიდან ყველა დანარჩენი სიდიდე ცნობილია.

რხევითი მოძრაობის განხილვის დროს ჩვენ კიდევ დავუბრუნდებით ბალისტიკურ საქანს.

§ 48. ნაწილაკის დაშლა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ერთ ფრიალ მნიშვნელოვან მოვლენას, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული ნაწილაკთა დაჯახების მოვლენასთან. ბუნებაში და ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ ხშირად ვხვდებით შემთხვევას, როდესაც ერთი ნაწილაკი ან სხეული იშლება ორ ან რამდენიმე ნაწილად და წარმოშობილი ნაწილაკები იწყებენ მოძრაობას სხვადასხვა სიჩქარით. ასეთი მოვლენაა, მაგალითად, ყუმბარის აფეთქება, როდესაც მისი ნამსხვრევე-



ნახ. 85.

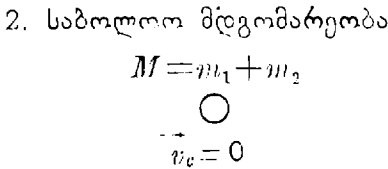
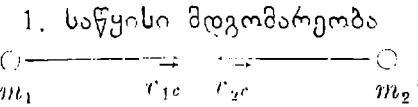
ბი სხვადასხვა მიმართულებით გაიფანტებიან. განსაკუთრებით ხშირია ნაწილაკის დაშლის ასეთი მოვლენა ბირთვული და ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში. კარგად არის ცნობილი რადიოაქტიური ბირთვების გარდაქმნა, როდესაც ბირთვებიდან გამოიტყორცნება α -ნაწილაკი, პროტონი, ნეიტრონი, ელექტრონი და ა. შ. და ბირთვი კი სხვა ბირთვად გარდაიქმნება. მართალია, ამ უკანასკნელ შემთხვევებში ნაწილაკები

იმდენად სწრაფად მოძრაობენ, რომ მათთვის კლასიკური მექანიკა აღარ გამოიყენება და საჭიროა გამოთვლების წარმოება ფარდობითობის თეორიის მიხედვით, მაგრამ დაშლის მოვლენის ხასიათზე გარკვეული წარმოდგენის შესაქმნელად ჩვენთვის საკმარისია კლასიკური განხილვა.

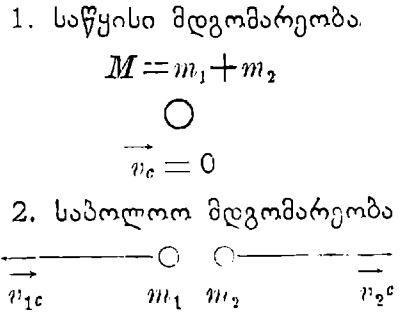
განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც M მასის უძრავი ნაწილაკი იშლება ორ ნაწილაკად მასებით— m_1 და m_2 და სიჩქარეებით— v_1c და v_2c (ნახ. 85) (რაკი M ნაწილაკი უძრავია, აღებუ-

ლია (C სისტემა). ეს მოვლენა არის აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახების "შებრუნებულ" მოვლენა. მართლაც, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში საწყის მომენტში ჩვენ გვაქვს ორი მოძრავი ნაწილაკი, რომლებიც დაჯახების შედეგად ერთდებიან და გვაძლევენ ახალ უძრავ ნაწილაკს (თუ დაჯახება განიხილება C სისტემაში). დაშლის შემთხვევაში კი საწყის მომენტში გვაქვს ერთი უძრავი ნაწილაკი, რომელიც რაღაც შინაგანი პროცესის შედეგად იშლება ორ მოძრავ ნაწილაკად:

აბსოლუტურად არადრეკადი დაჯახება



დაშლა ორ ნაწილაკად



აღვნიშნოთ საწყისი ნაწილაკის შინაგანი ენერგია ϵ -ით, ხოლო დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკების შინაგანი ენერგიები ϵ_1 -ითა და ϵ_2 -ით. მაშინ იმპულსისა და ენერგიის მუდმივობის კანონები მოგვცემენ

$$m_1 v_{1c} + m_2 v_{2c} = 0,$$

$$\epsilon_1 + \frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \epsilon_2 + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} = \epsilon.$$

თუ სიჩქარეების მაგიერ შემოვიღებთ იმპულსებს. გვექნება

$$p_{1c} + p_{2c} = 0,$$

$$\epsilon_1 + \frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \epsilon_2 + \frac{p_{2c}^2}{2m_2} = \epsilon. \quad (IX, 37)$$

მეორე განტოლებიდან ადვილად მივიღებთ

$$\epsilon - \epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_2}. \quad (IX, 38)$$

ვინაიდან მარჯვენა მხარე (კინეტიკური ენერგიების ჯამი) დადებითია, დაშლა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყისი ნაწილაკის შინაგანი ენერგია მეტია, ვიდრე დაშლის შე-

დეგად მიღებული ნაწილაკების შინაგანი ენერგიების ჯამი ე. ი. როდესაც

$$\varepsilon > \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{IX, 39})$$

სხვაობას

$$\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{დამ.}} \quad (\text{IX, 40})$$

ეწოდება დაშლის ენერგია. ვინაიდან იმპულსის კანონის თანახმად $\vec{p}_{2f} = -\vec{p}_{1c}$. მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\varepsilon_{\text{დამ.}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1c}^2.$$

თუ შემოვიღებთ ე. წ. დაყვანილ მასას

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{p_{1c}^2}{2\mu}, \quad (\text{IX, 41})$$

$$p_{1c} = \sqrt{2\mu\varepsilon_{\text{დამ.}}} \quad (\text{IX, 42})$$

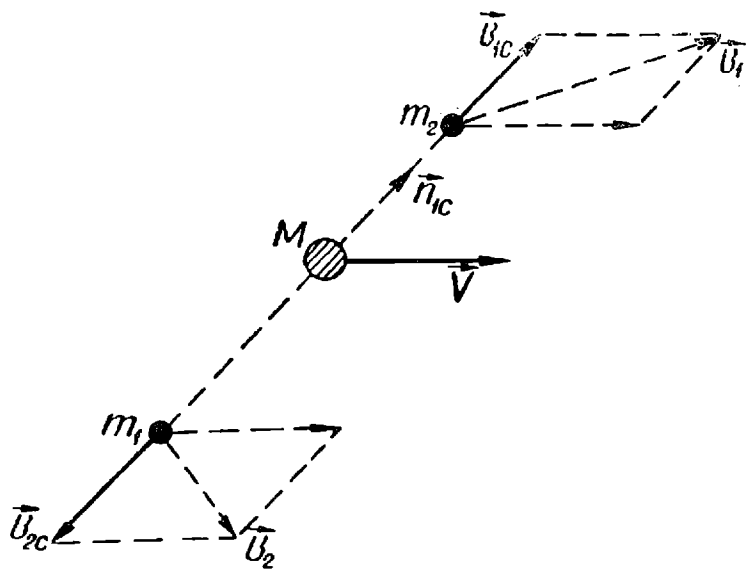
ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკის იმპულსი, თუ ცნობილია დაშლის ენერგია და m_1 და m_2 მასები. ცხადია, რომ დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკები მოძრაობენ ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართულებით და მათი მასების უკუპროპორციული სიჩქარეებით. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საწყისი ნაწილაკი მოძრაობს \vec{V} სიჩქარით, ე. ი. გადავიდეთ C სისტემიდან ლაბორატორიულ სისტემაზე (ნახ. 86). პირველი დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკის სიჩქარე \vec{v}_1 მიიღება \vec{v}_{1c} სიჩქარიდან \vec{V} სიჩქარის დამატებით:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1c} + \vec{V} = \sqrt{2\mu\varepsilon_{\text{დამ.}}} \vec{n}_{1c} + \vec{V}, \quad (\text{IX, 43})$$

სადაც \vec{n}_{1c} არის ერთეულოვანი ვექტორი, მაჩვენებელი პირველი ნაწილაკის სიჩქარის მიმართულებასა C სისტემაში. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ პირველი ნაწილაკის სიჩქარე, თუ ცნობილია დაშლის ენერგია და ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულება C სისტემაში (\vec{n}_{1c} ვექტორი)¹. \vec{n}_{1c} ვექტორის პოვნა ჩვენ

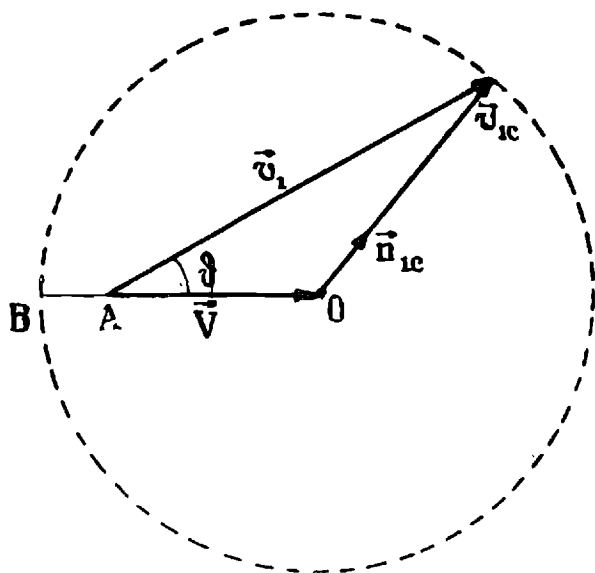
¹ როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, დაშლის შედეგად წარმოშობილი ნაწილაკები ლაბორატორიულ სისტემაში მოძრაობენ იმ სხარეს, საითკენაც მოძრაობდა M ნაწილაკი დაშლამდე.

მონაცემების საშუალებით შეუძლებელია, ამისათვის საჭიროა დაშლის მექანიზმის ცოდნა.



ნახ. 86.

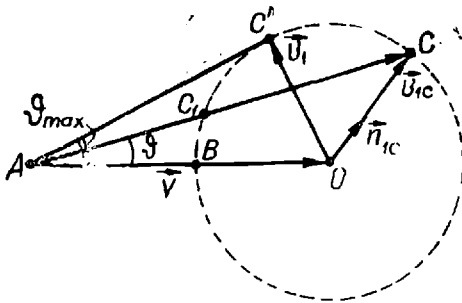
გეომეტრიულად (IX, 43) ფორმულა გამოიხატება დიაგრამით, რომელიც 87-ე ნახაზზეა განხილული.



ნახ. 87.

ეს დიაგრამა ეთანადება შემთხვევას, როდესაც $V < v_{10}$. დაშლის შედეგად მიღებული პირველი ნაწილაკი გამოიტყორცნება მ

კუთხით საწყისი სიჩქარის მიმართ. ამ კუთხის ცვლას ეთანადება C წერტილის ვადანაცვლება r_{1c} რადიუსის მქონე წრეხაზზე, რომელიც გავლებულია \vec{V} ვექტორის ბოლო წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან. ნახაზიდან ჩანს, რომ ნაწილაკის გამოტყორცნა შესაძლებელია ნებისმიერი კუთხით საწყისი სიჩქარის მიმართ. მეორე შემთხვევა მიიღება მაშინ, როდესაც $V > r_{1c}$. ამ შემთხვევაში $A()$



ნახ. 88.

მონაკვეთი $()C$ მონაკვეთზე ნეტი იქნება, ე. ი. A წერტილი მოთავსებული იქნება წრეხაზის გარეთ და გამოტყორცნის კუთხეყოველთვის მახვილი იქნება (ნახ. 88). მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღება მაშინ, როდესაც მონაკვეთი იქნება წრეხაზის მხები. ცხადია, რომ ამ კუთხისათვის გვექნება

$$\sin \varphi_{max} = \frac{r_{1c}}{V}.$$

ამ შემთხვევისათვის დამახასიათებელია აგრეთვე ის გარემოება, რომ გამოტყორცნილი ნაწილაკის მოძრაობის ერთ მიმართულებას ეთანადება სიჩქარის სიდიდის ორი მნიშვნელობა (მაგალითად, AC მიმართულებას ეთანადება AC და AC_1 სიჩქარეები).

თუ ცნობილია ერთ-ერთი გამოტყორცნილი ნაწილაკის სიჩქარე, იმპულსის-მუდმივობის კანონიდან შეიძლება ვიპოვოთ მეორე ნაწილაკის სიჩქარე.

გაცილებით უფრო რთულია შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი იშლება სამ ან მეტ ნაწილაკად. ამ შემთხვევაში დაშლის ენერგია ცალსახად აღარ საზღვრავს დაშლის შედეგად მიღებული ნაწილაკების სიჩქარეების სიდიდეებს. კიდევაც რომ ცნობილი იყოს მათი მასები.

ათვის არაინერციული სისტემები

§ 49. უ მ ს ა ვ ა ლ ი

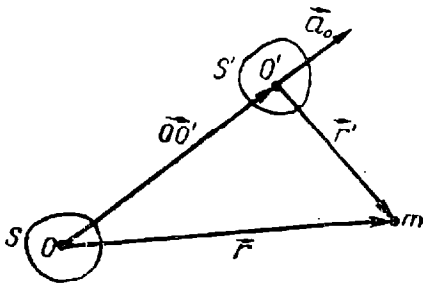
წინა თავებში მიღებული ყველა შედეგი გამოყვანილი იყო იმ დაშვებით, რომ წერტილების მოძრაობა განიხილება ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ. მხოლოდ ასეთი ათვლის სისტემების მიმართ არის მართებული ინერციის პრინციპი, იმპულსისა და ენერგიის მუდმივობის კანონები, მოძრაობის განტოლებები და მექანიკის სხვა კანონები. მაგრამ ძალიან ხშირად ჩვენ გვიხდება დაკვირვებების წარმოება არაინერციული სისტემებიდან, ე. ი. ისეთი სისტემებიდან, რომლებიც ინერციული სისტემების მიმართ აჩქარებულად მოძრაობენ, ასეთ არაინერციულ სისტემას წარმოადგენს, მაგალითად, აჩქარებულად ან შენელებულად მოძრავი მატარებელი, აჩქარებულად მოძრავი ლიფტი, რაკეტა, დედამიწა (ვინაიდან იგი ბრუნავს თავისი ღერძის ირგვლივ) და სხვა. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი მაგალითი არაინერციული სისტემისა არის დედამიწა, ვინაიდან სწორედ იგი წარმოადგენს ათვლის სისტემას ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ, თუ როგორ მიმდინარეობენ მექანიკური მოვლენები და როგორი სახე აქვთ მექანიკის კანონებს ასეთი არაინერციული სისტემების მიმართ. ვინაიდან ზოგადი არაინერციული სისტემის განხილვა საკმაოდ რთულია, ჩვენ განვიხილავთ ორ უმარტივეს შემთხვევას: 1. როდესაც არაინერციული სისტემა მოძრაობს ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივი აჩქარებით: $\vec{a} = \text{const}$ და 2. როდესაც არაინერციული სისტემა ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ მუდმივი კუთხური სიჩქარით: $\vec{\omega} = \text{const}$. საჭიროა აღინიშნოს, რომ არაინერციული სისტემების განხილვა იმით კი არ არის, გამოწვეული, რომ ინერციული სისტემის თვალსაზრისით ჩვენ არ შეგვიძლია რაიმე მექანიკური მოვლენის ახსნა; მაგალითად, დედამიწაზე მიმდინარე ყველა მექანიკუ-

რი მოვლენა, შეიძლება მარტივად აიხსნას ინერციული სისტემის თვალსაზრისით, ე. ი. ისეთი სისტემის თვალსაზრისით, რომლის მიმართაც დედამიწა ბრუნავს; ეს ახსნა დამყარებული იქნება მექანიკის იმ კანონების გამოყენებაზე, რომლებიც ჩამოყალიბებულია ინერციული სისტემისათვის. როგორც ვნახავთ, იმავე მოვლენების ახსნა არაინერციულ სისტემაში მყოფი დამკვირვებლის მიერ შეიძლება მექანიკის კანონებში გარკვეული ცვლილებების შეტანით. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ ძალიან ხელსაყრელია ათვლის სისტემად არაინერციული სისტემის არჩევა, ვინაიდან ეს მნიშვნელოვნად ამარტივებს მოვლენების აღწერასა და ახსნას.

§ 50. სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად მოძრაობი არაინერციული სისტემა

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც S' სისტემა მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად S ინერციული სისტემის მიმართ. ასეთი სისტემები ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში.



ნახ. 89.

თუ დედამიწას გარკვეული მიახლოებით ინერციულ სისტემად ჩავთვლით, აჩქარებულად ან შენელებულად მოძრაობი მატარებელი, ტრამვაის ვაგონი და ყოველი ეტლი იქნება ასეთი არაინერციული სისტემა. ყველასათვის ცნობილია, რომ ასეთ სისტემაში დამკვირვებელი ცხადად გრძნობს ახალი, როგორც

ამბობენ, ინერციის ძალის მოქმედებას, რომელიც ამოძრავებს მას, მაგალითად, წინ ან უკან.

ეთქვათ, S' სისტემა მოძრაობს S სისტემის მიმართ \vec{OO}' ვექტორის გასწვრივ (ნახ. 89). გარდაქმნის ფორმულებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO}',$$

$$t' = t.$$

ეს ფორმულები ისეთივე სახისაა, როგორც გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, იმ განსხვავებით, რომ განსახილველ შემთხვევაში \vec{OO}' არ არის დროის პროპორციული. ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0, \quad (X, 1)$$

სადაც \vec{a}_0 -ით აღნიშნულია S' სისტემის აჩქარება S სისტემის მიმართ. \vec{a} და \vec{a}' წარმოადგენენ განსახილველი ნაწილაკის აჩქარებებს ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. გადამრავლებით ნაწილაკის მასაზე და იმის მხედველობაში მიღებით, რომ ინერციულ სისტემაში

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

სადაც \vec{F} არის ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, გამოწვეული გარეშე სხეულების მოქმედებით, მივიღებთ

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (X, 2)$$

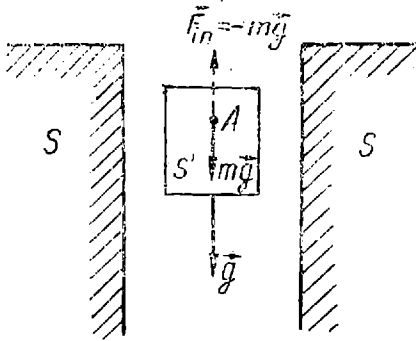
ჩვენ ვხედავთ, რომ არაინერციულ სისტემაში მასის ნამრავლი აჩქარებაზე არ უდრის იმ ძალას, რომელიც მოქმედებდა ნაწილაკზე ინერციულ სისტემაში. განტოლების მარჯვენა მხარეს დამატებული აქვს— $m\vec{a}_0$ სიდიდე—მასის ნამრავლი არაინერციული სისტემის უარყოფით აჩქარებაზე. (X, 2) ფორმულა იმას გვიჩვენებს, რომ მოძრაობის დინამიკური განტოლება (ნიუტონის მეორე კანონი) არ რჩება ინვარიანტული აჩქარებულად მოძრავ ათვლის სისტემაზე გადასვლის დროს. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია შევინარჩუნოთ ნიუტონის მეორე კანონის ფორმა (მასის ნამრავლი აჩქარებაზე უდრის ძალას), თუ განვაზოგადებთ ძალის ცნებას და— $m\vec{a}_0$ სიდიდესაც ვუწოდებთ ძალას მიუხედავად იმისა, რომ იგი არ არის გამოწვეული რაიმე სხეულებთან ურთიერთქმედებით; ამ დამატებით ძალას

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0, \quad (X, 3)$$

რომელიც გამოწვეულია ათვლის სისტემის არაინერციულობით, ეწოდება ინერციის ძალა. იგი ყოველთვის მიმართულია ათვლის სისტემის აჩქარების საწინააღმდეგოდ.

ჩვენ ვხედავთ, რომ ერთისა და იმავე ნაწილაკის მოძრაობა არ წარმოებს ერთნაირად ინერციული და არაინერციული სისტემების თვალსაზრისით იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც საწყისი პირობები ერთნაირად არის შერჩეული. ის ფაქტი, რომ არაინერციულ სისტემაში ნაწილაკი მოძრაობს ისე, თითქოს მასზე მოქმედებს დამატებითი ძალა— $m\vec{a}_0$, ნათლად ჩანს მრავალი მოვლენიდან. გავიხსენოთ თუნდაც ის ყველასათვის ცნობილი ფაქტი, რომ მატარებლის სწრაფად ამოძრავების ან შეჩერების დროს მასში მყოფი დამკვირვებელი განიცდის ინერციის ძალის მოქმედებას; ეს ძალა სწორედ ზემოთ მოყვანილი ფორმულით არის გამოსახული. მატარებელი მისი სწრაფი ამოძრავების დროს წარმოადგენს არაინერციულ

სისტემას, რომლის აჩქარება მიმართულია მოძრაობის გასწვრივ, ამიტომ ყოველი სხეული ამ სისტემის მიმართ განიცდის აჩქარების საწინააღმდეგოდ მიმართული ინერციული ძალის მოქმედებას, რის გამოც მატარებლის საკმაო აჩქარებით ამოძრავების დროს, დამკვირვებელი გრძნობს უკან მიმართული ძალის მოქმედებას, ხოლო მატარებლის სწრაფად დამუხრუჭების დროს დამკვირვებელი განიცდის წინ მიმართული ძალის მოქმედებას.



ნახ. 90.

როგორც ინერციის ძალის მოქმედების მეორე მაგალითი განვიხილოთ ლიფტის ვარდნა შახტში (ნახ. 90). დავუშვათ, რომ ლიფტი თავისუფლად ვარდება შახტში. ვინაიდან ვარდნა წარმოადგენს თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას, ლიფტი

იქნება ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული სახის არაინერციული სისტემა. ამიტომ მასში მოთავსებული ყველა სხეული განიცდის ინერციის ძალის მოქმედებას. თუ ვარდნის აჩქარებას აღვნიშნავთ \vec{g} -თი, ინერციის ძალისათვის მივიღებთ

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{g}.$$

განვიხილოთ ლიფტის შიგნით მოთავსებული რაიმე A ნაწილაკი-ინერციული სისტემის თვალსაზრისით ამ ნაწილაკზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა—დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც გამოიხატება ფორმულით

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

ამიტომ ამ სისტემის თვალსაზრისით A ნაწილაკი მოძრაობს ვერტიკალურად ქვევით \vec{g} აჩქარებით (თუ საწყის მომენტში იგი უძრავი იყო). სულ სხვა სახით წარმოგვიდგება იგივე მოვლენა (A ნაწილაკის მოძრაობა) S' არაინერციული სისტემის (ლიფტის) მიმართ. ამ სისტემის მიმართ A ნაწილაკზე, გარდა \vec{F} ძალისა, მოქმედებს კიდევ დამატებითი ინერციის ძალა \vec{F}_{in} და ამიტომ მისი მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} - m\vec{g} = 0;$$

აქედან ვღებულობთ

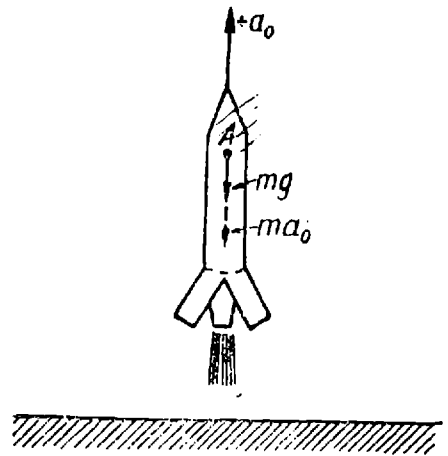
$$\vec{a}' = 0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ლიფტის მიმართ ნაწილაკის აჩქარება ნულის ტოლია და, თუ ნაწილაკი საწყის მომენტში უძრავი იყო (ლიფტის მიმართ), იგი უძრავი დარჩება შემდეგშიც. ეს იმას ნიშნავს, რომ ლიფტში მყოფ დამკვირვებელს შეუძლია აიღოს სხეული, გააჩროს იგი ნებისმიერ ადგილას, გაუშვას ხელი და სხეული დარჩება უძრავ მდგომარეობაში (ლიფტის მიმართ). ამ დამკვირვებლისათვის, ე. ი. თავისუფალ ვარდნილ ლიფტში, სხეულები „კარგავენ“ წონას (მათი წონა ბათილდება ზევით მიმართული ინერციის ძალით). თვით დამკვირვებელიც იქნება „უწონო“, ისევე როგორც მის ირგვლივ ლიფტში მყოფი ყოველი სხეული.

აღნიშნული მოვლენა ადვილად შეიძლება აიხსნას როგორც ინერციული, ისე არაინერციული ათვის სისტემის თვალსაზრისით; მაგალითად, იმ ფაქტს, რომ A სხეული უძრავია ლიფტის მიმართ, ინერციული დამკვირვებელი (რომლის მიმართაც ლიფტი თავისუფლად ვარდება) შემდეგნაირად ახსნის: ლიფტში მოთავსებულ, სხეულზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $\vec{F} = m\vec{g}$. ამიტომ იგი ვარდება ვერტიკალურად ქვევით \vec{y} აჩქარებით. ასეთივე აჩქარებით ვარდება თვით ლიფტიც, ამიტომ სხეული უძრავი იქნება ლიფტის მიმართ.

არაინერციულ სისტემაში, ე. ი. ლიფტში მყოფი დამკვირვებელი იმავე მოვლენას შემდეგნაირად ახსნის. სხეულზე, გარდა სიმძიმის \vec{F} ძალისა, მოქმედებს კიდევ ინერციის— $m\vec{g}$ ძალა და ამიტომ საერთო ძალა ნულის ტოლია.

ცხადია, რომ სხეული უძრავი იქნება ლიფტის მიმართ. როგორც ვხედავთ, ერთი და იგივე მოვლენა (სხეულის უძრაობა ლიფტის მიმართ) შეიძლება აიხსნას ორივე დამკვირვებლის მიერ, მაგრამ მაშინ როდესაც „უძრავი“ დამკვირვებელი ამისათვის იყენებს მარტო სიმძიმის ძალას, არაინერციული დამკვირვებელი იძულებულია გამოიყენოს დამატებითი ინერციის ძალა.



ნახ. 91.

საინტერესოა გავარჩიოთ ინერციული ძალის მოქმედება დედამიწის ზედაპირიდან ვერტიკალურად ზევით ატყორცნილი რაკეტის შემთხვევაში. ასროლის საწყის ეტაპზე რაკეტა მოძრაობს დიდი აჩქარებით და, თუ ამ აჩქარებას აღვნიშნავთ $+\vec{a}_0$ -ით, რაკეტაში

მყოფ ყოველ სხეულზე იმოქმედებს ამ აჩქარების საწინააღმდეგოდ, ე. ი. ვერტიკალურად ქვევით მიმართული ინერციის ძალა

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0.$$

ეს ძალა ემატება სიმძიმის ძალას და საერთო ძალა იქნება

$$\vec{F} + \vec{F}_{in} = m\vec{g} + m\vec{a}_0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ვერტიკალურად ზევით აჩქარებულად მოძრაობა რაკეტაში მყოფი სხეულის წონა კი არ „ქრება“, არამედ იზრდება, ყოველი სხეული უფრო მძიმდება და მის ჩვეულებრივ წონაზე უფრო მეტი ძალით აწევება საყრდენს. ცხადია, დევეთ დამკვირვებელიც მძიმდება, რასაც გარკვეული გავლენა შეუძლია მოახდინოს ფიზიოლოგიურ პროცესებზე. ამიტომაც არის, რომ კოსმოსური მოგზაურობის თვალსაზრისით ფრიალ მნიშვნელოვანი ხდება წონის „დაკარგვის“ ან „გადიდების“ გავლენის შესწავლა ადამიანის ორგანიზმზე.

§ 51. ვექტორის ცვლილება ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ

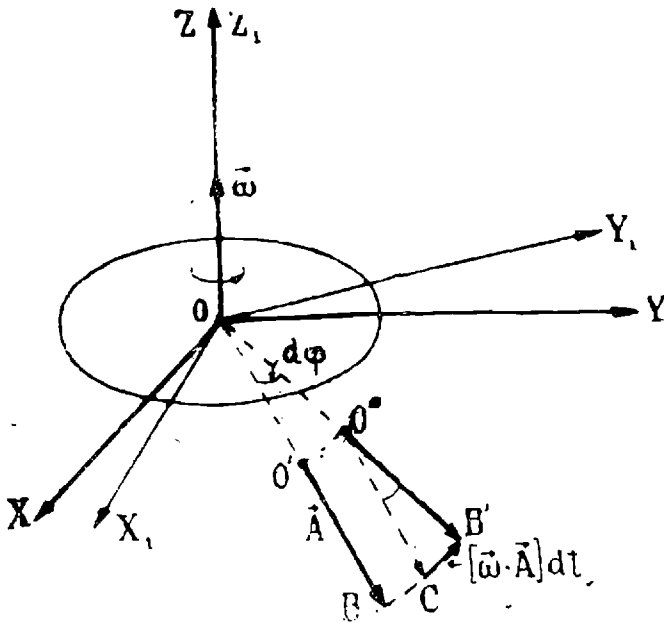
შემდეგში ჩვენ დაგვეჩივრება გამოყენება ფორმულისა, რომელიც აკავშირებს რაიმე ვექტორის ცვლილებას არაინერციული სისტემის მიმართ მის ცვლილებასთან ინერციული სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, $OX_1Y_1Z_1$ არაინერციული სისტემა ბრუნავს $OXYZ$ ინერციული სისტემის OZ ღერძის ირგვლივ $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. დავუშვათ აგრეთვე, რომ საწყის მომენტში OX_1 ღერძი თანხვედრა OX ღერძს, ხოლო OY_1 ღერძი — OY ღერძს (ნახ. 92). მცირე dt დროს შემდეგ არაინერციული სისტემა მობრუნდება $d\varphi = \omega dt$ კუთხეზე და OX_1 და OY_1 ღერძები ახალ მდებარეობას დაიკავებენ. ვთქვათ, \vec{A} ვექტორი O' მოდების წერტილით უცვლელია არაინერციული სისტემის მიმართ, ე. ი. ბრუნავს მასთან ერთად ინერციული სისტემის მიმართ. მიუხედავად იმისა, რომ არაინერციული სისტემის მიმართ \vec{A} ვექტორის ცვლილება ნულის ტოლია, მისი ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ არ იქნება ნული. ნახაზე ნაჩვენებია \vec{A} ვექტორის მდებარეობა სისტემის მობრუნებამდე და მობრუნების შემდეგ ($\vec{O'B}$ და $\vec{O''B'}$ ვექტორები). იმის გამოსარკვევად, თუ რამდენად შეიცვალა ვექტორი, გადავიტანოთ \vec{A} ვექტორი თავის ბარალელურად ისე, რომ მისი სათავე მოხვდეს O'' წერტილში ($O''C$ ვექტორი). $O''C$ და $O''B'$ ვექტორების სხვა-

ბა იქნება \vec{A} ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ, სიდიდით იგი $A d\varphi$ -ს ტოლია და მიმართულია $\vec{\omega}$ და \vec{A} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულად ისე, რომ $\vec{\omega}$, \vec{A} და $\vec{CB'}$ ვექტორები მარჯვენა სისტემას აღგენენ. ამიტომაც შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{CB'} = [\vec{\omega} \vec{A}] dt. \quad (X, 4)$$

ასეთია არაინერციული სისტემის მიმართ უცვლელი ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით. თუ, გარდა ამ ცვლილებისა, ხდება \vec{A}



ნახ. 92.

ვექტორის ცვლილება თვით არაინერციული სისტემის მიმართ, ეს ცვლილება დაემატება ზემოთ გამოთვლილ ცვლილებას და ვექტორის საერთო ცვლილებისათვის ინერციული სისტემის მიმართ გვექნება

$$d\vec{A} = d'\vec{A} + [\vec{\omega} \vec{A}] dt, \quad (X, 5)$$

სადაც $d'\vec{A}$ -თი აღნიშნულია ვექტორის ცვლილება არაინერციული სისტემის მიმართ, dt -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\omega} \vec{A}]. \quad (X, 6)$$

აქ $\frac{d\vec{A}}{dt}$ არის ვექტორის წარმოებული ინერციული სისტემის მი-

მართ, $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ იმავე ვექტორის წარმოებული არაინერციული სის-

ტემის მიმართ, ხოლო $[\omega \vec{A}]$ —ვექტორის ცვლილება დროის ერთეულში, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით ინერციული სისტემის მიმართ. ასეთია ზოგადი ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ნებისმიერი ვექტორის ცვლილებებს არაინერციული და ინერციული სისტემების მიმართ. იგი მართებულია ყოველი ვექტორისათვის, როგორც ბუნებისა ან უნდა იყოს იგი. ჩვენ გამოვიყვანეთ ის იმ კერძო შემთხვევისათვის, როდესაც \vec{A} ვექტორი XOY სიბრტყეში მდებარეობს (ნახაზის გამარტივების მიზნით), მაგრამ იგი მართებულია ნებისმიერად მიმართული ვექტორისათვის.

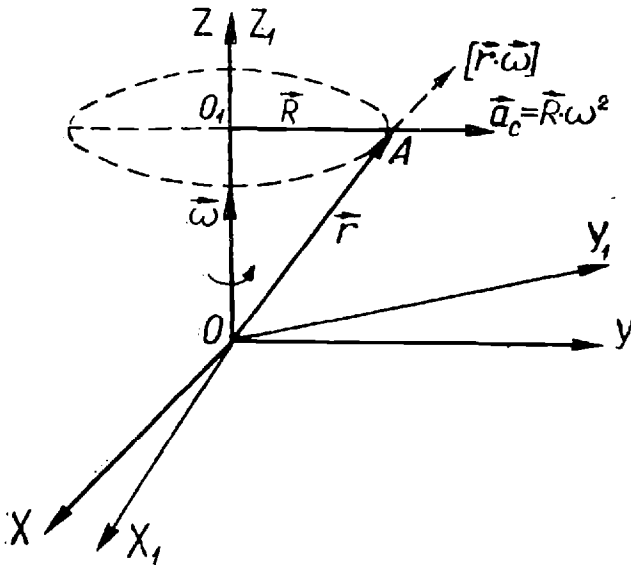
მიღებული ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ წერტილის რადიუს-ვექტორისათვის, სიჩქარისათვის, ძალისათვის და სხვა ვექტორული სიდიდეებისათვის. არ უნდა გვეგონოს, რომ ამ ფორმულის გამოყენება შეიძლება მხოლოდ ისეთი ვექტორული სიდიდეებისათვის, რომლებიც განიხილებიან ინერციული სისტემის მიმართ. იგი შეიძლება გამოვიყენოთ არაინერციული სისტემის მიმართ განხილული ვექტორისათვისაც. (X, 6) ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ, მაგალითად, ნაწილაკის სიჩქარისათვის არაინერციული სისტემის მიმართ. მიუხედავად იმისა, რომ სიჩქარე გამოთვლილია არაინერციული სისტემის მიმართ, მისი ცვლილება შეიძლება გამოვითვალოთ როგორც არაინერციული, ისე ინერციული სისტემის მიმართ.

§ 52. თანაბრად მჩრუნავი არაინერციული სისტემა.

ცენტრიდანული და კორიოლისის აჩქარებები

გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგი არაინერციული სისტემის მეორე შემთხვევის განსახილველად, როდესაც ეს სისტემა მუდმივი $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ. დავუშვათ, რომ $\vec{\omega}$ მიმართულია OZ ღერძის გასწვრივ (ნახ. 93). განვიხილოთ რაიმე A წერტილის მოძრაობა ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. აღვნიშნოთ r -ით ამ წერტილის რადიუს-ვექტორი O სათავის მიმართ, რომელიც იმავე დროს არის არაინერციული სისტემის სათავე. ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ, ე. ი. \vec{v} ვექტორის წარმოებული ინერციული სისტემის მიმართ. ეს წარ-

შობული, რომელსაც ჩვენ $\frac{d\vec{r}}{dt}$ -თი აღვნიშნავთ, წინა პარაგრაფის თანახმად ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი არის \vec{r} ვექტორის ცვლილება არაინერციული სისტემის მიმართ. მას ჩვენ $\frac{d'\vec{r}}{dt}$ -თი აღვნიშნავთ. მეორე ნაწილი არის მისი ცვლილება, გამოწვეული არაინერციული სისტემის ბრუნვით ინერციული სისტემის



ნახ. 93.

მიმართ; ეს მეორე ნაწილი წინა პარაგრაფის მიხედვით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$[\vec{\omega} \vec{r}].$$

საბოლოოდ \vec{r} -ის წარმოებულისათვის ინერციული სისტემის მიმართ მივიღებთ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (\text{X}, 7)$$

ცხადია, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ არის ნაწილაკის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ, ხოლო $\frac{d'\vec{r}}{dt}$ — იმავე ნაწილაკის სიჩქარე არაინერციული სისტემის მიმართ. თუ პირველს აღვნიშნავთ \vec{v} -თი, ხოლო მეორეს \vec{v}_1 -ით, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_1 + [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (\text{X}, 8)$$

ასეთია ნაწილაკების სიჩქარეების კავშირი ინერციული და არა-ინერციული სისტემების მიმართ. ვინაიდან მოძრაობის დინამიკურ განტოლებაში შედის აჩქარება, საჭიროა გამოყვანა ფორმულისა, რომელიც დააკავშირებს აჩქარებებს ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ. პირველი შეხედვით ამისათვის საკმარისია გავაწარმოოთ (X, 8) ფორმულა, ვინაიდან \vec{v} ვექტორის წარმოებულ მოგვეცემს აჩქარებას ინერციული სისტემის მიმართ, ხოლო \vec{v}_1 ვექტორის წარმოებულ — აჩქარებას არაინერციული სისტემის მიმართ. მაგრამ უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას რომელი სისტემის მიმართ უნდა მოვახდინოთ გაწარმოება. თუ გაწარმოებას ვახდენთ ინერციული სისტემის მიმართ, \vec{v} სიჩქარის წარმოებულ მოგვეცემს ნაწილაკის აჩქარებას ინერციული სისტემის მიმართ, მაგრამ \vec{v}_1 -ის წარმოებულ ინერციული სისტემის მიმართ არ იქნება აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ. მართლაც, აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ არის რადიუს-ვექტორის მეორე წარმოებულ არაინერციული სისტემის მიმართ. \vec{v}_1 არის \vec{r} -ის პირველი წარმოებულ არაინერციული სისტემის მიმართ და ის კიდევ ერთხელ უნდა გავაწარმოოთ არაინერციული სისტემის მიმართ, რათა მივიღოთ აჩქარება. მაშ, გავაწარმოოთ \vec{v} ინერციული სისტემის მიმართ, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right], \quad (\text{X, 9})$$

ვინაიდან $\vec{\omega}$ მუდმივია.

ყველა წარმოებულ აღებულია ინერციული სისტემის მიმართ. წინა პარაგრაფში გამოყვანილი ზოგადი ფორმულის თანახმად

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{d'\vec{v}_1}{dt} + [\vec{\omega} \vec{v}_1], \quad (\text{X, 10})$$

სადაც $\frac{d'\vec{v}_1}{dt}$ არის \vec{v}_1 -ის წარმოებულ არაინერციული სისტემის მიმართ. ვინაიდან \vec{v}_1 არის სიჩქარე არაინერციული სისტემის მიმართ, $\frac{d'\vec{v}_1}{dt}$ იქნება აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ, რომელსაც ჩვენ \vec{a}_1 -ით აღვნიშნავთ. შევცვალოთ (X, 9) ფორმულის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი (X, 10) გამოსახულებით და მეორე წევრში $\frac{d\vec{r}}{dt}$ -ს მაგიერ ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (X, 8) ფორმულიდან, მივიღებთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}_1}{dt} + [\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

ანუ

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + 2[\vec{\omega} \vec{v}_1] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]. \quad (\text{X}, 11)$$

ასეთია ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ნაწილაკის აჩქარებას ინერციული სისტემის მიმართ მისივე აჩქარებასთან არაინერციული სისტემის მიმართ. ამ ფორმულიდან ადვილად გამოვხატავთ აჩქარებას არაინერციული სისტემის მიმართ აჩქარებით ინერციული სისტემის მიმართ

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - 2[\vec{\omega} \vec{v}_1] - \vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]$$

ან, თუ გადავსვამთ მამრავლებს მარჯვენა მხარის მეორე და მესამე წევრში, გვექნება:

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + 2[\vec{v}_1 \vec{\omega}] + [\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]. \quad (\text{X}, 12)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ აჩქარება არაინერციული სისტემის მიმართ განსხვავდება აჩქარებისაგან ინერციული სისტემის მიმართ ორი დამატებითი წევრით. პირველ მათგანს $2[\vec{v}_1 \vec{\omega}]$, რომელიც დამოკიდებულია ნაწილაკის სიჩქარეზე არაინერციული სისტემის მიმართ, ეწოდება კორიოლისის აჩქარება და აღინიშნება \vec{a}_k -თი

$$\vec{a}_k = 2[\vec{v}_1 \vec{\omega}]. \quad (\text{X}, 13)$$

მეორეს კი $[\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]$, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკის მდებარეობაზე, ეწოდება ცენტრიდანული აჩქარება და აღინიშნება \vec{a}_c -თი

$$\vec{a}_c = [\vec{\omega} [\vec{r} \vec{\omega}]]. \quad (\text{X}, 14)$$

ცხადია, ორივე ეს დამატებითი აჩქარება გამოწვეულია სისტემის არაინერციულობით და დამოკიდებულია არაინერციული სისტემის $\vec{\omega}$ კუთხურ სიჩქარეზე ინერციული სისტემის მიმართ. გავარჩიოთ უფრო დაწვრილებით ამ დამატებითი აჩქარებების ბუნება. დავიწყოთ ცენტრიდანული აჩქარებით, რომელიც უფრო მარტივია თავისი ხასიათით, მიუხედავად უფრო რთული ფორმულისა. გავავლოთ \vec{R} რადიუს-ვექტორი ბრუნვის ღერძიდან განსახილველ წერტილამდე (ღერძის მართობულად). ცხადია, რომ \vec{R} არის რადიუს-ვექტორი (O_1 წერტილის მიმართ) იმ წრიული ტრაექტორიისა, რომელსაც შემოსწერს ნაწილაკი არაინერციული სისტემის ბრუნვის დროს. ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{OO}_1$$

და ამიტომ

$$[\vec{r} \vec{\omega}] = [\vec{R} \vec{\omega}] + [\vec{OO}_1 \vec{\omega}],$$

მაგრამ მეორე ვექტორული ნამრავლი ნულია, ვინაიდან ორივე ვექტორი \vec{OO}_1 და $\vec{\omega}$ ერთ ღერძზე მდებარეობენ. ამიტომ მივიღებთ

$$[\vec{r} \vec{\omega}] = [\vec{R} \vec{\omega}].$$

ამ ვექტორული ნამრავლის გამომხატველი ვექტორი მართობულია \vec{R} და $\vec{\omega}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და მოგეზულია მარჯვენა ბურლის წესის მიხედვით. მისი მიმართულება ნაჩვენებია 93-ე ნახაზზე. სიდიდით იგი $R\omega$ ნამრავლის ტოლია, ვინაიდან \vec{R} და $\vec{\omega}$ ერთმანეთის მართობულია. ცენტრიდანული აჩქარების მისაღებად უნდა განვიხილოთ $\vec{\omega}$ -სი და ამ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, ეს ვექტორი მიმართული იქნება \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და სიდიდით ტოლი იქნება $R\omega^2$ -ისა, ვინაიდან $\vec{\omega}$ და $[\vec{R} \vec{\omega}]$ ვექტორები ერთმანეთის მართობულია. მაშასადამე, მივიღებთ, რომ ცენტრიდანული აჩქარება მიმართულია \vec{R} -ის გასწვრივ (ბრუნვის ცენტრიდან) და სიდიდით $R\omega^2$ -ის ტოლია

$$\vec{a}_c = \vec{R}\omega^2. \quad (X, 15)$$

იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ, თუ გამოვიყენებთ სამმაგი ვექტორული ნამრავლის ფორმულას

$$[A[BC]] = \vec{B}(\vec{A} \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \vec{B}).$$

ჩვენს შემთხვევაში

$$[\vec{\omega}[\vec{R} \vec{\omega}]] = \vec{R}(\vec{\omega} \vec{\omega}) - \vec{\omega}(\vec{\omega} \vec{R});$$

მაგრამ მეორე წევრში მდგომი $(\vec{\omega} \vec{R})$ სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია (ვინაიდან $\vec{\omega}$ და \vec{R} ვექტორები ერთმანეთის მართობულია) და ამიტომ მივიღებთ

$$\vec{a}_c = [\vec{\omega}[\vec{R} \vec{\omega}]] = \vec{R}\omega^2.$$

სწორედ იმიტომ ეწოდება ამ აჩქარებას ცენტრიდანული აჩქარება, რომ იგი მიმართულია ნაწილაკის მიერ შემოწერილი წრეხაზის ცენტრიდან გარეთ. იგი პროპორციულია ცენტრამდე მანძილისა და კუთხური სიჩქარის კვადრატისა. ხშირად ცენტრიდანულ აჩქარებას გამოსახავენ არა კუთხური სიჩქარის, არამედ არაინერციულ

ლი სისტემის იმ წერტილის ხაზოვანი სიჩქარით, რომელშიც მოცემულ მომენტში იმყოფება განსახილველი წერტილი. ვინაიდან არაინერციული სისტემის ეს წერტილი ბრუნავს ა კუთხური სიჩქარით და მისი მანძილი ღერძამდე არის R , ამიტომ მისი ხაზოვანი სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ იქნება

$$v_0 = R\omega.$$

(X, 15) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$\vec{a}_c = \frac{v_0^2}{R^2} \vec{R}. \quad (\text{X, 16})$$

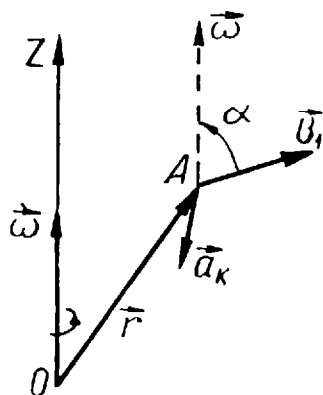
ცენტრიდანული აჩქარების სიდიდისათვის გვექნება

$$a_c = R\omega^2 = \frac{v_0^2}{R}. \quad (\text{X, 16}')$$

განვიხილოთ ახლა კორიოლისის აჩქარება. სიდიდით იგი ტოლია

$$a_k = 2 v_1 \omega \sin \alpha, \quad (\text{X, 17})$$

სადაც α არის კუთხე \vec{v}_1 და $\vec{\omega}$ ვექტორებს შორის. მიმართულება მოიძებნება მარჯვენა ბურღის წესით. კორიოლისის აჩქარება მიმართულია იმ ბურღის გადანაცვლების გასწვრივ, რომელიც ბრუნავს \vec{v}_1 ვექტორიდან $\vec{\omega}$ ვექტორისაკენ (ნახ. 94). როგორც კორიოლისის აჩქარების ფორმულიდან ჩანს, ეს აჩქარება აქვს მხოლოდ ისეთ ნაწილაკს, რომელიც მოძრაობს არაინერციული სისტემის მიმართ.



ნახ. 94.

§ 53. მოძრაობის დინამიკური განტოლება მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში. ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები

გამოვარკვეით როგორ დაიწერება მოძრაობის განტოლება მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში. როგორც ვიცით, ინერციულ სისტემაში მოძრაობის დინამიკურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (\text{X, 18})$$

სადაც \vec{F} არის ინერციულ სისტემაში ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი; ეს ძალები ყოველთვის გამოწვეულია გარეზე სხეულების მოქმედებით და დამოკიდებულია ნაწილაკის მდებარეობაზე ამ სხეულების მიმართ.

გადავიდეთ ახლა არაინერციულ სისტემაზე. რისთვისაც გამოვიყენოთ (X, 11) ფორმულა. ამ ფორმულის გამრავლება მასაზე და (X, 18) ფორმულის მხედველობაში მიღება მოგვცემს

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + 2m[\vec{v}_1 \ \vec{\omega}] + m[\vec{\omega} [\vec{r} \ \vec{\omega}]],$$

ან

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + 2m[\vec{v}_1 \ \vec{\omega}] + m\omega^2 \vec{R}. \quad (X, 19)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ არაინერციულ სისტემაში მასის ნამრავლი აჩქარებაზე ($m\vec{a}_1$) არ უდრის \vec{F} ძალას, რომელიც მოქმედებდა ნაწილაკზე ინერციულ სისტემაში. განტოლების მარჯვენა მხარეში ამ ძალის გარდა შედის ორი სიდიდე, $2m[\vec{v}_1 \ \vec{\omega}]$ და $m\omega^2 \vec{R}$, რომლებიც წარმოადგენენ სათანადოდ კორიოლისისა და ცენტრიდანული აჩქარებების ნამრავლებს მასაზე. მიღებული შედეგი ორნაირად შეიძლება იქნეს გაგებული (ისევე როგორც თანაბრად აჩქარებულად მოძრავი არაინერციული სისტემის შემთხვევაში). შეიძლება დავტოვოთ ძალის განმარტება, როგორც სიდიდისა, რომელიც ახასიათებს სხეულების ურთიერთქმედებას და დამოკიდებულია მათ ურთიერთმდებარეობაზე. მაშინ, ისევე როგორც ინერციულ სისტემაში, არაინერციულ სისტემაშიც ერთადერთ ძალად უნდა ჩავთვალოთ \vec{F} ძალა, ვინაიდან სხეულების კონფიგურაცია არ იცვლება არაინერციულ სისტემაში გადასვლის შედეგად. ასეთი გაგების დროს (X, 19) განტოლება გვიჩვენებს, რომ არაინერციულ სისტემაში აღარ არის მართებული ნიუტონის მეორე კანონი მასისა და აჩქარების ნამრავლის ძალასთან ტოლობის შესახებ. მართლაც, (X, 19) ფორმულის თანახმად $m\vec{a}_1$ არ უდრის \vec{F} , რომელიც ნაწილაკზე მოქმედ ერთადერთ ძალას წარმოადგენს. ძალის საშუალებით აჩქარების გამოსათვლელად ძალას უნდა დაუმატოთ კიდევ ორი სიდიდე $2m[\vec{v}_1 \ \vec{\omega}]$ და $m\omega^2 \vec{R}$. მაგრამ შესაძლებელია (X, 19) განტოლების მეორე ინტერპრეტაცია და სწორედ ეს ინტერპრეტაცია გამოიყენება ყველაზე ხშირად ფიზიკაში. შეიძლება განვახილოთ ძალის ცნება და ვუწოდოთ ძალა მასის ნამრავლს აჩქარებაზე დამოუკიდებლად იმისაგან, გამოწვეულია იგი სხეულების ურთიერთქმედებით თუ რაიმე სხვა მიზეზით. ამ შემთხვევაში (X, 19) ფორმულის მარჯვენა მხარეში სამივე სიდიდე იქნება ძალა და ჩვენ

ვიტყვიან, რომ არაინერციულ სისტემაშიც მართებულია მასისა და აჩქარების ნამრავლის ტოლობა ძალასთან, მხოლოდ ინერციული სისტემისაგან განსხვავებით, ამ სისტემაში, გარდა \vec{F} ძალისა, რომელიც სხეულების ურთიერთქმედებით იყო გამოწვეული, არსებობს კიდევ ორი ძალა, გამოწვეული სისტემის არაინერციულობით. ეს ძალებია $2m[\vec{v}_1, \vec{\omega}]$ და $m\omega^2 \vec{R}$. მათ ეწოდებათ სათანადოდ კორიოლისისა და ცენტრიდანული ძალები და აღინიშნებიან \vec{F}_k -თი და \vec{F}_c -თი

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}_1, \vec{\omega}] = m\vec{a}_1, \quad (X, 20)$$

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{R} = m\vec{a}_c = \frac{mv_0^2}{R^3} \vec{R}. \quad (X, 21)$$

ამ უკანასკნელი ინტერპრეტაციის თანახმად თანაბრად მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში, გარდა გარეშე სხეულებით გამოწვეული ძალისა, რომელიც ინერციულ სისტემაშიც მოქმედებს, ნივთიერ წერტილზე მოქმედებენ კიდევ (X, 20) და (X, 21) ფორმულებით განსაზღვრული კორიოლისისა და ცენტრიდანული ძალები. ყოველივე ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში ნაწილაკის აჩქარების გამოსათვლელად და, მაშასადამე, მოძრაობის საპოვნელად, გარდა უშუალოდ მოდებული ძალისა, ჩვენ იძულებული ვართ შემოვიღოთ დამატებითი ინერციის ძალები—ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები.

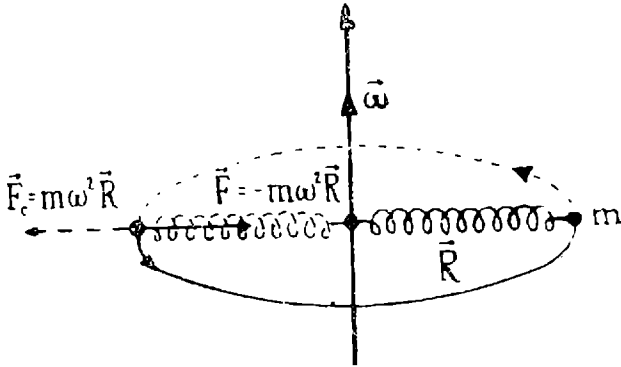
§ 54. მბრუნავი არაინერციული სისტემის მარტივი მაგალითები

განვიხილოთ მბრუნავი არაინერციული სისტემის რამდენიმე მარტივი მაგალითი. ყველაზე მარტივია ცენტრთან რაიმე ბმით, მაგალითად ზამბარით, დაკავშირებული სხეულის მოძრაობა წრეხაზზე (ნახ. 95). ინერციული სისტემის თვალსაზრისით, თუ ამ სისტემის მიმართ სხეული ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით, ამ სხეულზე მოქმედებს ერთადერთი ძალა, გამოწვეული ზამბარის გაჭიმვით. იგი მიმართულია ცენტრისაკენ (ცენტრისკენული ძალა) და, თუ მოძრაობა წარმოებს R -რადიუსიან წრეხაზზე, გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{R};$$

ეს ძალა ამოძრავებს სხეულს წრეხაზზე, თუ მას თავიდანვე ჰქონდა მინიჭებული სათანადო საწყისი სიჩქარე. განვიხილოთ ახლა იგივე

მოვლენა მბრუნავი არაინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც სხეულთან ერთად ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით. ამ სისტემის მიმართ ისევ მოქმედებს ცენტრისკენ მიმართული \vec{F} ძალა, მაგრამ მიუხედავად ამისა სხეული უძრავია. სხეულის ეს უძრავობა არაინერციული სისტემის მიმართ წინა აარაგრაფის მიხედვით შემდეგნაირ-



ნახ. 95.

რად უნდა აიხსნას: სისტემის არაინერციულობის გამო სხეულზე, გარდა ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალისა, უნდა მოქმედებდნენ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. ჩვენს შემთხვევაში კორიოლისის ძალა ნულის ტოლია, ვინაიდან სხეული უძრავია არაინერციული სისტემის მიმართ. რჩება მხოლოდ ცენტრიდანული ძალა, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{R}.$$

სხეულზე მოქმედი საერთო ძალისათვის მივიღებთ

$$\vec{F} + \vec{F}_c = -m\omega^2 \vec{R} + m\omega^2 \vec{R} = 0$$

და ამიტომაც სხეული უძრავია (არაინერციული სისტემის მიმართ საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია). როგორც ვხედავთ, ერთი და იგივე მოვლენა, სხეულის ბრუნვა ინერციული სისტემის მიმართ და უძრავობა არაინერციული სისტემის მიმართ, შეიძლება აიხსნას ორივე სისტემის თვალსაზრისით, იმ განსხვავებით, რომ ინერციულ სისტემაში სხეულზე იმოქმედებს მხოლოდ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალა, არაინერციულ სისტემაში მას დაემატება ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ცენტრიდანული ძალა.

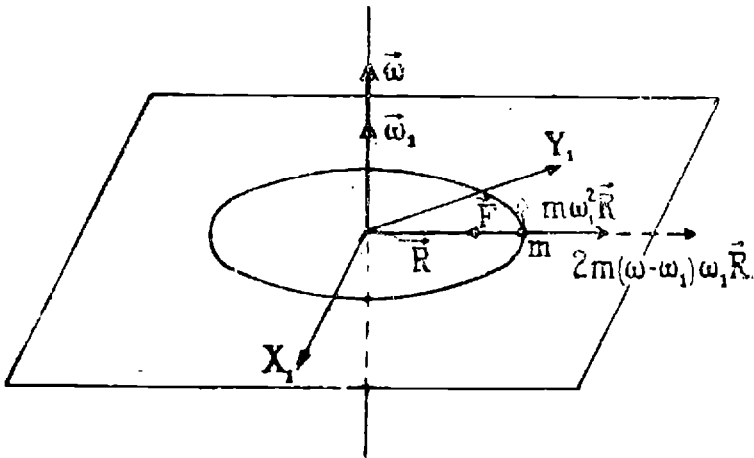
ინერციულ სისტემაში

სხეულზე მოქმედებს ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალა $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{R}$, რომლის გაწლენით სხეული მოძრაობს R -რადიუსიან წრეხაზზე.

არაინერციულ სისტემაში

სხეულზე, გარდა ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ცენტრისკენული ძალისა $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{R}$, მოქმედებს $\vec{F}_c = m\omega^2 \vec{R}$ ცენტრიდანული ძალა. საერთო ძალა ნულის ტოლია და ამიტომ სხეული უძრავია.

განვიხილოთ იგივე შემთხვევა სხეულის წრიული მოძრაობისა, მხოლოდ არაინერციულ სისტემად ავიჩინოთ სისტემა, რომელიც ბრუნავს არა სხეულთან ერთად, არამედ უფრო ნაკლები ω_1 კუთხური სიჩქარით (ნახ. 96); ამ სისტემის მიმართ განსახილველი სხეული მოძრაობს $(\omega - \omega_1)$ კუთხური სიჩქარით, ე. ი. $v_1 = R(\omega - \omega_1)$



ნახ. 96.

ხაზოვანი სიჩქარით. როგორ ახსნის ამ სისტემაში მყოფი დამკვირვებელი სხეულის მოძრაობას მის მიმართ $\omega - \omega_1$ კუთხური სიჩქარით R -რადიუსიან წრეხაზზე? როდესაც მის მიმართ სხეული მოძრაობს $v_1 = R(\omega - \omega_1)$ ხაზოვანი სიჩქარით, გარდა ცენტრიდანული ძალისა $m\omega_1^2 \vec{R}$, იმოქმედებს კორიოლისის ძალა, რომელიც მიმართული იქნება \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და გამოისახება ფორმულით

$$\vec{F}_c = 2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \vec{R}.$$

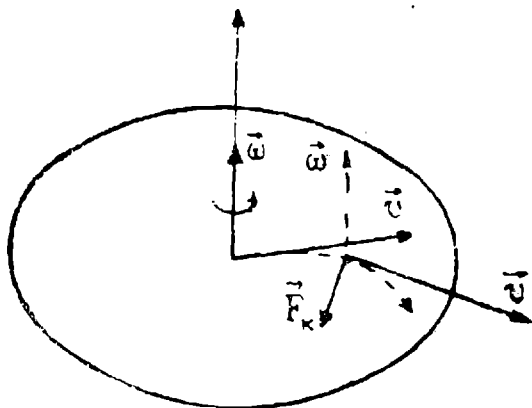
სხეულზე მოქმედი საერთო ძალა არაინერციული სისტემის თვალსაზრისით იქნება

$$\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_k = -m\omega^2 \vec{R} + m\omega_1^2 \vec{R} + 2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \vec{R} = -m(\omega - \omega_1)^2 \vec{R}.$$

ეს სწორედ ის ძალაა, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ სხეულის მოძრაობდეს ამ სისტემის მიმართ $\omega - \omega_1$ კუთხური სიჩქარით.

როგორც ვხედავთ, ერთისა და იმავე სხეულის მოძრაობის ხასიათის ასახსნელად სხვადასხვა ათვლის სისტემის თვალსაზრისით სხვადასხვა ძალის განხილვაა საჭირო. ინერციული სისტემის თვალსაზრისით სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალა, \vec{F} კუთხური სიჩქარით მბრუნავ სისტემაში, გარდა ამ ძალისა, მოქმედებს კიდევ ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული $m\omega^2 \vec{R}$ ცენტრიდანული ძალა, ხოლო ω_1 კუთხური სიჩქარით მბრუნავ სისტემაში, $m\omega_1^2 \vec{R}$ ცენტრიდანული ძალის გარდა, ჩნდება კიდევ $2m(\omega - \omega_1)\omega_1 \vec{R}$ კორიოლისის ძალა.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, სრულიად გლუვი დისკოს ცენტრიდან რადიუსის მიმართულებით \vec{v} სიჩქარით ამოძრავებულია m მასის სხეული. ვინაიდან ამ სხეულზე არავითარი ძა-



ნახ. 97.

ლები არ მოქმედებს, იგი იმოძრავებს სწორხაზოვნად და მუდმივი სიჩქარით (ნახ. 97). დავეუშვათ ახლა, რომ დისკო ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. ცხადია, მბრუნავი დისკოს მიმართ სხეულის მოძრაობა არ იქნება სწორხაზოვანი. მისი ტრაექტორია გამრუდდება, როგორც ეს ნახევნები ნახაზზე; ეს გამრუდებული ტრაექტორია ნათლად გამოჩნდება, თუ რაიმე საშუალებით (მელნით ან საღებავით) მოვახერხებთ, რომ სხეულმა დააჩინოს კვალი დისკოზე თავისი მოძრაობის დროს. როგორ ახსნის ტრაექტორიის გამრუდებას დისკოსთან ერთად მბრუნავი დამკვირვებელი? მართალია, სხეულზე არ მოქმედებს სხვა სხეულების მოქმედებით გამოწვეული ძალა, მაგრამ ვინაიდან მისი სისტემა (მბრუნავი დისკო) არ არის ინერ-

ციული, მან უნდა მიიღოს მხედველობაში ამ არაინერციულობით გამოწვეული ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. რადიალური მოძრაობიდან გადახრას, ე. ი. ტრაექტორიის გამრუდებას გამოიწვევს კორიოლისის ძალა, რადგანაც ცენტრიდანული ძალა რადიუსის გასწვრივ არის მიმართული. ნახაზზე ნაჩვენებია კორიოლისის ძალის მიმართულება. იგი მიმართულია ტრაექტორიის მხებისადმი, ე. ი. სიჩქარისადმი მართობულად და იწვევს ნორმალურ აჩქარებას. ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი მოიძებნება ფორმულიდან

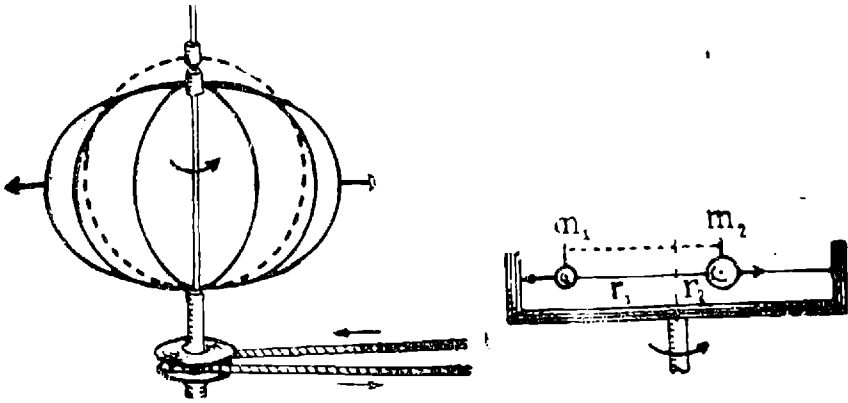
$$\frac{v^2}{\rho} = 2v\omega, \text{ ე. ი. } \frac{1}{\rho} = \frac{2\omega}{v},$$

ვინაიდან $\vec{\omega}$ და \vec{v} ვექტორები ურთიერთმართობია.

ცენტრიდანული ძალის მოქმედების თვალსაჩინო ცდები მარტივად ხორციელდება ე. წ. ცენტრიდანული მანქანის საშუალებით (ნახ. 98). მანქანის ღერძზე ათავსებენ სხვადასხვა ხელსაწყოს და მოჰყავთ სწრაფ ბრუნვაში. ნახაზი გვიჩვენებს როგორ ამოიზნიქებიან ცენტრიდანული ძალის გავლენით ბრუნვამდე წრეხაზის ფორმის მქონე ბრტყელი ლითონის ღეროები, რის გამოც სფერო გადაიქცევა პოლუსებთან შეჭყლეთილ ბრუნვის ელიფსოიდად. ეს ცდა თვალსაჩინოდ გვიჩვენებს დედამიწის ეკვატორის გამობერილობის მიზეზს. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია ცდა, რომელიც იძლევა სხვადასხვა მასის სხეულებზე მოქმედი ცენტრიდანული ძალების შედარების შესაძლებლობას. ჩარჩოში ჩამაგრებულ ღერძზე მოთავსებულია ორი სხვადასხვა მასის ბირთვი, რომელთაც შეუძლიათ თავისუფლად სრიალი ღეროს გასწვრივ. ბირთვები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ძაფით. ჩარჩოს ბრუნვაში მოყვანისას ბირთვებზე იმოქმედებენ ცენტრიდანული ძალები. თუ მათი მანძილები ბრუნვის ღერძიდან მასების უკუპროპორციულია, ეს ძალები ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული იქნებიან და ბირთვები უძრავი დარჩებიან. საკმარისია ცოტათი გადავანაცვლოთ ბირთვები, რომ ერთმა ცენტრიდანულმა ძალამ გადააჭარბოს მეორეს და ბირთვების სისტემამ გადაინაცვლოს ან ერთ, ან მეორე მხარეს (ნახ. 98).

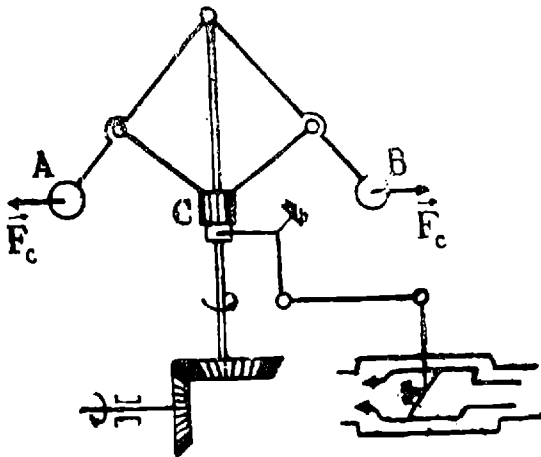
ცენტრიდანული ძალის პრაქტიკული გამოყენების მაგალითს წარმოადგენს უატის რეგულატორი (ნახ. 99). A და B ბირთვები შეერთებული არიან ღერძთან მოძრავი ქუროს საშუალებით. რეგულატორი შეერთებულია ორთქლის მანქანის მბრუნავ ღერძთან ისე, რომ ბრუნავს მასთან ერთად. თუ ბრუნვის სიჩქარე სასურველზე მეტად გაიზარდა, ბირთვებზე მოქმედი ცენტრიდანული ძალებიც

გაიზრდება, ბირთვები უფრო მეტად გაიშლებიან, რაც გამოიწვევს C ქუროს აწევას. უკანასკნელი შეერთებულია ორთქლის მიწოდების სარქველთან ისეთნაირად, რომ მისი აწევის დროს



ნახ. 98.

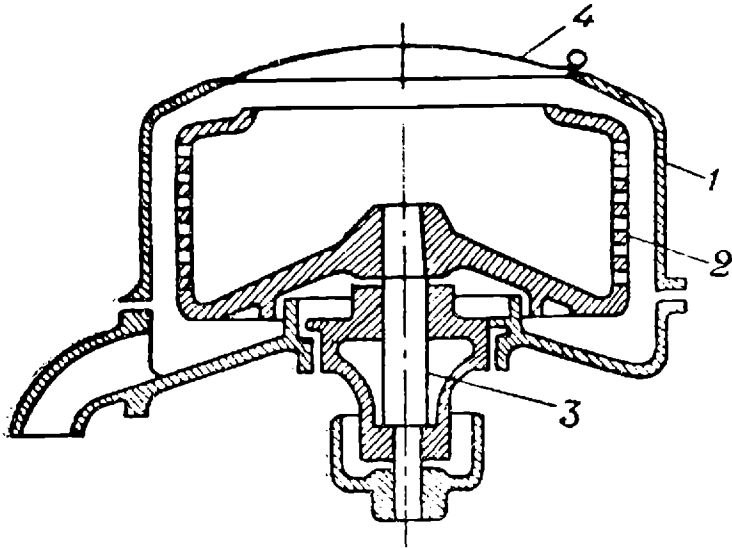
ორთქლის მიწოდება კლებულობს; ეს კი იწვევს ბრუნვის სიჩქარის შემცირებას. თუ ბრუნვის სიჩქარე სასურველზე ნაკლები



ნახ. 99.

გახდა, ცენტრიდანული ძალა შემცირდება, ბირთვები ჩამოეშვებიან და C ქურო დაიწევს. ეს გამოიწვევს სარქელის გახსნას, ორთქლის მიწოდების გაზრდას და ბრუნვის სიჩქარის გადიდებას. როგორც ვხედავთ, ცენტრიდანული ძალის საშუალებით უატის რეგულატორი ახდენს მანქანის ბრუნვის სიჩქარის რეგულირებას. ცენტრიდანული ძალები გამოიყენება ე. წ. ცენტრიფუგებში (ნახ. 100), რომელთა დანიშნულებაა სითხეში მყოფი სხვადასხვა სიმ-

კერივის ნივთიერებათა ერთმანეთისაგან გაყოფა. სითხიანი ჭურჭელი მოჰყავთ სწრაფ ბრუნვაში (ზოგ ცენტრიფუგაში ბრუნთა რიცხვი აღწევს რაზღენიმე ათეულ ათასს მინუტში) და ამის გამო წარმო-
შობილი ცენტრიდანული ძალა იწვევს ნივთიერებების გაყოფას



ნახ. 100.

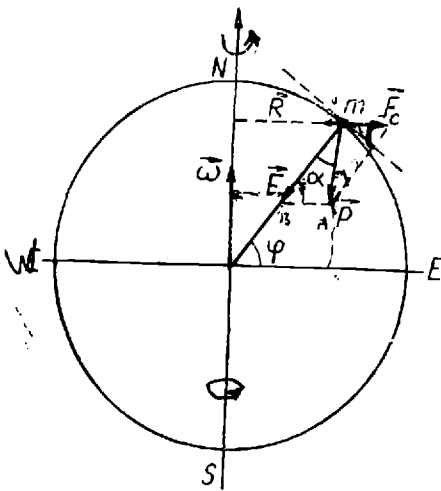
სიმკვრივის მიხედვით. რაც უფრო მკვრივია ნაწილაკი, მით უფრო შორს თავსდება იგი ლერძიდან და კედლების ხვრელებში გასვლის შემდეგ გროვდება ცალკე.

ამავე პრინციპზეა დამყარებული რძის სხვადასხვა ნაწილის გამოყოფი სებარატორი.

§ 55. დედამიწა როგორც არაინერციული სისტემა

1. უძრავი სხეულის წონა. საკითხი სხეულის წონის შესახებ არც ისე მარტივია, როგორც შეიძლება მოგვეჩვენოს. საქმე იმაშია, რომ წონის ქვეშ ხშირად სულ სხვადასხვა ძალა იგულისხმება. ამბობენ, მაგალითად, რომ წონა არის ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს განსახილველ სხეულს. შეიძლება აგრეთვე ვთქვათ, რომ წონა არის ძალა, რომლითაც სხეული აწვება პორიზონტალურ საყრდენს და, ბოლოს, წონა შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ძალა, რომელიც იწვევს სხეულის ვარდნას დედამიწაზე (ანიჭებს მას ვარდნის აჩქარებას). ბუნებრივია ისმის კითხვა, საზღვრავს თუ არა ეს სამი განმარტება ერთსა და იმავე ძალას და თუ ისინი სხვადასხვა ძალებია, რომელ მათგანს ეწოდება სხეულის წონა? ცხადია, ვინაიდან დედამიწა არაინერციული

სისტემა (იგი თანაბრად ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ), მის ზედაპირზე მოთავსებულ ყოველ სხეულზე, გარდა მიზიდვის ძალისა, იმოქმედებენ კიდევ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები. ამიტომ საერთო ძალა, რომელიც არის სწორედ ვარდნის აჩქარების გამომწვევი ძალა ან, რაც იგივეა, პორიზონტალურ საყრდენზე მოქმედი ძალა, განსხვავებული იქნება დედამიწის მიზიდვის ძალისაგან. ამიტომაც ხშირად ასხვავებენ ერთმანეთისაგან ორ წონას: „ნამდვილს“ და „მოჩვენებითს“. „ნამდვილ“ წონას უწოდებენ ძალას, რომლითაც დედამიწა იზიდავს სხეულს, ხოლო „მოჩვენებით“ წონას კი—ვარდნის აჩქარების გამომწვევ ძალას, რომელიც არის „ნამდვილი“ წონის და ინერციის ძალების ჯამი. რასაკვირველია, თუ წონა ვუწოდეთ სხეულზე მოქმედ საერთო ძალას, მაშინ ველარ ვიტყვით, რომ სხეულის წონა არის დედამიწის მი-



ნახ. 101.

ზიდვის ძალა. შემდეგში ჩვენ სწორედ ასე მოვიქცევით, ე. ი. წონას ვუწოდებთ საყრდენზე მოქმედ ან ვარდნის აჩქარების გამომწვევ ძალას. გამოვარკვიოთ ახლა რა განსხვავებაა წონასა და დედამიწის მიზიდვის ძალას შორის. დაუშვათ, რომ დედამიწა არის ერთგვაროვანი სფერო და წარმოვიდგინოთ, რომ მისი ზედაპირის რომელიმე ადგილას, რომლის განედია φ , მოთავსებულია m მასის სხეული (ნახ. 101). აღვნიშნოთ \vec{F} -ით დედამიწის მიზიდვის ძალა, რომელიც მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ. ვინაიდან სხეული უძრავია დედამიწის მიმართ, მასზე იმოქმედებს მხოლოდ ცენტრიდანული ინერციის ძალა

$$\vec{F}_c = m \omega^2 \vec{R}, \quad (X, 22)$$

მიმართული ღერძიდან განსახილველ წერტილამდე გავლებული \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ. სხეულზე მოქმედი საერთო ძალა იქნება ამ ორი ძალის ჯამი. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ეს ძალა აღარ არის მიმართული დედამიწის ცენტრისაკენ. ამიტომაც სწორედ ეს \vec{P} ძალა, ჯამი \vec{F} და \vec{F}_c ძალებისა, იქნება სხეულის წონა

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_c. \quad (X, 23)$$

მაშასადამე, \vec{P} წონა როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით განსხვავდება მიზიდვის ძალისაგან. წონის გამომხატველი \vec{P} ვექტორის მიმართულება არის სწორედ ვერტიკალის მიმართულება (მის გასწვრივ და არა მიზიდვის ძალის გასწვრივ ჩერდება შევეული და მის გასწვრივ ხდება ნაწილაკის ვარდნა). გამოვთვალოთ კუთხე წონასა და მიზიდვის ძალებს შორის. ნახაზიდან ადვილად მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c \sin \varphi}{F - F_c \cos \varphi}. \quad (\text{X}, 24)$$

მარტივი გამოთვლებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ცენტრიდანული ძალა ძალიან მცირეა მიზიდვის ძალასთან შედარებით. მართლაც, $F = mg^{1_{90}}$ სადაც g_{90} არის მიზიდვის ძალით გამოწვეული აჩქარება, რომელიც ტოლია დაახლოებით $980 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ -ისა. მეორე მხრივ, F_c ცენტრიდანული ძალა გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_c = m\omega^2 r \cos \varphi. \quad (\text{X}, 25)$$

მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა ადვილად გამოითვლება, თუ ჩავსვამთ დედამიწის რადიუსისა და კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობებს

$$r = 6,4 \cdot 10^8 \text{ cm}, \quad \omega = 0,73 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1};$$

მივიღებთ

$$F_c^{\text{max}} = 3,4 \text{ m} < 980 \text{ m}. \quad (\text{X}, 26)$$

ამიტომაც (X, 24) ფორმულაში შეიძლება უგულებელვყოთ მნიშვნელში $F_c \cos \varphi$ წევრი F -თან შედარებით. ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{F} \sin \varphi. \quad (\text{X}, 27)$$

α კუთხის სიმცირის გამო $\operatorname{tg} \alpha$ შეიძლება შევცვალოთ თვით კუთხით, რის შედეგადაც მივიღებთ მარტივ ფორმულას

$$\alpha = \frac{\omega^2 r}{2 g_{90}} \sin 2\varphi. \quad (\text{X}, 28)$$

იმავე სიზუსტით შეიძლება გამოვითვალოთ წონის სიდიდე

$$P = F (1 - \alpha \operatorname{ctg} \varphi). \quad (\text{X}, 29)$$

¹ მიზიდვით გამოწვეული აჩქარება არის იმავე დროს აჩქარება $\varphi = 90^\circ$ განეხებ, ე. ი. პოლუსზე.

(X, 28) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ მიახლოებით ფორმულას

$$P = F \left(1 - \frac{r\omega^2}{g_{90^\circ}} \cos^2 \varphi \right). \quad (\text{X}, 30)$$

თუ ჩავსვამთ ზემოთ მოყვანილ რიცხვით მნიშვნელობებს, გვექნება

$$P = F (1 - 0,0034 \cos^2 \varphi). \quad (\text{X}, 31)$$

უფრო ხშირად როგორც F , ისე P ძალას გამოსახავენ მასის და სათანადო აჩქარების ნამრავლის სახით

$$P = mg_\varphi, \quad F = mg_{90^\circ},$$

სადაც g_φ იქნება ვარდნის აჩქარება, გამოწვეული წონით, ხოლო g_{90° — აჩქარება, გამოწვეული მიზიდვის ძალით. მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$g_\varphi = g_{90^\circ} (1 - 0,0034 \cos^2 \varphi) \quad (\text{X}, 32)$$

ცხადია, g_{90° იმავე დროს არის ვარდნის აჩქარება პოლუსზე, ვინაიდან ამ ადგილას ცენტრიდანული ძალა ნულის ტოლია.

მიღებული თეორიული ფორმულის დაკვირვების შედეგებთან შედარების დროს უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ დედამიწა არ წარმოადგენს ერთგვაროვან სფეროს, როგორც ეს ჩვენ გვქონდა დაშვებული გამოთვლების დროს. ცენტრიდანული ძალის გავლენით დედამიწა გამობერილია ეკვატორზე, რაც კიდევ უფრო აღიდებს განსხვავებას g_φ -ს მნიშვნელობებს შორის სხვადასხვა განედზე. ამ საკითხს დაუბრუნდებით დედამიწის გრავეიტაციული ველის განხილვის დროს. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ, თუ შემოვიღებთ g_0 აჩქარებას ეკვატორზე, (X, 32) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$g_\varphi \approx g_0 (1 + 0,0034 \sin^2 \varphi) \quad (\text{X}, 33)$$

წონის, ისევე როგორც ყოველი ძალის, საზომი ერთეული CGS სისტემაში უნდა იყოს დინი, ხოლო MKS სისტემაში — ნიუტონი. მაგრამ პრაქტიკაში წონისათვის იყენებენ ე. წ. ტექნიკურ ერთეულებს — გრამ-წონასა და კილოგრამ-წონას ან, თუ არ არის საშიშროება მასის ერთეულთან არევისა, გრამსა და კილოგრამს. მართალია, ძალიან უხერხულია, რომ სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდის — მასისა და წონის საზომ ერთეულებს ერთი და იგივე სახელწოდება აქვთ: გრამი და კილოგრამი, მაგრამ ეს სახელწოდებები ისე დამკვიდრდა ყოველდღიურ ცხოვრებასა და მეცნიერებაში, რომ მათი შეცვლა სრულიად შეუძლებელია. გრამ-წონა (კილოგრამ-წონა) განიმარტება

როგორც წონა გრამი (კილოგრამი) მასის მქონე სხეულისა 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე. ასეთი დაზუსტება ადგილმდებარეობისა და სიმაღლისა საჭიროა, ვინაიდან სხეულის წონა ყველგან ერთი და იგივე არ არის. რადგანაც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად

$$P = mg$$

და g -ს მნიშვნელობა 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე არის $g = 980,62$, გრამ-წონა შემდეგი თანათუარდობით იქნება დაკავშირებული დინთან:

$$1 \text{ Gr} = 980,62 \frac{gr \cdot cm}{sec^2} = 980,62 \text{ dyn.}$$

აქ Gr -ით აღნიშნულია გრამ-წონა იმისათვის, რომ განვასხვაოთ მასის ერთეულის gr -ის აღნიშვნისაგან. ასევე კილოგრამ-წონა აღნიშნება kGr -ით. მიახლოებითი გამოთვლებისას თვლიან, რომ ერთი გრამ-წონა 980 ან 981 დინს უდრის.

თუ წონა გაიზომება გრამ-წონით, მაშინ წონისა და მასის დამაკავშირებელი ფორმულა იქნება

$$P^* = m,$$

სადაც P^* ნიშნავს, რომ წონა გაზომილია ტექნიკურ ერთეულებში (ზუსტად ეს ფორმულა გამოდგება მხოლოდ 45° -ის განედზე და ზღვის დონეზე, მაგრამ თუ არ მივიღებთ მხედველობაში g -ს ცვალებადობას მდებარეობის მიხედვით, იგი შეიძლება ყოველთვის გამოვიყენოთ).

2. ვარდნილი სხეულის გადახრა აღმოსავლეთისაკენ. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც m მასის სხეული გარკვეული h სიმაღლიდან ვარდება დედამიწის ზედაპირზე ნულოვანი საწყისი სიჩქარით (ვერტიკალური მიმართულებით). დედამიწა რომ არ ბრუნავდეს, სხეული იმოძრაებდა ზუსტად ვერტიკალურად და დაეცემოდა O წერტილში (ნახ. 102). მაგრამ დედამიწის არაინერციულობის გამო ყოველი ვარდნილი სხეული იხრება აღმოსავლეთისაკენ, ე. ი. იგი დაეცემა არა O , არამედ C წერტილში. ამ მოვლენის ახსნა არაინერციული სისტემის თვალსაზრისით ასეთია: ვარდნილი სხეულის \vec{v}_1 სიჩქარე (მბრუნავი დედამიწის მიმართ) მიმართულია დედამიწის ცენტრისაკენ, ვერტიკალის გასწვრივ, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე მიმართულია ღერძის გასწვრივ სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ, ადვილად დავასკვნით,

რომ კორიოლისის ძალა მიმართული უნდა იყოს აღმოსავლეთისაკენ. ამ ძალის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$F_k = 2 m v_1 \omega \cos \varphi, \quad (X, 34)$$

სადაც φ არის განედი. სათანადო აჩქარებისათვის მივიღებთ

$$a_k = 2 v_1 \omega \cos \varphi. \quad (X, 35)$$

ვინაიდან ვარდნა თანაბრად აჩქარებული მოძრაობაა და ჩვენ დავუშვით, რომ საწყისი სიჩქარე ნულია, სიჩქარისათვის t მომენტში გვექნება

$$v_1 = gt;$$

სადაც g არის ვარდნის აჩქარება. კორიოლისის აჩქარებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$a_k = 2 g \omega \cos \varphi \cdot t.$$

კორიოლისის ძალის გავლენით მინიჭებულ და აღმოსავლეთისაკენ მიმართულ სიჩქარეს მივიღებთ ინტეგრებით დროის მიმართ

$$v_k = g \omega \cos \varphi \cdot t^2.$$

კიდევ ერთი ინტეგრება მოგვცემს აღმოსავლეთისაკენ გადახრის სიშორეს

$$s_k = \omega \cos \varphi \cdot \frac{gt^3}{3}. \quad (X, 36)$$

თუ ვარდნა T დროის განმავლობაში წარმოებს, OC მონაკვეთი გამოითვლება ფორმულით

$$OC = \omega \cos \varphi \cdot \frac{gT^3}{3}. \quad (X, 37)$$

ეს გადახრა შეიძლება გამოვხატოთ ვარდნის სიმაღლის საშუალებით, თუ გავიხსენებთ ფორმულას, რომელიც აკავშირებს h და T სიდიდეებს

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

წინა ფორმულაში ჩასმა მოგვცემს

$$OC = \frac{1}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{8h^3}{g}}. \quad (X, 38)$$

ასეთ მანძილზე უნდა გადაიხაროს აღმოსავლეთისაკენ $\frac{1}{2}$ სიმაღლიდან ჩამოვარდნილი სხეული კორიოლისის ძალის გავლენით. როგორც ვხედავთ, იგი უდიდესია ეკვატორზე და ნულის ტოლია პოლუსზე. აღსანიშნავია, რომ გადახრა ყოველთვის აღმოსავლეთისაკენ წარმოებს მიუხედავად იმისა, თუ რომელ ნახევარსფეროში ხდება ვარდნა.

მიღებული შედეგი შემოწმებული იყო ცდებით. გადახრა აღმოსავლეთისაკენ არსებობს ყოველ ეჭვს გარეშე, მხოლოდ თეორიასთან რაოდენობითი შედარება ძალიან ძნელია, ვინაიდან გაზომვებს ხელს უშლის ჰაერის წინააღმდეგობა. მიუხედავად ამისა, გაზომილი გადახრები იმავე რიგისაა, როგორც თეორიულად გამოთვლილი. ამას ნათლად გვიმტკიცებს ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი, რომელშიც მოცემულია ცდებისა და თეორიის შედეგები.

ცხრილი 4

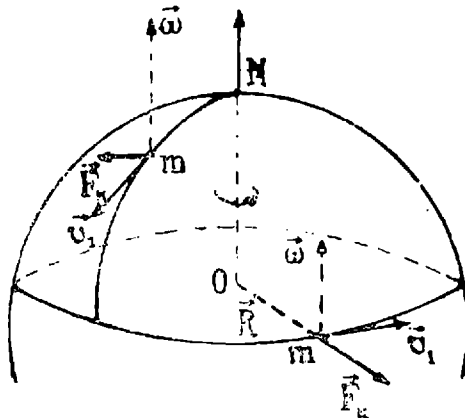
დამკვირვებელი	დაკვირვების წელი	სიმაღლე m	გადახრა mm	
			გამოივლილი	ცდით
რეიზი	1813	158	27.5	28,3±4
ჰალი	1902	23	1,77	1,05±0,05
ფლამარიონი	1903	69	8,1	6,3
ჰაგენი	1912	23	0,899	0,899

3. კორიოლისის ძალის მოქმედება დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ მოძრავ სხეულზე. განვიხილოთ დედამიწის ზედაპირის გასწვრივ მოძრავი სხეულის შემთხვევა. ვთქვათ, m მასის სხული მოძრაობს ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში ჩრდილოეთიდან სამხრეთისაკენ, მერიდიანის გასწვრივ (ნახ. 103). ნახაზზე ნაჩვენებია მისი სიჩქარის მიმართულება. როგორც (X, 20) ფორმულიდან გამომდინარეობს, კორიოლისის ძალა მიმართული იქნება დასავლეთისაკენ პარალელის გასწვრივ. სიდიდით იგი იქნება:

$$F_k = 2 m v_1 \omega \sin \varphi. \quad (X, 39)$$

ეს ძალა უდიდესია პოლუსზე და ნულის ტოლია ეკვატორზე. მოძრაობის მიმართ იგი მიმართულია მარჯვნივ. იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ დავუშვებთ, რომ სხეული მოძრაობს სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ. სიჩქარე შეიცვლის მიმართულებას, რაც გამოიწვევს კორიოლისის ძალის მიმართულების შეცვლას; ეს იმას ნიშნავს

ნავს, რომ ახლა იგი მიმართული იქნება აღმოსავლეთისაკენ, მაგრამ მოძრაობის მიმართ იგი ისევ მარჯვნივ იქნება მიმართული. როგორც ვხედავთ, ყოველ სხეულზე, რომელიც ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოძრაობს მერიდიანის გასწვრივ, მოქმედებს მოძრაობისადმი მარჯვნივ მიმართული კორიოლისის ძალა. ვთქვათ ახლა,



ნახ. 103.

რომ სხეული მოძრაობს პარალელის გასწვრივ. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია კორიოლისის ძალის მიმართულება იმ შემთხვევაში, როდესაც მოძრაობა წარმოებს დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ. როგორც ვხედავთ, იგი მიმართულია ღერძიდან განსახილველ წერტილამდე გავლებული \vec{R} რადიუს-ვექტორის გასწვრივ და სიდიდით გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_k = 2mv_1\omega,$$

რადგანაც \vec{v}_1 მიმართულია $\vec{\omega}$ ვექტორის მართობულად. ეს ძალა შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენელად. ერთი იქნება მიმართული ვერტიკალურად და შეამცირებს სხეულის წონას; მეორე მიმართული იქნება ზედაპირის გასწვრივ სამხრეთისაკენ, ე. ი. მოძრაობის მიმართ ისევ მარჯვნივ (ნახ. 104), პირველი მდგენელი გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_k' = 2mv_1\omega \cos \varphi.$$

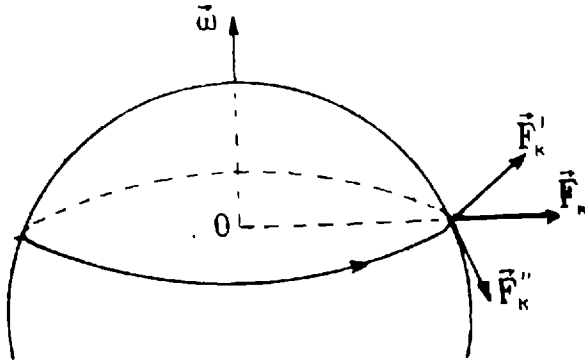
ასეთი სიდიდით მცირდება პარალელის გასწვრივ აღმოსავლეთისაკენ მოძრავი სხეულის წონა. მეორე მდგენელი

$$F_k'' = 2mv_1\omega \sin \varphi$$

იწვევს სხეულის გადახრას სამხრეთისაკენ (მოძრაობის მიმართ მარჯვნივ).

თუ სხეული მოძრაობს ისევ პარალელზე, მხოლოდ დასავლეთისაკენ, მივიღებთ იმავე შედეგს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ სიჩქარის ნიშნის შეცვლის გამო შეიცვლება კორიოლისის ძალისა და მისი მდგენლების მიმართულება. სხეული გადაიხრება არა სამხრეთისაკენ, არამედ ჩრდილოეთისაკენ. მოძრაობის მიმართ ეს ტენდება ისევ გადახრა მარჯვნივ.

როგორც ვხედავთ, ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოძრავი სხეული კორიოლისის ძალის მოქმედების შედეგად, წონის გაზრდის ან



ნან. 104.

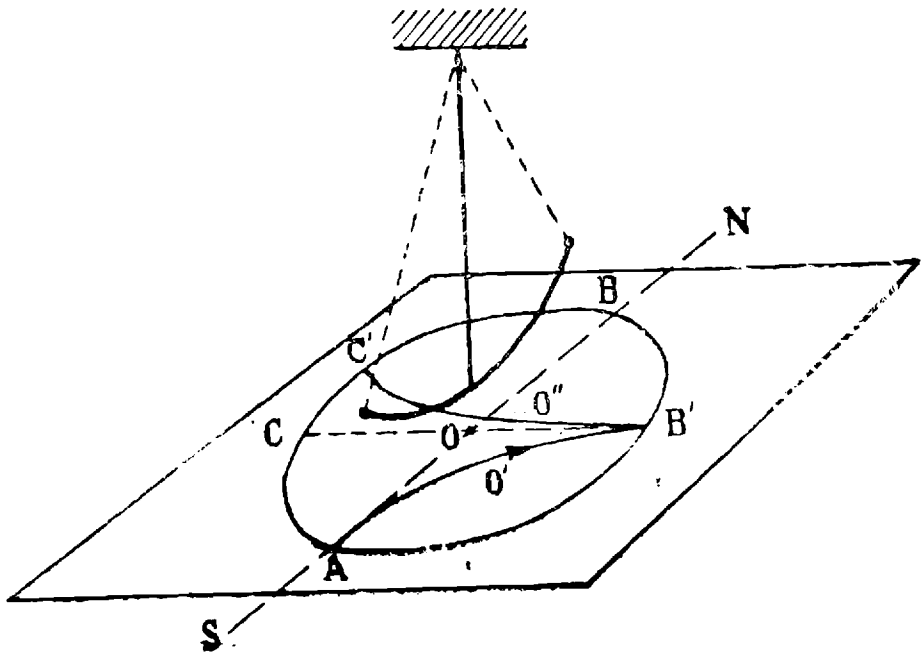
შემცირების გარდა, განიცდის კიდევ გადახრას ყოველთვის მოძრაობის მიმართ მარჯვნივ. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ სამხრეთ ნახევარსფეროში მოძრავი სხეული ყოველთვის მოძრაობის მიმართ მარცხნივ გადაიხრება.

კორიოლისის ძალის მოქმედებით არის გამოწვეული მრავალი, პირველი შეხედვით, უცნაური მოვლენა, რომლებსაც ჩვენ ვხვდებით დედამიწის ზედაპირზე სხეულების მოძრაობის დროს. მაგალითად, მდინარე, რომელიც ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში მოედინება, უფრო მეტად ჩამორეცხავს მარჯვენა ნაპირს, ვიდრე მარცხენას; მატარებელი უფრო მეტად აწვება მარჯვენა რელსს, ვიდრე მარცხენას და, თუ ლიანდაგზე მოძრაობა ერთი მიმართულებით წარმოებს, იგი (მარჯვენა რელსი) უფრო მეტად გაცვდება. კორიოლისის ძალის მოქმედებით არის გამოწვეული აგრეთვე გასროლილი ყუმბარის გადახრა მარჯვნივ.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია კორიოლისის ძალის მოქმედება ჰაერის ნაკადზე, ე. ი. ქარზე. პოლარული არეებიდან ეკვატორისაკენ, ე. ი. სამხრეთისაკენ მიმართული ცივი ქარი, კორიოლისის ძალის გავლენით გადაიხრება მარჯვნივ, ე. ი. იმოდრავებს არა ჩრდილოეთიდან სამხრეთისაკენ, არამედ ჩრდილო-აღმოსავლეთი-

დან სამხრეთ-დასავლეთისაკენ (ე. წ. ჩრდილო-აღმოსავლეთის პასატი). ასევე, სამხრეთ ნახევარსფეროში წარმოიშვება სამხრეთ-აღმოსავლეთის პასატი, რომელიც უბერავს ანტარქტიკიდან ეკვატორისაკენ. კორიოლისის ძალის მოქმედებით აიხსნება აგრეთვე ჰაერის მოძრაობის ხასიათი ციკლონებსა და ანტიციკლონებში.

4. ფუკოს ცდა. დედამიწის არაინერციულობა გარკვეულ გაელენას ახდენს საქანის მოძრაობაზე, ისევე როგორც ყოველი სხეულის მოძრაობაზე. ვთქვათ, დედამიწა არ ბრუნავს, ე. ი. დავუშვათ, რომ იგი ინერციული სისტემაა, მაშინ მის რომელიმე ადგილას დაკიდებული საქანის რხევა იწარმოებს გარკვეულ ვერტიკალურ სიბრტყეში, ვინაიდან საქანზე მოქმედი ერთადერთი ძალა არის ვერტიკალურად მიმართული სიმძიმის ძალა (ნახ. 105). თუ, მაგალითად, საქანი წონასწორობის მდებარეობიდან გადავხარეთ მერიდიანის სიბრტყეში, იგი ყოველთვის ამ სიბრტყეში უნდა მოძრაობდეს. მაგ-



ნახ. 105.

რამ ჩვენ ვიცით, რომ დედამიწა არაინერციული სისტემაა და ამიტომ საქანის ბირთვზე, გარდა სიმძიმის ძალისა, იმოქმედებს კიდევ კორიოლისის ძალა, მიმართული მოძრაობისადმი მარჯვნივ; ეს ძალა გამოიწვევს ტრაექტორიის გამრუდებას და თუ ამ ძალის გარეშე საქანს უნდა გაევიდო O წერტილზე და მისულიყო B წერტილში, ახლა იგი იმოძრაავს $AO'B'$ ტრაექტორიაზე და მიაღწევს B'

წერტილს. უკან დაბრუნებისას (შემდეგი ნახევარპერიოდი) კორიოლისის ძალის გარეშე იგი გაივლიდა ისევ O წერტილზე და მიაღწევდა C წერტილს, მაგრამ ვინაიდან კორიოლისის ძალა განაგრძობს მოქმედებას, ტრაექტორია გამრუდდება და საქანი იმოძრავებს $B'O'C'$ ტრაექტორიაზე და მიაღწევს C' წერტილს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი მომდევნო ნახევარხვევა წინა რხევასთან შედარებით ცოტათი მობრუნებულ სიბრტყეში წარმოებს, ხოლო თვით ეს მობრუნება ხდება (ხევიდან დახედვის დროს) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. თუ, მაგალითად, პირველი ნახევარხვევა ჩრდილოეთ-სამხრეთ მიმართულებით, ე. ი. მერიდიანის სიბრტყეში მოხდა, შემდეგი ნახევარხვევის სიბრტყე იქნება ჩრდილო-აღმოსავლეთ-სამხრეთ-დასავლეთის მიმართულებით. შემდეგი რხევის სიბრტყე კიდევ უფრო მობრუნებული იქნება და ეს მობრუნება განუწყვეტლად იწარმოებს. ცხადია, რომ მობრუნების კუთხე დამოკიდებული იქნება კორიოლისის ძალის სიდიდეზე, რომელიც გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$F_k = 2 m v_1 \omega \sin \varphi,$$

სადაც φ არის ადგილის განედი. მობრუნების კუთხისათვის მივიღებთ

$$\alpha_\varphi = k \cdot 2 m v_1 \omega \sin \varphi, \quad (\text{X}, 40)$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტი. ამ ფორმულას უფრო მარტივი სახე შეიძლება მივცეთ, თუ გამოვითვლით მობრუნების კუთხეს პოლუსზე მყოფი საქანისათვის, ე. ი. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობისათვის.

$$\alpha_{\frac{\pi}{2}} = k \cdot 2 m v_1 \omega.$$

ჩასმა წინა ფორმულაში მოგვცემს

$$\alpha_\varphi = \alpha_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi. \quad (\text{X}, 41)$$

მობრუნების გამოთვლა პოლუსზე მყოფი საქანისათვის ადვილია. ცხადია, რომ გარკვეულ t დროში საქანის მობრუნების კუთხე ტოლი და საწინააღმდეგოა კუთხისა, რომელზედაც მობრუნდება დედამიწა ამავე დროის განმავლობაში. ვინაიდან ω არის დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, t დროში მობრუნების კუთხისათვის (პოლუსზე) მივიღებთ

$$\alpha_{\frac{\pi}{2}} = \omega t,$$

აქედან რხევის სიბრტყის მობრუნებისათვის φ განედზე გვექნება

$$\alpha_{\varphi} = \omega t \cdot \sin \varphi. \quad (X, 42)$$

თუ ჩავსვამთ ω -ს მნიშვნელობას $\omega = 7,3 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$, მივიღებთ

$$\alpha_{\varphi} = 7,3 \cdot 10^5 t \cdot \sin \varphi.$$

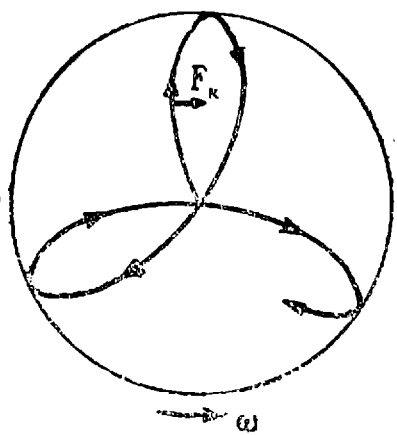
ხშირად ხელსაყრელია მობრუნების კუთხის გამოსახვა არა რადიანებით, არამედ გრადუსებით. ამ შემთხვევაში ფორმულას შემდეგი სახე ექნება (თუ დრო გაზომილი იქნება არა სეკუნდებით, არამედ საათებით):

$$\alpha_{\varphi} = 15^{\circ} \cdot t \sin \varphi. \quad (X, 43)$$

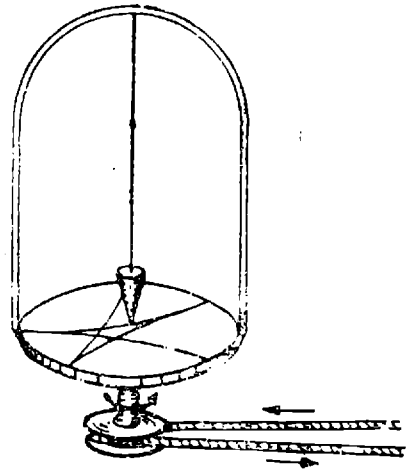
მიღებული შედეგის პირველი ექსპერიმენტული შემოწმება მოახდინა 1851 წელს ცნობილმა ფრანგმა ფიზიკოსმა ფუკომ, ამიტომაც ეწოდება განხილულ საქანს ფუკოს საქანი. ცხადია, რაც უფრო დიდია საქანის რხევის პერიოდი, ე. ი. მისი სიგრძე, მით უფრო ადვილად შეიმჩნევა სიბრტყის მობრუნება ერთი ან რამდენიმე რხევის განმავლობაში. რასაკვირველია, ცდის ჩატარების დროს უნდა იქნეს მიღებული ყოველგვარი ზომა, რათა გარეშე მიზეზებმა ხელი არ შეუშალოს მოვლენის დამზერას. საქანს უნდა ჰქონდეს საშუალება აწარმოოს რხევა ყველა მიმართულებით, მისი ტვირთი საკმაოდ მძიმე და სიმეტრიული უნდა იყოს (რათა არ იმოქმედოს ჰაერის ხახუნმა), იგი უნდა დავიცვათ ჰაერის მოძრაობისაგან და ა. შ. საქანს ამაგრებენ ან კარდანის საკიდზე ან ჰორიზონტალურ ბურთულა-საკისარზე, რომელიც ბრუნავს საქანის სიბრტყესთან ერთად. ფუკოს პირველ ცდაში საქანის სიგრძე იყო 67 მეტრი, ხოლო ტვირთი იწონიდა 28 კილოგრამს. ერთ სრულ რხევას საქანი 16 სეკუნდში ასრულებდა და თავისი მოძრაობის კვალს ტოვებდა იატაკზე დაყრილ ქვიშაზე. ცდამ სავსებით დაადასტურა საქანის სიბრტყის მობრუნების ფაქტი და თვალსაჩინოდ დაამტკიცა დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძის გარშემო. ეს ცდა მრავალჯერ იქნა გამეორებული სხვადასხვა ადგილას და ყველა შემთხვევაში ცდის შედეგი საკმაო სიზუსტით თანხვედბოდა თეორიის შედეგებს. 106-ე ნახაზზე მოყვანილია ფუკოს საქანის ტრაექტორიის სახე იმ შემთხვევაში, როდესაც იგი გამოყვანილია წონასწორობის მდებარეობიდან ბიძგით.

107-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ფუკოს საქანის მოდელი. დისკოს ცენტრში დაკიდებულია საქანი, რომელსაც შეუძლია რხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში. საქანის ქვედა ნაწილში მიმაგრებულია ძაბრი, რომლიდანაც ჩამოყრილი ქვიშა ტოვებს მოძრაობის კვალს დის-

კოზე. დისკოს ნელი ბრუნვის დროს კარგად ჩანს ტრაექტორიის გამრუდება და საქანის სიბრტყის მობრუნება. ცხადია, რომ ეს მოდელი ეთანადება დედამიწის პოლუსზე მყოფ ფუკოს საქანს.



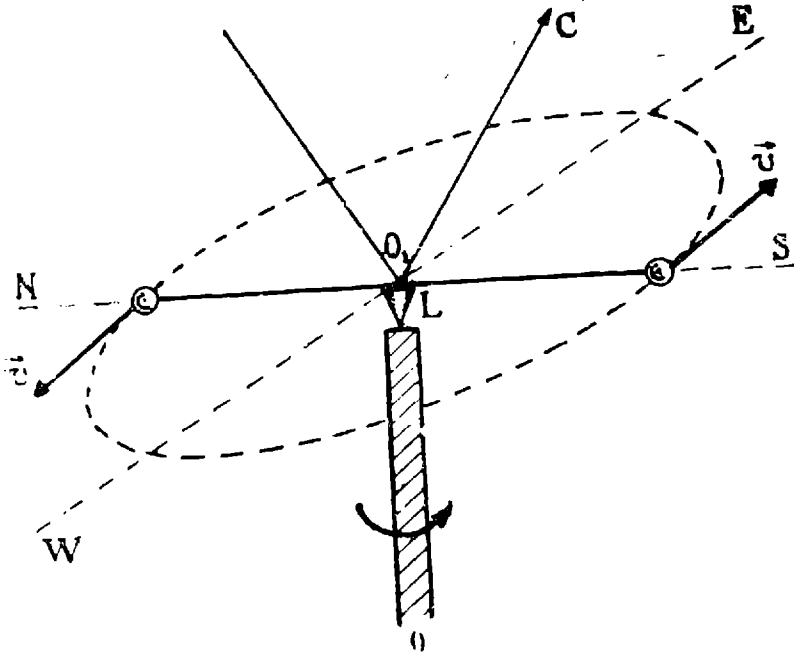
ნახ. 106.



ნახ. 107.

5. ეტვეშის ცდა. როგორც ზემოთ ვნახეთ, პარალელის გასწვრივ მოძრაობის დროს სხეულის წონა იცვლება, სახელდობრ, დასავლეთიდან აღმოსავლეთისაკენ მოძრაობის დროს წონა იზრდება, შებრუნებული მიმართულებით მოძრაობისას კი კლებულობს. ამ მოვლენის შემოწმების შესაძლებლობას იძლევა ცნობილი უნგრელი ფიზიკოსის—ეტვეშის ცდა. სათანადო ხელსაწყოს ე. წ. გრეხითი სასწორის სქემა მოყვანილია 108-ე ნახაზზე. სასწორის ბერკეტი ეყრდნობა ცილინდრული ღერის ზედა ფუძეს პრიზმის წიბოთი. ბერკეტის ბოლოებზე მოთავსებულია ორი ტოლი მასის მქონე სხეული. პრიზმის ფუძეზე დამაგრებულია ბრტყელი L სარკე. ცილინდრულ ღერს შეუძლია ბრუნვა OO_1 ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ. ამ ბრუნვის დროს სხეულები იმოძრაებენ პორიზონტალურ სიბრტყეში ისე, რომ როდესაც ერთი მათგანი იმოძრაებს აღმოსავლეთისაკენ, მეორე იმოძრაებს დასავლეთისაკენ ეს გამოიწვევს პირველი ბირთვის წონის გაზრდას და მეორე ბირთვის წონის შემცირებას. ბრუნვის დროს თითოეული სხეულის წონის გაზრდა და შემცირება პერიოდულად ხდება და ამიტომაც ბერკეტი დაიწყებს რხევას ვერტიკალურ სიბრტყეში. ცხადია, რომ L სარკიდან არეკლილი სხივიც დაიწყებს რხევას, რაც შეიძლება შემჩნეულ იქნეს საზომი სკალის საშუალებით. ეფექტის გასაძლიერებლად შემდეგნაირად იქცევიათ: ცილინდრულ ღერს და ბერკეტს ისეთი სიჩქარით აბრუნებენ, რომ მისი

ბრუნთა რიცხვი თანხედეს ბერკეტის ვერტიკალურ სიბრტყეში რხევის სიხშირეს. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში წარმოიშევა რეზონანსი და მოხდება იძულებითი რხევის ამპლიტუდის მნიშვნელოვანი ზრდა. თუ ცნობილია სასწორის მგრძობიერება, შეიძლე-



ნახ. 108.

ბა გამოვითვალოთ წონის ცვლილება და შევამოწმოთ თეორია. ეტვეშის მიერ ჩატარებულმა ცდებმა სავსებით დაადასტურეს თეორიის შედეგები.

გრაფიტაციული ურთიერთქმედების განხილვის დროს ჩვენ ვნახავთ როგორ გამოიყენება ეტვეშის გრეხითი სასწორი გრაფიტაციული და ინერციული მასების პროპორციულობის შესამოწმებლად.

მყარი სხეულის მექანიკა

§ 56. მყარი სხეულის ცნება

ბუნებაში არსებულ და ხელოვნურად დამზადებულ სხეულებზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ გარეშე მოქმედების გავლენით ისინი მეტად თუ ნაკლებად იცვლიან თავის ფორმასა და მოცულობას. არის სხეულები, მაგალითად: ქვები, ლითონები, ხე და სხვა, რომელთა დეფორმაციისათვის, ე. ი. ფორმის ან მოცულობის შეცვლისათვის საჭიროა საკმაოდ დიდი ძალების მოქმედება. ზოგი სხეულის შემთხვევაში (სითხეები, გაზები) ასეთი დეფორმაციის მოხდენა ადვილია. ამბობენ, რომ ის სხეული უფრო მყარია, რომლის დეფორმაცია უფრო ძნელია. ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ ყოველი სხეული, როგორი ბუნებისაც არ უნდა იყოს იგი, არის ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობა, ყოველი დეფორმაცია უნდა ნიშნავდეს სხეულის წერტილებს შორის მანძილების შეცვლას. ამიტომაც ცხადია, რომ, რაც უფრო მცირეა წერტილთა შორის მანძილის ცვლილება, მით უფრო მყარი იქნება სხეული. ცხადია, აგრეთვე, რომ ბუნებაში არ არსებობს ისეთი სხეულები, რომელთა წერტილებს შორის მანძილების შეცვლა სრულიად შეუძლებელი იყოს. ისეთ იდეალურ სხეულს, რომლის წერტილებს შორის მანძილების შეცვლა შეუძლებელია, აბსოლუტურად მყარი სხეული ეწოდება. ყველა სხეული, რომელთაც ყოველდღიურ ცხოვრებაში მყარ სხეულებს უწოდებენ, თავისი მექანიკური თვისებებით ცოტად თუ ბევრად უახლოვდებიან აბსოლუტურად მყარ სხეულებს, მაგრამ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აბსოლუტურად მყარი სხეული ბუნებაში არ არსებობს. მართლაც, როგორი მყარიც არ უნდა იყოს რომელიმე სხეული, მაგალითად: ლითონის ნატეხი, ქვა, ალმასი და სხვა, ყოველთვის შეიძლება გარეშე ძალების მოქმედებით დავაშოროთ ან დავუახლოვოთ მისი ნაწილაკები ერთმანეთს. მაგრამ, თუ ჩვენ შემოვიასახდრებთ ძალებით, რომელთაც არ შეუძლიათ გაზომვის სიზუსტის საზღვრებში ასეთი მოქმედების

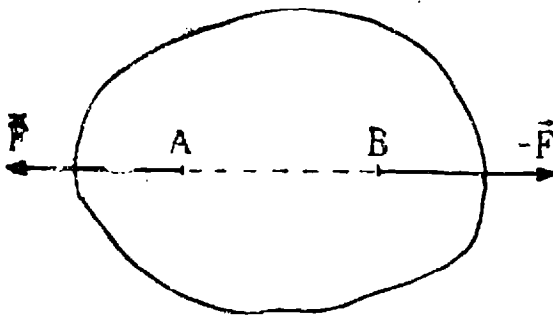
მოხდენა, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ განსახილველი სხეული აბსოლუტურად მყარი სხეულია. ჩვენ შემდეგში, სიმოკლისათვის, აბსოლუტურად მყარ სხეულს ვუწოდებთ მყარ სხეულს.

როგორც შემდეგ ვნახავთ, მყარი სხეულის ის თვისება, რომ მის ნაწილაკებს შორის მანძილის შეცვლა შეუძლებელია, ძალიან ამარტივებს მისი მექანიკური მოძრაობის ხასიათს. მყარი სხეულების მოძრაობის შესწავლა ფრიალ მნიშვნელოვანია, ვინაიდან ცხადია, თუ რამდენად ფართო გამოყენება აქვთ ასეთ სხეულებს ყოველდღიურ ცხოვრებასა და ტექნიკაში.

§ 57. მყარ სხეულზე მოდებული ძალის განხილვის შესაძლებლობა

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც სისტემის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, ძალის მოდების წერტილი სრულიად გარკვეულია და მისი შეცვლა შეუძლებელია ისე, რომ არ შეიცვალოს ამ ძალით გამოწვეული მოქმედება. მაგრამ მყარი სხეულის შემთხვევაში შეიძლება ძალის მოდების წერტილის გარკვეული მიმართულებით გადატანა ისე, რომ ძალის მოქმედება არ შეიცვალოს. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალის ეს თვისება მჭიდროდ არის დაკავშირებული მის წერტილებს შორის მანძილების უცვლელობასთან.

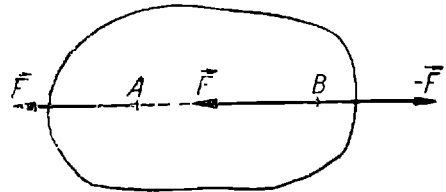
დავამტკიცოთ ჯერ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ორი ტოლი, ურთიერთსაწინააღმდეგო და ერთ ხაზზე მდებარე ძალა არავითარ მოქმედებას არ ახდენს მყარ სხეულზე (ნახ. 109). გავვლოთ მყარ



ნახ. 109.

სხეულში რაიმე სწორი ხაზი და მის ორ A და B წერტილში მოვდოთ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული ტოლი ძალები. A წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალა ანიჭებს მას გარკვეულ აჩქარებას თავისი მოქმედების გასწვრივ. B წერტილზე მოდებული $-\vec{F}$ ძალა აგრეთვე ანიჭებს ამ წერტილს საწინააღმდეგოდ მიმართულ აჩქარებას, მაგრამ ვინაიდან A და B წერტილებს შორის მანძილი

არ შეიძლება შეიცვალოს (რადგანაც მათ შორის მყარი ბმაა), $+ \vec{F}$ ძალის გავლენით B წერტილი იმავე აჩქარებით უნდა ამოძრავდეს, როგორც A წერტილი. ასევე $-\vec{F}$ ძალამ უნდა მიანიჭოს A წერტილს ისეთივე აჩქარება, როგორც იგი B წერტილს ანიჭებს; აქედან გამომდინარეობს, რომ \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების გავლენით როგორც A , ისე B წერტილი ტოლ და საწინააღმდეგოდ მიმართულ აჩქარებებს ღებულობენ. მაშასადამე, ასეთ ორ ძალას არ შეუძლია შეცვალოს A და B წერტილების მოძრაობის ხასიათი. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ტოლი, ერთ ხაზზე მდებარე და საწინააღმდეგოდ მიმართული ორი ძალა არავითარ მოქმედებას არ ახდენს მყარი სხეულის მოძრაობაზე.



ნახ. 110.

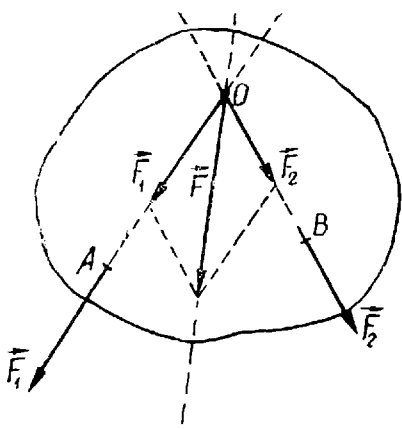
მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების ამ თვისებაზე დამყარებით დავამტკიცოთ, რომ შესაძლებელია მყარი სხეულის რაიმე წერტილზე მოქმედი ძალის მოდების წერტილის გადატანა ამ ძალის მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში (ამ გადატანას უწოდებენ ძალის გასრივებას მოქმედების ხაზის გასწვრივ). მართლაც, ვთქვათ, მყარი სხეულის რაიმე A წერტილზე მოდებულია \vec{F} ძალა (ნახ. 110). ავიღოთ ამ ძალის მოქმედების ხაზზე ნებისმიერი B წერტილი და მოვდოთ მასზე ორი ტოლი, ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ და ამ ხაზის გასწვრივ მდებარე \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები; ამით, რასაკვირველია, მყარი სხეულის მოძრაობის ხასიათი არ შეიცვლება. ახლა ჩვენ გვაქვს მყარ სხეულზე მოქმედი სამი ძალა, ერთი \vec{F} ძალა, მოდებული A წერტილზე, და ორი \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალა, მოდებული B წერტილზე. მაგრამ ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ A და B წერტილებზე მოდებული \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები არავითარ მოქმედებას არ ახდენენ მყარ სხეულზე, ე. ი. ისინი აბათილებენ ერთმეორეს. გვრჩება B წერტილზე მიდებული \vec{F} ძალა, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია მყარ სხეულზე მოდებული ძალის გადატანა მისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

მყარ სხეულზე მოქმედი ძალის ასეთი „გასრივების“ შესაძლებლობა მისი მოქმედების ხაზის გასწვრივ ძალიან ამარტივებს მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების შეკრებას.

§ 58. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების შეკრების მარტივი შემთხვევები

შესაძლებელია, და უმრავლეს შემთხვევაში სწორედ ასეც არის, რომ მყარ სხეულზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, რომლებიც მოდებული არიან სხვადასხვა წერტილზე. ისმის საკითხი ამ ძალების შეკრების შესახებ, ე. ი. პასუხის გაცემის შესახებ შემდეგ კითხვაზე: ხომ არ შეიძლება ეს ძალები შეიცვალოს ისეთი ძალების ნაკლები რიცხვით (კერძო შემთხვევაში ერთი ძალით), რომელთა მოქმედება თავიდანვე მოცემული ძალების ეკვივალენტური იქნება? მაგალითად, ხომ არ შეიძლება ორი ძალა შეიცვალოს ერთი ეკვივალენტური ძალით? ყოველთვის არის შესაძლებელი ასეთი შეცვლა თუ არა? ამ კითხვებზე პასუხის გაცემა დავიწყოთ მარტივი შემთხვევების გარჩევით. თავისთავად ცხადია, რომ თუ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები ერთ წერტილზეა მოდებული, მათი შეკრება, ე. ი. ერთი ძალით შეცვლა, უნდა მოხდეს ისე, როგორც ამას ვახდენდით ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალების შემთხვევაში, ე. ი. პარალელოგრამის ან მრავალკუთხედის წესით.

1. ერთ სიბრტყეში მდებარე და გადამკვეთი ძალების შეკრება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი ისეთი ძალა, რომ თუმცა ისინი სხვადასხვა წერტილებზეა მოდებული, მათი მოქმედების ხაზები იკვეთებიან (ნახ. 111). აღვნიშნოთ A წერტილზე მოდებული ძალა \vec{F}_1 -ით, ხოლო B წერტილზე მოდებული კი \vec{F}_2 -ით. მათი მოქმედების ხაზების გადაკვეთის წერტილი იყოს O წერტილი. გავასრილოთ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები ამ ხაზების გასწვრივ და თავი მოვუყაროთ მათ O წერტილში. წინა პარაგრაფის მიხედვით ეს გასრიალება არ შეცვლის სხეულის მოძრაობის ხასიათს. ჩვენ მივიღებთ ერთ წერტილზე მოდებულ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალებს, რომელთა შეკრება მოხდება პარალელოგრამის წესის მიხედვით. შეკრების შემდეგ მივიღებთ ერთ ძალას



ნახ. 111.

ნახ. 111). აღვნიშნოთ A წერტილზე მოდებული ძალა \vec{F}_1 -ით, ხოლო B წერტილზე მოდებული კი \vec{F}_2 -ით. მათი მოქმედების ხაზების გადაკვეთის წერტილი იყოს O წერტილი. გავასრილოთ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები ამ ხაზების გასწვრივ და თავი მოვუყაროთ მათ O წერტილში. წინა პარაგრაფის მიხედვით ეს გასრიალება არ შეცვლის სხეულის მოძრაობის ხასიათს. ჩვენ მივიღებთ ერთ წერტილზე მოდებულ \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალებს, რომელთა შეკრება მოხდება პარალელოგრამის წესის მიხედვით. შეკრების შემდეგ მივიღებთ ერთ ძალას

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

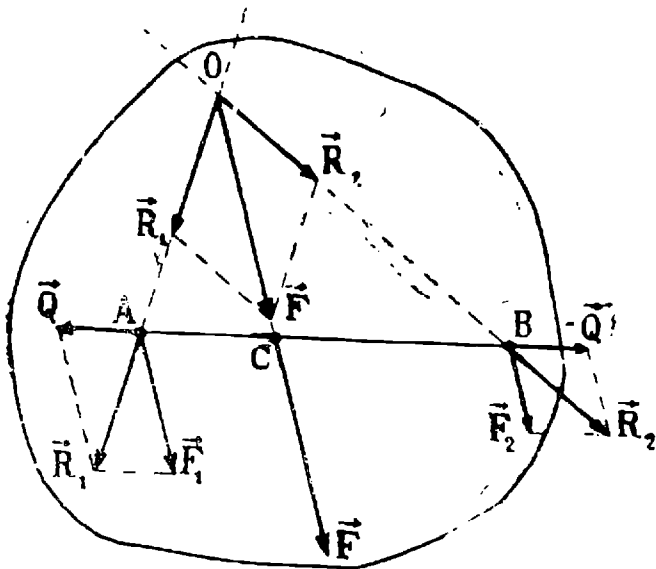
რომელიც O წერტილზე იქნება მოდებული, მაგრამ გასრიალების

შესაძლებლობის თანახმად შეიძლება მოდებულ იქნეს მისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილში მოქმედებს არა ორი, არამედ რამდენიმე ძალა, შეიძლება ასე მოვიქცეთ: ჯერ შევკრებთ ორ გადამკვეთ ძალას. მიღებულ ერთ ძალას შევკრებთ მესამე ძალასთან (თუ, რასაკვირველია, ისინი გადამკვეთია) და გავაგრძელებთ ამ შეკრებას, სანამ არ მივიღებთ ყველა მოცემული ძალის ეკვივალენტურ ერთ ძალას

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

2. პარალელური ძალების შეკრება. შეიძლება მოხდეს, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები არ იყოს გადამკვეთი, მაშინ შეუძლებელია მათი ერთ წერტილში თავმოყრა და ზემოთ მოყვანილი



ნახ. 112.

წესით შეკრება. ასეთია, მაგალითად, 112-ე ნახაზზე ნაჩვენები \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები, რომლებიც მოდებულა A და B წერტილებში. მათი მოქმედების ხაზები პარალელურია და, გარდა ამისა, თვით ძალებიც ამ ხაზების გასწვრივ ერთ მხრივ არიან (მიმართული; ასეთ ძალებს პარალელური ძალები ეწოდებათ; ამ ძალების შეკრებისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ: მოვდოთ A და B წერტილებში ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული \vec{Q} და $-\vec{Q}$ ძალები, რომლებიც იმავე სიბრტყეში მდებარეობენ, რომელშიც \vec{F}_1 და \vec{F}_2

ძალები. ეს, რასაკვირველია, არ გამოიწვევს მყარი სხეულის მოძრაობის ცვლილებას. A წერტილზე მოდებული \vec{F}_1 და \vec{Q} ძალების შეკრებით მივიღებთ \vec{R}_1 ძალას. ასევე B წერტილში მოდებული \vec{F}_2 და $-\vec{Q}$ ძალების შეკრება მოგვცემს \vec{R}_2 ძალას. ეს ორი, \vec{R}_1 და \vec{R}_2 , ძალა კი, როგორც ნახაზიდან ჩანს, აღარ იქნება სარალეული—მათა მოქმედების ხაზები უკვე იკვეთებიან რომელიღაც O წერტილში და, მაშასადამე, მათი შეკრება შეიძლება ზემოთ მოყვანილი წესის მიხედვით. მივიღებთ ერთ \vec{F} ძალას, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\vec{F} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

ეს ტოლქმედი \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების პარალელური იქნება და სიდიდით გაუტოლდება მათ სიდიდეთა ჯამს. იგი მიმართული იქნება ისევე, როგორც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები. ეს ძალა შეიძლება გავასრიალოთ მისი მოქმედების ხაზის გასწვრივ ისე, რომ მისი მოდების წერტილი მოთავსდეს A და B წერტილების შემაერთებელ ხაზზე, რომელიღაც C წერტილში. მაშინ ნახაზიდან ადვილად ვიპოვიან, რომ \vec{F} ტოლქმედის მოდების C წერტილიდან \vec{F}_1 და \vec{F}_2 მოდების A და B წერტილებამდე მანძილები სათანადო ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულია

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (\text{XI}, 1)$$

ე. ი. ტოლქმედის მოდების წერტილი იმდენჯერ ახლოს იქნება ერთ-ერთი ძალის მოდების წერტილთან, რამდენჯერაც ეს ძალა მეტია მეორე ძალაზე.

მიღებული შედეგი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: პარალელური ძალების შეკრებისათვის ძალების მოდების წერტილებს შორის მდებარე AB მონაკვეთს ვყოფთ C წერტილით ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულ ნაწილებად. გამყოფ C წერტილში მოვდებთ \vec{F} ძალას, რომელიც \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ჯამის ტოლია; ეს ძალა იქნება \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ტოლქმედი. რასაკვირველია, ეს ტოლქმედი შეიძლება მოდებულ იქნეს არა C წერტილში, არამედ მისი მოქმედების ხაზის ნებისმიერ წერტილში.

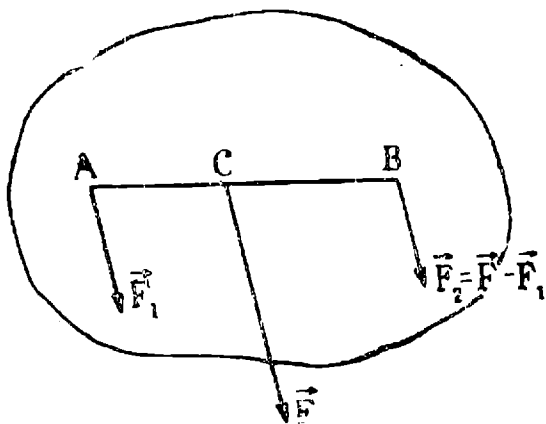
ორი პარალელური ძალის შეკრების შებრუნებული ოპერაცია არის ერთი ძალის დაშლა ორ პარალელურ ძალად. ვთქვათ, ჩვენ გვსურს \vec{F} ძალის დაშლა ისეთ ორ სარალეულ ძალად, რომელთაგან ერთი (\vec{F}_1) მოდებულია A წერტილში. მოსაძებნია მეორე

ძალა და მისი მოდების წერტილი (ნახ. 113). AC ხაზის გაგრძელებაზე უნდა მოიძებნოს ისეთი B წერტილი, რომლის მანძილი C წერტილიდან მოცემული იქნება ($\lambda I, 1$) ფორმულით; ამ წერტილში უნდა მოვდოთ \vec{F}_2 ძალა, რომელიც იქნება \vec{F} და \vec{F}_1 ძალების სხვაობა

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1,$$

მაშასადამე, \vec{F} ძალა დაიშალა ორ პარალელურ ძალად.

თუ მყარ სხეულზე მოქმედებს რამდენიმე პარალელური ძალა, მათი შეკრება უნდა მოვახდინოთ თანდათანობით. ჯერ შევკრებთ



ნახ. 113.

ორ ძალას, შემდეგ მათ ტოლქმედს შევკრებთ მესამე ძალასთან და ა. შ.

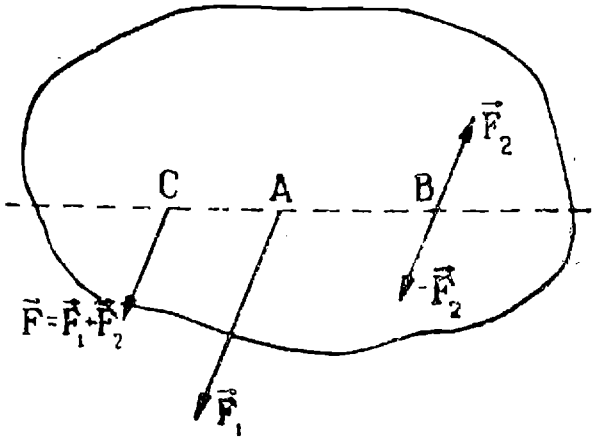
შ. არატოლი და ანტიპარალელური ძალების შეკრება. ძალებს ეწოდებათ ანტიპარალელური, თუ მათი მოქმედების ხაზები პარალელურია, მაგრამ თვით ძალები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ არიან მოგებული (ნახ. 114). ისმის ასეთი ძალების შეკრების ამოცანა. ჯერ დავუშვათ, რომ ძალები არ არიან ტოლი სიდიდის. ვთქვათ, \vec{F}_1 ძალა \vec{F}_2 ძალაზე მეტია. ვისარგებლოთ მე-2 პუნქტში მიღებული შედეგით (რომ შესაძლებელია ძალის დაშლა ორ პარალელურ ძალად). დავშალოთ A წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალა ისეთ ორ პარალელურ ძალად, რომ ერთი მათგანი მოდებული იყოს B წერტილში (\vec{F}_2 ძალის მოდების წერტილში) სიდიდით იყოს \vec{F}_2 ძალის ტოლი და მიმართული იყოს მის საწინააღმდეგოდ. მეორე შესაკრების მოდების C წერტილი მოიძებნება წინათ გამოყვანილი ფორმულებით

$$\frac{AC}{BA} = \frac{F_2}{F_1 - F_2}, \quad (\text{XI}, 2)$$

ხოლო თვით მეორე შესაქრები \vec{F} ძალა მოცემული იქნება ფორმულით

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2).$$

B წერტილში მოდებული \vec{F}_2 და $-\vec{F}_2$ ძალები, ერთმანეთს მოსპობენ და დაგვრჩება მხოლოდ ერთი \vec{F} ძალა, რომელიც იქნება \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების ტოლქმედი; ამ ტოლქმედის მოდების C წერტილი, მოთავსებულია AB მონაკვეთის გარეთ და მისი დაშორება A და B წერტილებიდან \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალების სიდიდეების უკუპროპორციულია.



ნახ. 114.

მაშასადამე, ორი ანტიპარალელური ძალის ტოლქმედი მოდებულია მათი შემაერთებელი მონაკვეთის გარეთ და ამ ძალების სხვაობის ტოლია.

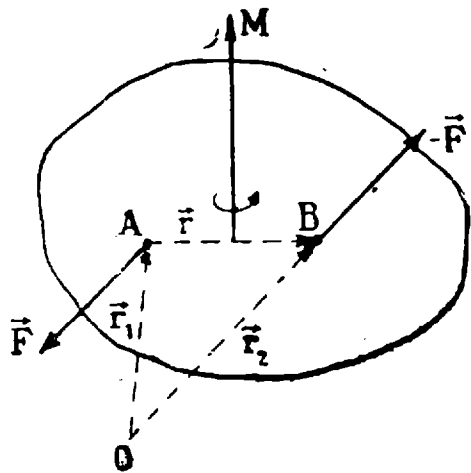
(XI,2) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ტოლქმედის მოდების წერტილი მით უფრო შორსაა, რაც უფრო მცირეა შესაქრები ძალების სიდიდეთა სხვაობა. მართლაც, როდესაც $\vec{F}_1 \rightarrow \vec{F}_2$, ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე უსასრულოდ იზრდება და ვინაიდან AB სასრულია, AC უნდა უსასრულოდ იზრდებოდეს; ეს იმას ნიშნავს, რომ C წერტილი ინაცვლებს უსასრულობისაკენ. თვით ტოლქმედის სიდიდე კი თანდათან მცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ.

ზღვარში, როდესაც ანტიპარალელური ძალები ტოლი გახდებიან, მათი ტოლქმედი ნულის ტოლი იქნება და მოდებული იქნება უსასრულობაში; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ფაქტობრივად ორ ტოლ

ან ანტიპარალელურ ძალას ტოლქმედი არა აქვს. ე. ი. შეუძლებელია ასეთი ორი ძალის მოქმედება შეიცვალოს ისეთი ერთი ძალის მოქმედებით, რომელიც მოდებული იქნება სასრულ მანძილზე სხეულიდან. ამიტომაც ჩვენ თავიდანვე შევიზღუდეთ პირობით, რომ შესაკრები ძალები ტოლი არ არიან.

§ 59. ძალთა წყვილი და მისი თვისებები

ჩვენ გამოვარკვეით, რომ ორ, სიდიდით ტოლ და ანტიპარალელურ ძალას ტოლქმედი არ აქვს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი შეცვლა ერთი ძალით შეუძლებელია. ძალების ასეთ სისტემას ძალთა წყვილი ეწოდება. მაშასადამე, ძალთა წყვილი არის ერთობლიობა ორი, სიდიდით ტოლი და ანტიპარალელური ძალისა. ძალთა წყვილს თავისებური და ფრიალ საინტერესო თვისებები ახასიათებს და იგი ფრიალ მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მყარი სხეულის მექანიკაში, რაც საჭიროს ხდის მის დაწვრილებით განხილვას.



ნახ. 115.

შემოვიდროთ ძალთა წყვილის მომენტის ცნება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ძალთა წყვილი, რომლის \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალები მოდებული არიან A და B წერტილებში (ნახ. 115). ავირჩიოთ რაიმე O წერტილი და გამოვითვალოთ \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების მომენტების ჯამი ამ წერტილის მიმართ. თუ A და B წერტილების რადიუს-ვექტორებს O წერტილის მიმართ \vec{r}_1 -ითა და \vec{r}_2 -ით აღვნიშნავთ, მომენტების ჯამისათვის მივიღებთ:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}] + [\vec{r}_2 \vec{F}] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{F}] = [\vec{r} \vec{F}], \quad (XI,3)$$

სადაც \vec{r} არის რადიუს-ვექტორი, მიმართული B წერტილიდან A წერტილისაკენ. ცხადია, რომ ძალთა წყვილის მომენტი არ არის დამოკიდებული O წერტილის არჩევაზე, ვინაიდან იგი არის ვექტორული ნამრავლი ძალების მოდების წერტილებს შორის გავლენილი \vec{r} რადიუს-ვექტორისა ერთ-ერთ ძალაზე (რომელ ძალაზე,

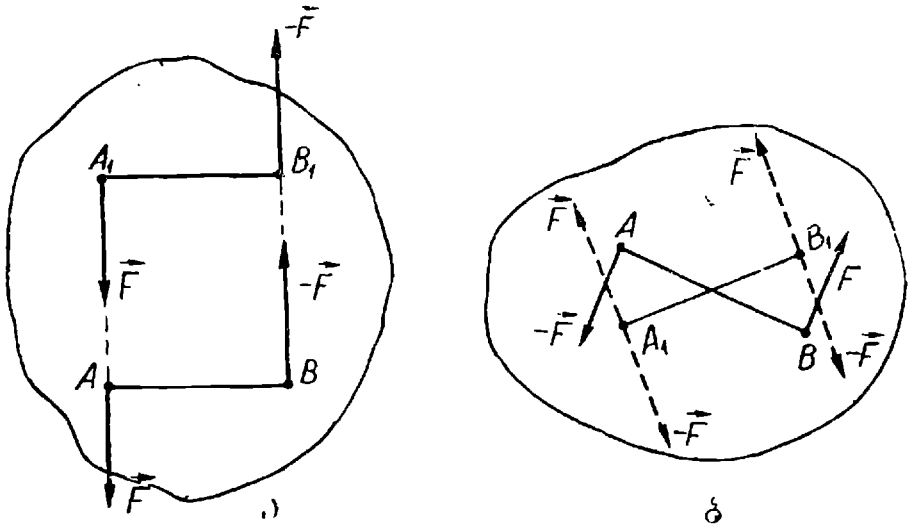
ამას მნიშვნელობა არა აქვს, რადგანაც ძალის შეცვლის დროს დაგვეჭირდება \vec{r} -ის მიმართულების შეცვლა). შეიძლება მომენტი გამოვითვალოთ ერთ-ერთი ძალის მოდების წერტილის მიმართ, მაგალითად, B წერტილის მიმართ; ამ შემთხვევაში $-\vec{F}$ ძალის მომენტი ნული იქნება და დაგვრჩება მხოლოდ \vec{F} ძალის მომენტი. მოდების წერტილებს შორის გავლებულ რადიუს-ვექტორს ძალთა წყვილის მხარი ეწოდება. ჩვეულებრივად ძალთა წყვილის მდგენელ ძალებს ისე გაასრიალებენ მათი მოქმედების ხაზების გასწვრივ, რომ მხარი მათი მართობული გახდეს. ცხადია, რომ ძალთა წყვილის ასეთი წარმოდგენა აუცილებელი არ არის, მაგრამ სიმარტივისათვის ჩვენ შემდეგში ძალთა წყვილს ყოველთვის ასე წარმოვადგენთ. ცნება ძალთა წყვილის მომენტისა ფრიად მნიშვნელოვანია. როგორც ვნახავთ, ძალთა წყვილი მთლიანად მომენტით ხასიათდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ნებისმიერად ვცვალოთ ძალთა წყვილის მდგენელი ძალები და მისი მხარი და ეს არ შეცვლის მისი მოქმედების ხასიათს, მხოლოდ ამ ცვლილებების დროს არ უნდა იცვლებოდეს ძალთა წყვილის მომენტი. იგივე შეიძლება ასე გამოვთქვათ: ორი ძალთა წყვილი ეკვივალენტურია, ე. ი. ისინი ერთნაირად მოქმედებენ მყარ სხეულზე, თუ მათი მომენტები ტოლია.

დავამტკიცოთ, რომ ძალთა წყვილი, მართლაც, შეიძლება ნებისმიერად გადავადგილოთ ძალების მოქმედების სიბრტყეში. ძალების პარალელური გადატანისათვის ეს უშუალოდ ნახაზიდან ჩანს (ნახ. 116 ა), ვინაიდან A_1 და B_1 წერტილებზე მოდებული ძალთა წყვილი მიღებულია A, B წერტილებზე მოდებული ძალთა წყვილიდან ძალების გასრიალებით, რაც, როგორც ვიცით, არ ახდენს გავლენას სხეულის მოძრაობაზე.

დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება ძალთა წყვილის მობრუნება სიბრტყეში (ნახ. 116). წარმოვიდგინოთ, რომ რაღაც კუთხით შემობრუნებული მხარის ბოლოებზე მოდებულია ორ-ორი ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა. ცხადია, რომ ისინი არ შეცვლიან სხეულის მდგომარეობას. როგორც ნახაზიდან ჩანს, B და B_1 წერტილებში მოდებული \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების ტოლქმედი ტოლი და საწინააღმდეგოა A და A_1 წერტილებში მოდებული $-\vec{F}$ და \vec{F} ძალების ტოლქმედისა. ამიტომ ისინი ჯამში მოგვცემენ ნულს და დაგვრჩება მხოლოდ A_1 და B_1 წერტილებში მოდებული \vec{F}

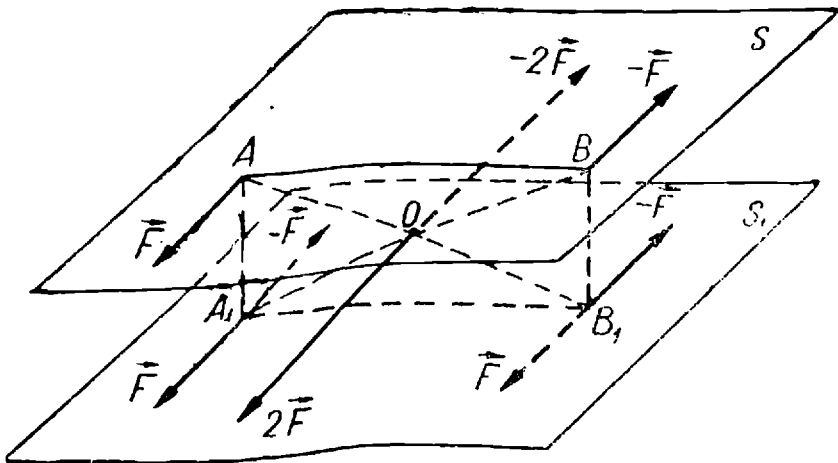
და $-\vec{F}$ ძალები. შვილებთ ისეთივე მომენტის მქონე ძალთა წყვილს, მხოლოდ მობრუნებული მხარით.

ასევე დამტკიცდება, რომ შეიძლება ძალთა წყვილის გადატანა მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ძალების, მათი მხარის სიდიდისა და მიმართულების შეუცვლელად (ცხადია, ასეთი



ნახ. 116.

გადატანის დროს მომენტი უარ შეიცვლება). ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ძალთა წყვილი \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალებით და \vec{M} მომენტით.



ნახ. 117.

გადატაროთ მყარ სხეულში S_1 სიბრტყე, რომელიც პარალელური იქნება \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალებზე გამავალი S სიბრტყისა (ნახ. 117).

ამ ძალების მოდების A და B წერტილებიდან დაეუშვათ მართობები S_1 სიბრტყეზე და აღვნიშნოთ სათანადო წერტილები A_1 და B_1 ასობით. მოვდოთ A_1 და B_1 წერტილებში \vec{F} და $-\vec{F}$ ძალების პარალელური ძალები, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე. ცხადია, რომ ეს ოთხი ძალა წყვილ-წყვილად სპობს ერთმანეთს და ამიტომ ისინი არავითარ გავლენას არ მოახდენენ მყარი სხეულის მდგომარეობაზე. შევკრიბოთ ახლა A წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა B_1 წერტილზე მოდებულ, მის პარალელურ და ტოლ \vec{F} ძალასთან. პარალელური ძალების შეკრების წესის თანახმად მათი ტოლქმედი მიიღება $AB B_1 A_1$ მართკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილში და სიდიდით $2\vec{F}$ -ის ტოლი იქნება. ასევე შეიძლება შეიკრიბოს B და A_1 წერტილებზე მოდებული $-\vec{F}$ და $-\vec{F}$ ძალები. მათი ტოლქმედი ისევ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში იქნება მოდებული და სიდიდით იქნება $-2\vec{F}$ -ის ტოლი. ცხადია, რომ O წერტილში მოდებული $2\vec{F}$ და $-2\vec{F}$ ძალები მოსპობენ ერთმანეთს. დავერჩება A_1 წერტილზე მოდებული \vec{F} ძალა და B_1 წერტილში მოდებული $-\vec{F}$ ძალა, რომელთა ერთობლიობა წარმოადგენს წინანდელ ძალთა წყვილს, მხოლოდ გადატანის S_1 სიბრტყეში. ამ ძალთა წყვილის მომენტი ისეთივეა, როგორც S სიბრტყეში მდებარე ძალთა წყვილისა. მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ძალთა წყვილი შეიძლება გადავიტანოთ მისი მოქმედების სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში ძალებისა და მომენტის შეუცვლელად. ამის შემდეგ შეიძლება (როგორც უკვე ვნახეთ ზემოთ) შევცვალოთ მხარი და ძალები როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით, მხოლოდ ისე, რომ არ შეიცვალოს მომენტი.

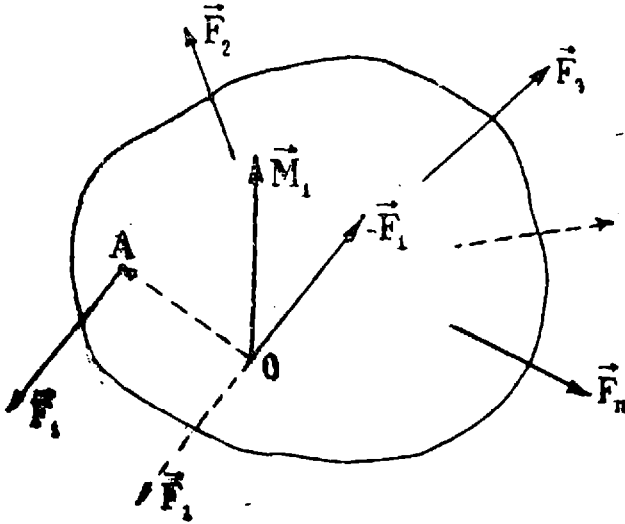
§ 60. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების დაუვანა ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე

ახლა უკვე შესაძლებელია მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალების შეკრება. ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებენ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალები (ნახ. 118). ავარჩიოთ ნებისმიერი O წერტილი, როგორც ძალების შეკრების წერტილი, და გადავიტანოთ ამ წერტილში ყველა ძალა. მოვიქცეთ ამისათვის შემდეგნაირად. ჯერ გადავიტანოთ O წერტილში \vec{F}_1 ძალა. ამისათვის მოვდოთ O წერტილში ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო ძალა — ერთი \vec{F}_1 , ხოლო მეორე $-\vec{F}_1$. ცხადია, ეს არავითარ მოქმედებას არ მოახდენს სხეულის

მოდრობაზე. A წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალა და O წერტილში მოდებული — \vec{F}_1 ძალა შეადგენს ძალთა წყვილს, რომლის მომენტი გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{M}_1 = [\vec{OA} \vec{F}_1].$$

მაშასადამე, A წერტილში მოდებული ერთი \vec{F}_1 ძალა ეკვივალენტურია O წერტილში მოდებული \vec{F}_1 ძალისა და \vec{M}_1 მომენტის მქონე ძალთა წყვილისა: ასევე შეიძლება გადავიტანოთ O წერტილ-



ნახ. 118.

ში \vec{F}_2 ძალა. მივიღებთ O წერტილში მოდებულ \vec{F}_2 ძალას და ძალთა წყვილს, რომლის მომენტი იქნება \vec{F}_2 ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ: $\vec{M}_2 = [\vec{OB} \vec{F}_2]$. ასე შეიძლება გადავიტანოთ O წერტილში ყველა ძალა. მივიღებთ O წერტილში მოდებულ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალებს და n ძალთა წყვილს $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ მომენტებით, რომლებიც წარმოადგენენ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალების მომენტებს O წერტილის მიმართ. O წერტილში მოდებული ძალები შეიკრიბება და მივიღებთ ერთ \vec{F} ძალას, რომელიც იქნება ამ ძალების გეომეტრიული ჯამი და რომელსაც ეწოდება მარეზულტირებელი ძალა.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (XI,4)$$

ასევე შეიკრიბება ყველა ძალთა წყვილი. მიიღება ერთი ძალთა წყვილი, რომლის მომენტი იქნება შესაკრები ძალთა წყვილების მომენტების ჯამი

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (\text{XI},5)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალების სისტემა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ერთ \vec{F} მარეზულტირებელ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე \vec{M} მომენტით.

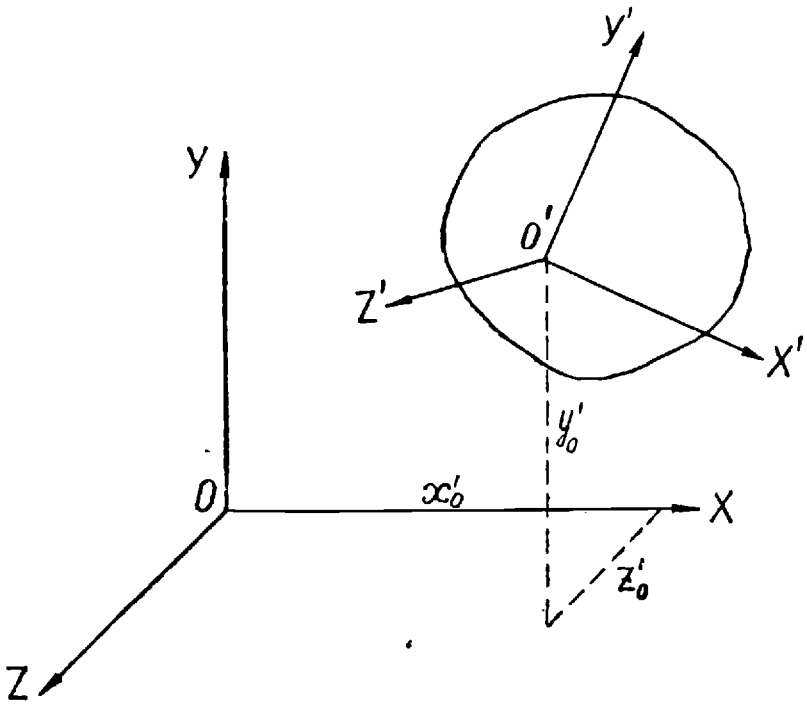
დაყვანის O წერტილის ამორჩევა სრულიად ნებისმიერია. უნდა აღვნიშნოთ მხოლოდ, რომ მისი შეცვლა აუცილებლად გამოიწვევს მარეზულტირებელი მომენტის შეცვლას. მარეზულტირებელი ძალა, არ არის დამოკიდებული დაყვანის წერტილის არჩევაზე, ვინაიდან იგი მოქმედი ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

კერძო შემთხვევაში შეიძლება \vec{M} მარეზულტირებელი მომენტი ნულის ტოლი აღმოჩნდეს. მაშინ ძალები დაიყვანება ერთ \vec{F} ძალაზე, რომელსაც ამ შემთხვევაში ძალების ტოლქმედი ეწოდება. რასაკვირველია, შესაძლებელია შემთხვევა, როდესაც ნულის ტოლია მარეზულტირებელი ძალა და განსხვავდება ნულისაგან მხოლოდ მარეზულტირებელი მომენტი. ამ შემთხვევაში ძალები დაიყვანებიან ერთ ძალთა წყვილზე.

§ 61. მყარი სხეულის მოძრაობის სახეები

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების თვისებები და დავამტკიცეთ, რომ ეს ძალები ყოველთვის შეიძლება დაიყვანოთ ერთ ძალაზე და ერთ ტოლქმედზე. სანამ გადავიდოდეთ იმ საკითხის გარკვევაზე, თუ როგორ მოძრაობას იწვევენ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები, განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობის სახეები. ჯერ გამოვარკვიოთ როგორ განისაზღვრება მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში (არჩეული ძირითადი სისტემის მიმართ). ამისათვის ავარჩიოთ მყარ სხეულში ნებისმიერი O' წერტილი და გავატაროთ ამ წერტილიდან მყარ სხეულთან მჭიდროდ დამაგრებული კოორდინატთა ღერძები $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (ნახ. 119). ცხადია, რომ მყარი სხეულის მდებარეობის განსაზღვრა $OXYZ$ სისტემის მიმართ იგივეა, რაც $O'X'Y'Z'$ სისტემის მდებარეობის განსაზღვრა $OXYZ$ სისტემის მიმართ. ამისათვის კი საჭიროა, რომ განსაზღვრული იყოს O' წერტილის მდებარეობა, ე. ი. მისი კოორდინატები x'_0 , y'_0 , z'_0 და $O'X'$, $O'Y'$ და $O'Z'$ ღერძების ორიენტაცია სივრცეში, რისთვისაც საჭიროა სამი კუთხის ცოდნა. როგორც ვხედავთ, მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში განი-

საზღვრება δ სიდიდით, რაც იმას ნიშნავს, რომ მყარ სხეულს აქვს δ თავისუფლების ხარისხი. ჩვეულებრივად O წერტილად ირჩევენ მყარი სხეულის ინერციის ცენტრს, მაგრამ შეიძლება სხვა წერტილის არჩევაც.



ნახ. 119.

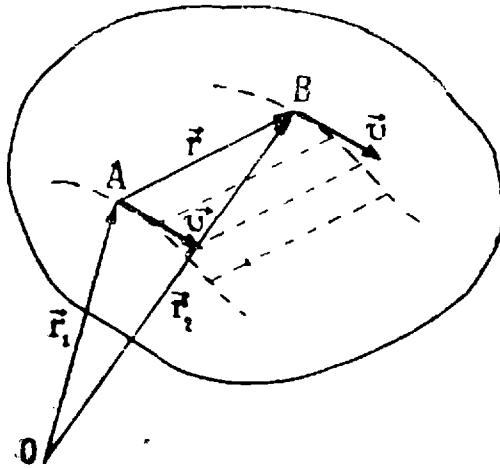
1. გადატანითი მოძრაობა. მყარი სხეულის სხვადასხვა მოძრაობათა შორის ყველაზე მარტივია ე. წ. გადატანითი მოძრაობა; ამ მოძრაობისათვის დამახასიათებელი ის არის, რომ მოძრაობისათვის სისტემის ღერძების ორიენტაცია, ძირითადი ათვის სისტემის მიმართ არ იცვლება. ეს იმას ნიშნავს, რომ მყარი სხეულის მოძრაობის დროს $O'X', O'Y'$ და $O'Z'$ ღერძები თავისი თავის პარალელური რჩებიან. იცვლება მხოლოდ O' სათავის კოორდინატები. ვინაიდან მყარ სხეულში გავლებული ყოველი სწორი ხაზის (მონაკვეთის) ორიენტაცია სავსებით განსაზღვრულია მოძრაობის სისტემის ღერძების ორიენტაციით, ცხადია, რომ რომელი სწორი ხაზიც არ უნდა გავავლოთ მყარ სხეულში, გადატანითი მოძრაობის დროს მისი ორიენტაცია არ შეიცვლება, ე. ი. იგი იმოძრაობს თავისი თავის პარალელურად. ამიტომაც გადატანითი მოძრაობა ასე შეიძლება განვსაზღვროთ: მოძრაობა გადატანითია, თუ მყარ სხეულში გავლებული ყოველი მონაკვეთი თავისი თავის პარალელური რჩება;

აქედან გამომდინარეობს ფრიად მნიშვნელოვანი შედეგი, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის ყველა წერტილი ერთსა და იმავე ტრაექტორიას აღწერს. უფრო მეტიც, ერთი და იგივეა არა მარტო ტრაექტორია, არამედ სიჩქარეც და აჩქარებაც.

მართლაც, აღვნიშნოთ მყარ სხეულში ადებული ორი ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორები ძირითადი სისტემის მიმართ \vec{r}_1 და \vec{r}_2 -ით (ნახ. 120). გაავლოთ მათი შემაერთებელი \vec{r} რადიუს-ვექტორი

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

გადატანითი მოძრაობის განსაზღვრის თანახმად \vec{r} რადიუს-ვექტორი მუდმივია, ვინაიდან, სხეულის სიმყარის გამო, მისი სიგრძე



ნახ. 120.

არ იცვლება, ხოლო მოძრაობის გადატანითობის გამო არ იცვლება მისი მიმართულებაც; აქედან ვღებულობთ

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \quad (\text{XI,6})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მყარი სხეულის სხვადასხვა წერტილს ერთი და იგივე სიჩქარე აქვს. კიდევ ერთხელ გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}, \quad (\text{XI,7})$$

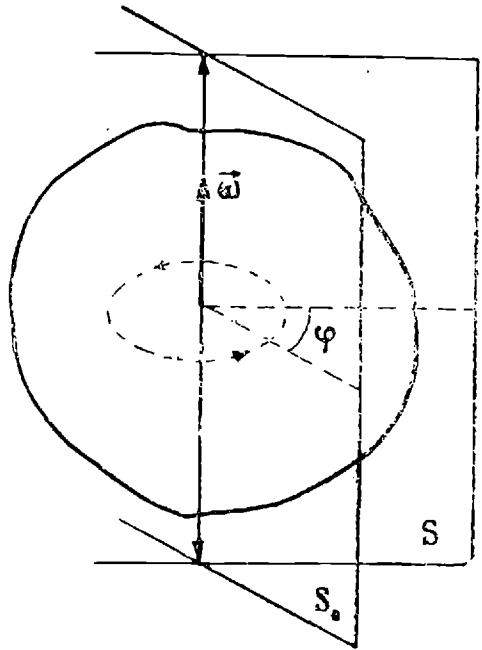
ე. ი. აჩქარებების ტოლობას.

ყოველივე ეს იმას ნიშნავს, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის წერტილები სრულიად ერთნაირად მოძრაობენ და

ამიტომ ასეთი მოძრაობის დახასიათებისა და შესწავლისათვის საკლებით საკმარისია ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობის განხილვა.

2. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. მყარი სხეულის მოძრაობის შემდეგ მართე სახეს წარმოადგენს ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის ორი წერტილი უძრავი ძირითადი სისტემის მიმართ;

ამ შემთხვევაში უძრავი იქნება ამ ორი წერტილის შემაერთებელი სწორი ხაზის ყოველი წერტილიც. ეს ხაზი იქნება სწორედ ის უძრავი ღერძი, რომლის ირგვლივაც ბრუნავს მყარი სხეული (ნახ. 121). ვინაიდან მყარი სხეულების წერტილების დაშორება ღერძამდე უცვლელია, ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც მათ შეუძლიათ შეასრულონ, იქნება სრული მოძრაობა ღერძისადმი მართობ სიბრტყეში. ბრუნვის დროს მყარი სხეულის ყოველი წერტილი შემოწერს წრეხაზს, რომლის ცენტრი მოთავსებული იქნება ღერძზე.



ნახ. 121.

მბრუნავი მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად. გავატაროთ ღერძზე ძირითადი სისტემის მიმართ უძრავი S_0 სიბრტყე და მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი S სიბრტყე. კუთხე, რომელსაც S სიბრტყე ადგენს S_0 სიბრტყესთან და რომელიც იცვლება ბრუნვის დროს, დაგვიხასიათებს მყარი სხეულის მდებარეობას სივრცეში. თუ ამ კუთხეს φ -თი აღვნიშნავთ, ბრუნვა შეიძლება დაგვიხასიათოთ განტოლებით

$$\varphi = f(t).$$

ბრუნვის ხასიათი დამოკიდებული იქნება ამ ფუნქციის სახეზე. ცხადია, რომ მყარი სხეულის ყველა წერტილს ერთი და იგივე კუთხური სიჩქარე ექნება; ეს კუთხური სიჩქარე გამოიხატება $\vec{\omega}$ ვექტორით, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და მიმართუ-

ლია ისე, რომ ბრუნვა წარმოებს მარჯვენა ბურლის წესით, ხოლო სიდიდე გამოისახება ფორმულით:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

რადგანაც მბრუნავი მყარი სხეულის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრეხაზზე, შეიძლება ვისარგებლოთ II თავის მე-10 პარაგრაფში მიღებული ფორმულებით. ნებისმიერი წერტილის სიჩქარისათვის გვექნება ფორმულა

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] = [\vec{\omega} \vec{R}], \quad v = \omega R,$$

სადაც \vec{R} არის ღერძიდან აღებულ წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მბრუნავი მყარი სხეულის წერტილებს სხვადასხვა სიჩქარე აქვთ. რაც უფრო შორსაა წერტილი ღერძიდან, მით უფრო მეტია მისი ხაზოვანი სიჩქარე.

მყარი სხეულის წერტილების აჩქარებისათვის მივიღებთ

$$\vec{a}_n = -\vec{R} \cdot \omega^2;$$

$$\vec{a}_t = [\vec{\varepsilon} \vec{R}],$$

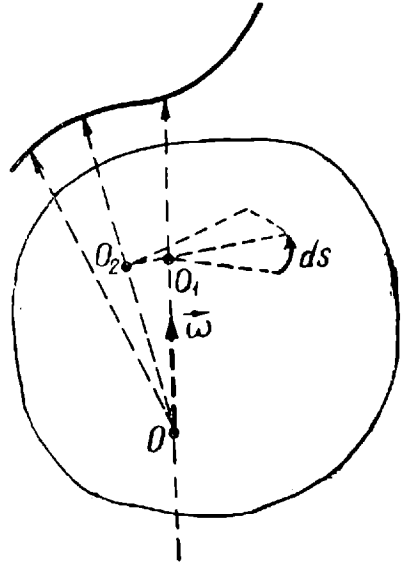
სადაც $\vec{\varepsilon}$ არის კუთხური აჩქარება; იგი, ისევე როგორც $\vec{\omega}$, მიმართულია ღერძის გასწვრივ, ხოლო მისი გეზი კი დამოკიდებულია $\frac{d\omega}{dt}$ წარმოებულის ნიშანზე. თუ $\frac{d\omega}{dt} > 0$, $\vec{\varepsilon}$ მოგეზული იქნება ისევე,

როგორც $\vec{\omega}$, თუ $\frac{d\omega}{dt} < 0$, მისი მიმართულება $\vec{\omega}$ ვექტორის საწინააღმდეგო იქნება.

3. ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. გაცილებით უფრო რთული ხასიათისაა მყარი სხეულის მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როდესაც უძრავია მისი ერთი წერტილი, ცხადია, რომ ასეთი მოძრაობის დროს არ არსებობს რაიმე მკვიდრი, უძრავი ღერძი, რომლის ირგვლივაც ხდებოდეს მყარი სხეულის ბრუნვა. ვინაიდან მყარი სხეულის წერტილებს შორის მანძილი უცვლელია, მისი ყოველი წერტილი იმოდრავებს სფეროს ზედაპირზე, რომლის ცენტრი იქნება უძრავი წერტილი.

ავიჩინოთ მყარი სხეულის რაიმე A წერტილი და გამოვარკვიოთ მისი მოძრაობის ხასიათი. ვთქვათ, dt დროის განმავლობაში ამ წერტილმა შემოწერა მცირე რკალი, რომელიც მისი სიმცირის გამო, შეიძლება განვიხილოთ როგორც წრეხაზის რკალი ds შემოწერილი რომელიც O_1 წერტილის ირგვლივ. მაშინ ამ dt დროის გან-

მაგლობაში O_1 წერტილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უძრავი. რადგანაც O წერტილი უძრავია, უძრავი იქნება (მხოლოდ აღებული dt დროის განმავლობაში) OO_1 ღერძიც (ნახ. 122). მაშასადამე, მყარი სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ საკმაოდ მცირე დროის განმავლობაში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. რასაკვირველია, სხვა მომენტში ღერძი სხვა იქნება, ე. ი. უძრავი იქნება არა O_1 წერტილი, არამედ რომელიმე სხვა წერტილი (O წერტილი ყოველთვის უძრავია). ერთ მომენტში სხეული მობრუნდება ერთი ღერძის ირგვლივ, მეორე მომენტში — მეორე (ცხადია, უსასრულოდ ახლოს მდებარე) ღერძის ირგვლივ და ა. შ. ამიტომ ამ ღერძს ეწოდება მყისი ღერძი. ცხადია, რომ მყისი ღერძი ყოველთვის O წერტილზე გადის.



ნახ. 122.

ბრუნვის $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარე შიშართულია მყისი ღერძის გასწვრივ და იცვლის თავის მიმართულებას მყისი ღერძის შეცვლასთან ერთად. ხაზოვანი სიჩქარე ყოველ მომენტში გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}],$$

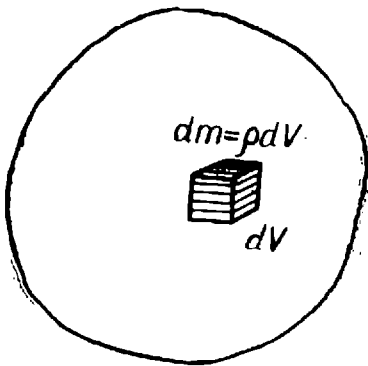
სადაც \vec{r} არის უძრავი O წერტილიდან გავლებული რადიუს-ვექტორი.

§ 62. მყარი სხეულის იმპულსი, ენერჯია და იმპულსის მომენტი. ენერჯიის მომენტი

განვიხილოთ მბრუნავი მყარი სხეულის ძირითადი დინამიკური სიდიდეები. როგორც ვთქვით, მყარი სხეული წარმოადგენს ერთმანეთისაგან უცვლელ მანძილზე მყოფი ნივთიერი წერტილების ჰისტემას. თუ მყარი სხეულის შემადგენელ ნაწილაკთა რიცხვი თვლადია, ე. ი. თუ შეიძლება მათი დანომვრა, მაშინ მისი დამახასიათებელი დინამიკური სიდიდე (იმპულსი, ენერჯია და იმპულსის მომენტი) გამოითვლება როგორც ცალკეული ნაწილაკების სიდიდეების ჯამი. მაგრამ უმეტეს შემთხვევაში მყარი სხეული განიხი-

ლება როგორც უწყვეტი სხეული, რომლის წარმოდგენა ნივთიერი წერტილების თვლადი სიმრავლის აახით შეუძლებელია. მართალია, ჩვენ ვიცით, რომ ყოველი სხეული შედგება ატომების ან მოლეკულების დიდი სასრული რიცხვისაგან, მაგრამ მათი რიცხვი იმდენად დიდია და ისინი ისე ახლოს არიან ერთმანეთთან, რომ პრაქტიკული თვალსაზრისით გაცილებით უფრო ხელსაყრელია სხეულის განხილვა როგორც უწყვეტისა. ამ შემთხვევაში მყარი სხეულის დინამიკური სიდიდეების გამოთვლა შემდეგნაირად წარმოებს.

სხეულში გამოყოფენ იმდენად მცირე მოცულობის ელემენტს, რომ ჩვეულებრივი ზომების თვალსაზრისით შესაძლებელი იყოს მისი ნივთიერ წერტილად, ე. ი. უსასრულოდ მცირე ელემენტად ჩათვლა. მეორე მხრივ, იგი იმდენად დიდი უნდა იყოს ატომების



ნახ. 123.

ზომასთან შედარებით, რომ ნივთიერების განაწილება მის შიგნით უწყვეტად ჩაითვალოს. აღვნიშნოთ ეს ელემენტარული მოცულობა dV -თი, ხოლო მისი მასა — dm -ით (ნახ. 123). მაშინ მისი სიმკვრივე გამოითვლება ფორმულით

$$\rho = \frac{dm}{dV};$$

აქედან ელემენტის მასისათვის მივიღებთ

$$dm = \rho dV.$$

მთელი მასის გამოსათვლელად უნდა მოვახდინოთ dm -ის ინტეგრირება მყარი სხეულის მთელ მოცულობაზე.

$$m = \int dm = \int \rho dV. \quad (XI.8)$$

თუ მყარი სხეული განხილულია, როგორც თვლადი სიმრავლე ნივთიერი წერტილებისა, რომელთა მასები არის m_1, m_2, \dots , მაშინ მთელი მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

შემდეგში ჩვენ ყველა ფორმულას დავწერეთ ან ჯამის ან ინტეგრალის სახით იმისდა მიხედვით, თუ როგორ არის წარმოდგენილი მყარი სხეული: როგორც ნივთიერი ნაწილაკების თვლადი სიმრავ-

ლე თუ როგორც უწყვეტი სხეული. პირველი შემთხვევიდან მეორეზე გადასვლა ფორმულებში ადვილია. ამისათვის m_i უნდა შეიცვალოს dm -ით ან ρdV -ით და ჯამი შეიცვალოს ინტეგრალით.

1. მბრუნავი მყარი სხეულის იმპულსი. გამოვითვალოთ მბრუნავი მყარი სხეულის იმპულსი. თუ i ური ნაწილაკის სიჩქარე არის \vec{v}_i , მისი იმპულსი იქნება $m_i \vec{v}_i$ და მთელი სხეულის იმპულსისათვის მივიღებთ

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (\text{XI},9)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, იმპულსის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს.

$$\vec{K} = \int \vec{v} dm. \quad (\text{XI},9')$$

ამ ფორმულებს შეიძლება უფრო მარტივი და თვალსაჩინო სახე მივცეთ, თუ შემოვიღებთ ინერციის ცენტრს და მის სიჩქარეს. განსაზღვრის თანახმად

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m} \quad \text{ან} \quad \vec{v}_c = \frac{\int \vec{v} dm}{m}.$$

ამიტომ მყარი სხეულის იმპულსისათვის მივიღებთ

$$\vec{K} = m \vec{v}_c, \quad (\text{XI},10)$$

ე. ი. იმპულსი უდრის მასის ნამრავს ინერციის ცენტრის სიჩქარეზე. იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც ინერციის ცენტრი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს, ე. ი. უძრავია, იმპულსი ნულის ტოლი იქნება. თუ ინერციის ცენტრი არ მდებარეობს ღერძზე, მისი იმპულსი ცვალებადი იქნება, ვინაიდან ბრუნვის დროს ინერციის ცენტრი შემოწვრს წრეხაზს და მისი სიჩქარე ცვალებადი იქნება.

2. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები. როგორც ვიცით, წერტილთა სისტემისათვის კინეტიკური ენერგია არის ცალკეული ნაწილაკების კინეტიკური ენერგიების ჯამი.

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

სათანადო ფორმულა უწყვეტი სხეულისათვის იქნება

$$E_k = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} \int v^2 \rho dV. \quad (\text{XI},11)$$

ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულისათვის ამ ფორმულებს სხვა სახე შეიძლება მივცეთ.

მართლაც, ამ შემთხვევაში \vec{v} სიჩქარე შეიძლება გამოვხატოთ $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარის საშუალებით. დავწეროთ ეს კავშირი სკალარულად

$$v = R\omega,$$

სადაც R არის აღებული წერტილიდან ღერძზე დაშვებული მართობის სიგრძე (მანძილი ღერძამდე). ჩასმა (XI,11) ფორმულაში მოგვცემს

$$E_k = \frac{1}{2} \int R^2 \omega^2 dm.$$

მაგრამ მყარი სხეულის ყველა წერტილისათვის ω ერთი და იგივეა, ამიტომ იგი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. მივიღებთ

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \int R^2 dm. \quad (\text{XI}, 11^1)$$

თუ მყარი სხეული წარმოადგენს ნივთიერი წერტილების ერთობლიობას, სათანადო ფორმულა იქნება

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 m_i; \quad (\text{XI}, 12)$$

ამ ფორმულებში შემავალ სიდიდეს $\int R^2 dm$ ან $\sum_{i=1}^n R_i^2 m_i$ ეწოდება

მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ და აღინიშნება I ასოთი.

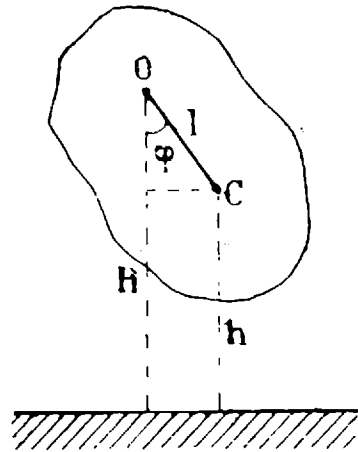
$$I = \int R^2 dm \quad \text{ან} \quad I = \sum_{i=1}^n R_i^2 m_i. \quad (\text{XI}, 13)$$

ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი არის წერტილების (მოცულობის ელემენტების), მასების და ღერძამდე მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამი (ინტეგრალი). ცხადია, რომ ინერციის მომენტი დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე და მასების განაწილებაზე არჩეული ღერძის მიმართ. ინერციის მომენტის საშუალებით კინეტიკური ენერგია შემდეგი სახით დაიწერება:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (\text{XI}, 14)$$

ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია არის ინერციის მომენტისა და კუთხური სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარი. ჩვენ ვხედავთ, რომ მბრუნავი მყარი სხეულის კინეტიკურ ენერგიას აქვს ისეთი სახე, როგორიც ნივთიერი წერტილის კინეტიკურ ენერგიას, განსხვავება იმაშია, რომ მასის მაგიერ ფორმულაში შედის ინერციის მომენტი, ხოლო სიჩქარის მაგიერ—კუთხური სიჩქარე. ინერციის მომენტი მყარი სხეულის ერთ-ერთი ძირითადი დამახასიათებელი სიდიდეა. მის დაწვრილებით განხილვას და გამოთვლის წესებს ჩვენ შემდეგ დავუბრუნდებით.

განვიხილოთ ახლა მბრუნავი მყარი სხეულის პოტენციალური ენერგია. ჩვენ ვიცით, რომ ეს უკანასკნელი არის ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგია. ამიტომაც იგი ორი ნაწილისაგან შედგება. პოტენციალური ენერგიის პირველი ნაწილი იქნება თვით მყარი სხეულის ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგია და იგი დამოკიდებული იქნება მათ ურთიერთდაშორებაზე. მაგრამ ეს მანძილები უცვლელია, ამიტომ უცვლელი იქნება სათანადო პოტენციალური ენერგია და იგი შეიძლება არ მვიდნოთ მხედველობაში. პოტენციალური ენერგიის მეორე ნაწილი დაკავშირებულია მყარი სხეულის და გარეშე სხეულების ურთიერთქმედებასთან და დამოკიდებულია მყარი სხეულის ორიენტაციაზე ბრუნვის დროს. ვინაიდან ეს ორიენტაცია დახასიათებულია მობრუნების φ კუთხით, პოტენციალური ენერგია იქნება ამ კუთხის ფუნქცია.



ნახ. 124.

ზემოთქმულიდან ვღებულობთ, რომ მბრუნავი მყარი სხეულის სრული ენერგია შემდეგი ფორმულით იქნება გამოსახული:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + U(\varphi).$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ, პერიზონტალური ღერძის ირგვლივ ბრუნავს მყარი სხეული (ნახ. 124). C წერტილი იყოს მისი ინერციის ცენტრი. თუ მყარი სხეული დედამიწის მიზიდულობის ველში იმყოფება, მისი პოტენციალური ენერგია დამოკი-

დებული იქნება ინერციის ცენტრის (ამ შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრის) სიმაღლეზე დედამიწის ზედაპირიდან; ეს h სიმაღლე შეიძლება გამოვსახოთ იმ კუთხით, რომელსაც ლერძიდან სიმძიმის ცენტრამდე გავლებული მონაკვეთი ადგენს ვერტიკალურ მიმართულებასთან. ვინაიდან პოტენციალური ენერგია h სიმაღლეზე მყოფი სხეულისა არის mgh , გვექნება

$$U = mgh = mg(H - l \cos \varphi),$$

სადაც H არის ლერძის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან, ხოლო l მანძილი სიმძიმის ცენტრიდან ლერძამდე. ორივე ეს სიდიდე მუდმივია ბრუნვის დროს, ცვალებადია მხოლოდ φ კუთხე და მისი ფუნქციაა მყარი სხეულის პოტენციალური ენერგია.

3. **იმპულსის მომენტი.** გამოვითვალოთ უძრავი ლერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის მომენტი. ზოგადი ფორმულის თანახმად მატერიალური წერტილებისაგან შემდგარი სისტემის იმპულსის მომენტი არის

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i]. \quad (\text{XI}, 15)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, გვექნება

$$\vec{L} = \int dm [\vec{r} \vec{v}]; \quad (\text{XI}, 15^1)$$

ეს გამოსახულება შეიძლება გარდაექმნათ, თუ სიჩქარეს გამოვსახავთ კუთხური სიჩქარის საშუალებით

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}].$$

გვექნება

$$\vec{L} = \int dm [\vec{r} [\vec{\omega} \vec{r}]].$$

ვექტორული ნამრავლის გარდაქმნა მოგვცემს

$$\vec{L} = \int dm \{ \vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \}.$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ იმპულსის მომენტი არ არის მიმართული ლერძის, ე. ი. $\vec{\omega}$ -ს გასწვრივ. ეს კიდევ უფრო ნათელი გახდება, თუ გავამარტივებთ გამოთვლას იმ დაშვებით, რომ ბრუნვის ლერძი თანხვედნილია ერთ-ერთ კოორდინატთა ლერძთან, მაგალითად OZ ლერძთან. ამ შემთხვევაში

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega, \quad (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \omega z.$$

ჩასმა მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= -\omega \int dm x \cdot z, \\ L_y &= -\omega \int dm y \cdot z, \\ L_z &= \omega \int dm (r^2 - z^2) = \omega \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 16)$$

ცხადია, რომ უკანასკნელ ფორმულაში მდგომი გამოსახულება

$$\int dm (x^2 + y^2)$$

წარმოადგენს მყარი სხეულის ინერციის მომენტს OZ ღერძის მიმართ

$$I_z = \int dm (x^2 + y^2), \quad (\text{XI}, 17)$$

ვინაიდან $x^2 + y^2$ არის dm ელემენტის ბრუნვის ღერძამდე მანძილის კვადრატი. პირველ ორ ფორმულაში მდგომი სიდიდეები

$$I_{xz} = \int dm xz \quad \text{და} \quad \int dm \cdot yz = I_{yz}, \quad (\text{XI}, 18)$$

რომლებიც წარმოადგენენ კოორდინატთა ნამრავლებიდან აღებულ ინტეგრალებს, აღინიშნებიან სათანადოდ I_{xy} და I_{yz} . მათ ეწოდებათ ინერციის ნამრავლები. ამის შემდეგ იმპულსის მომენტის მდგენლები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$L_x = -I_{xz}\omega, \quad L_y = -I_{yz}\omega, \quad L_z = I_z\omega. \quad (\text{XI}, 19)$$

ეს ფორმულებიც გვიჩვენებენ, რომ \vec{L} არ არის მიმართული ბრუნვის ღერძის გასწვრივ, ვინაიდან მას აქვს გეგმილები OX და OY ღერძებზე. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ღერძი ისეთია, რომ ინერციის ნამრავლები ნულის ტოლია, იმპულსის მომენტი მიმართული იქნება ბრუნვის ღერძის გასწვრივ,

4. ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ. შტეინერის თეორემა. მთავარი ღერძები. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ღერძის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის ენერჯისა და იმპულსის მომენტის გამოსათვლელად უნდა ვიცოდეთ მყარი სხეულის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ. შემდეგში ჩვენ ვნახავთ, რომ ინერციის მომენტი ისეთივე როლს ასრულებს ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში, როგორსაც მასა გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში.

ავიღოთ კოორდინატთა სათავედ მყარი სხეულის რომელიმე O წერტილი და გავატაროთ ამ სხეულთან დამაგრებული OX , OY და OZ ღერძები. მაშინ, განსაზღვრის თანახმად, ამ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \\ I_y &= \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ I_z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 20)$$

ეს ფორმულები გამოდგება იმ შემთხვევაში, თუ მყარი სხეული წარმოადგენს დისკრეტული ნაწილაკების ერთობლიობას. თუ კი მყარი სხეული განიხილება როგორც უწყვეტი, ინერციის მომენტები გამოითვლება ინტეგრების საშუალებით:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int (y^2 + z^2) \rho dV, \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm = \int (x^2 + z^2) \rho dV, \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 21)$$

ინერციის მომენტი დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე, მასების განაწილებაზე მის შიგნით და ღერძზე, რომლის მიმართაც იგი აითვლება. საზოგადოდ, ინერციის მომენტის გამოთვლა საკმაოდ რთული ამოცანაა. მხოლოდ ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულის შემთხვევაში ხერხდება ინერციის მომენტების მარტივად გამოთვლა. სანამ განვიხილავდეთ ინერციის მომენტების გამოთვლის მაგალითებს, დავამტკიცოთ ეგრეთ წოდებული შტეინერის თეორემა, რომელიც აადვილებს აღნიშნულ გამოთვლებს.

ხშირად საჭიროა სხეულის ინერციის მომენტის გამოთვლა ისეთი ღერძის მიმართ, რომელიც არ გადის ინერციის ცენტრზე. როგორც ახლა ვნახავთ, ამისათვის საკმარისია ვიცოდეთ ინერციის მომენტი ინერციის ცენტრზე გამავალი და განსახილველი ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ და მანძილი ამ ღერძებს შორის.

ვთქვათ, O არის სხეულის ინერციის ცენტრი, ხოლო OZ —მასზე გამავალი ღერძი, რომლის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი ცნობილია

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

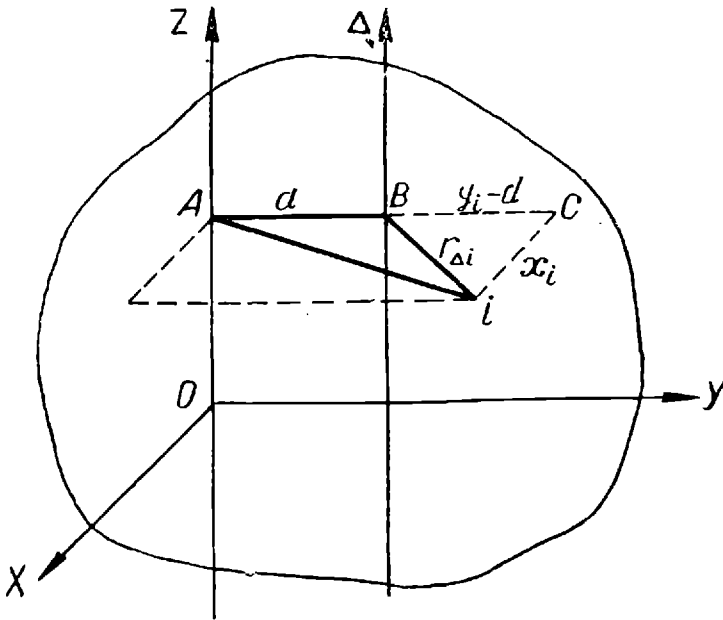
სადაც r_i არის i -ური წერტილის მანძილი OZ ღერძამდე (ნახ. 125). გავატაროთ OZ ღერძის პარალელური Δ ღერძი, რომელიც დაშორებულია OZ ღერძიდან d მანძილით. გამოთვლების გასამარტივებ-

ლად ავარჩიოთ კოორდინატა ღერძები, ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები (Δ ღერძი მდებარეობს YOZ სიბრტყეში). აღვნიშნოთ i -ური წერტილის მანძილი Δ ღერძიდან $r_{\Delta i}$ -ით, მაშინ ინერციის მომენტი Δ ღერძის მიმართ იქნება

$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i r_{\Delta i}^2. \quad (\text{XI},22)$$

მაგრამ ნახაზი გვიჩვენებს, რომ

$$r_{\Delta i}^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2 = x_i^2 + y_i^2 + d^2 - 2dy_i = r_i^2 + d^2 - 2y_i d.$$



ნახ. 125.

ჩასმა (XI,19) განტოლებაში მოგვცემს

$$I_{\Delta} = I_0 + \sum_{i=1}^n m_i d^2 - 2 \sum_{i=1}^n m_i y_i \cdot d.$$

მაგრამ ჩვენთვის ცნობილია, რომ $\sum_i m_i y_i$ არის ინერციის ცენტრის

y კოორდინატა და ვინაიდან ინერციის ცენტრი OZ ღერძზე მდებარეობს, იგი ნულის ტოლი იქნება

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0.$$

გარდა ამისა, $\sum_{i=1}^n m_i$ არის მთელი მყარი სხეულის მასა, ამიტომ სა-

ბოლოოდ მივიღებთ

$$I_A = I_0 + md^2. \quad (\text{XI}, 23)$$

ინერციის მომენტი რაიმე Δ ღერძის მიმართ არის ჯამი ინერციის ცენტრზე გამავალი და Δ ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა და სხეულის მასის ნამრავლისა ღერძებს შორის მანძილის კვადრატზე; ამ თეორემას ეწოდება შტეინერის თეორემა.

გარდა იმისა, რომ იგი აკავშირებს ერთმანეთთან ინერციის მომენტებს პარალელური ღერძების მიმართ, იგი გვიჩვენებს, რომ ასეთ ღერძებს შორის ყველაზე მცირე ინერციის მომენტი სხეულს აქვს ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ.

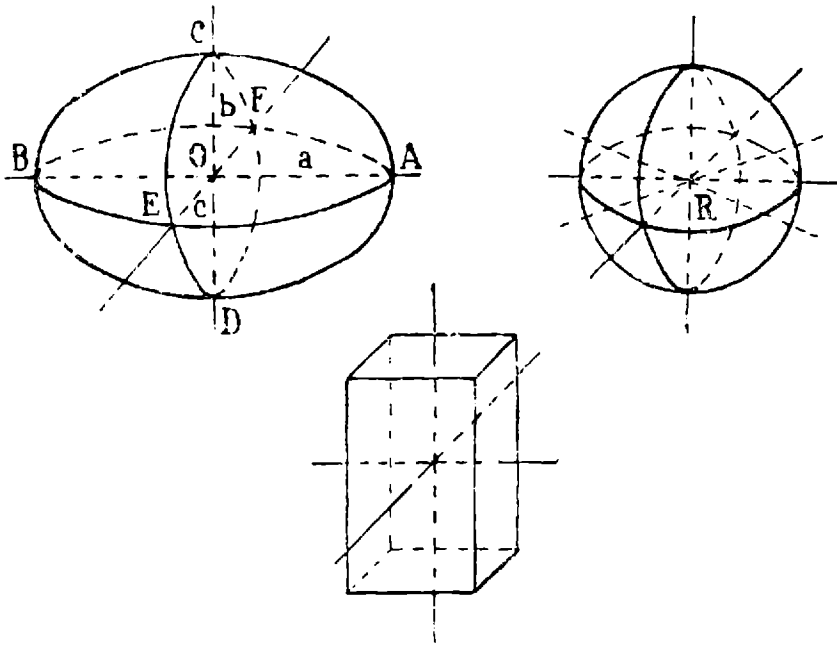
როგორც ზემოთ ვნახეთ, საზოგადოდ მყარი სხეულის იმპულსის ვექტორი, ე. ი. \vec{L} ვექტორი არ თანხვდება ბრუნვის ღერძის, ე. ი. $\vec{\omega}$ ვექტორის მიმართულებას. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ამ ღერძის მიმართ ინერციის მამრავლები ნულის ტოლია \vec{L} მიმართული იქნება $\vec{\omega}$ ვექტორის გასწვრივ. ისეთ ღერძს, რომლის მიმართ ინერციის მამრავლები ნულის ტოლია, მთავარი ღერძი ეწოდება. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ყოველ მყარ სხეულში არსებობს მინიმუმ სამი მთავარი ღერძი (სიმეტრიული სხეულის შემთხვევაში მათი რიცხვი შეიძლება მეტიც იყოს), რომლებიც გადიან ინერციის ცენტრზე და ერთმანეთის მართობული არიან.

სიმეტრიული სხეულების შემთხვევაში მთავარი ღერძების მოძებნა ადვილია. ისინი ჩვეულებრივად სიმეტრიის ღერძებს თანხვდებიან. მაგალითად, ერთგვაროვანი სამღერძა ელიფსოიდის შემთხვევაში მთავარ ღერძებს წარმოადგენენ ელიფსოიდის სიმეტრიის ღერძები (ნახ. 126). თუ ელიფსოიდის ორი ღერძი, მაგალითად b და c , გაუტოლდა ერთმანეთს, ე. ი. ელიფსოიდი გადაიქცა ბრუნვის ელიფსოიდად, $CEDF$ სიბრტყეში მდებარე ყოველი ღერძი მთავარი ღერძი გახდება. ერთგვაროვანი სფეროს შემთხვევაში ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი იქნება მთავარი. ნახაზზე ნაჩვენებია აგრეთვე პარალელებიპედის მთავარი ღერძები. ღერძის ირგვლივ ბრუნვის განხილვისას ჩვენ ისევ დავუბრუნდებით მთავარი ღერძების განხილვას და მათი თვისებების შესწავლას.

ინერციის მომენტთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ინერციის რადიუსის ცნება. გამოვითვალოთ მყარი, სხეულის წერტილების

ღერძამდე მანძილების კვადრატების საშუალო მნიშვნელობა. ამისათვის ყოველი წერტილის ღერძამდე მანძილი ავიყვანოთ კვადრატში, გავამრავლოთ სათანადო მასაზე, შევკრიბოთ და გავყოთ მყარი სხეულის საერთო მასაზე. მივიღებთ გამოსახულებას

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}{M} \quad (\text{XI}, 24)$$



ნახ. 126.

ავღნიშნოთ ეს სიდიდე x^2 -ით და ვუწოდოთ x -ს სხეულის ინერციის რადიუსი

$$x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}{M}; \quad (\text{XI}, 25)$$

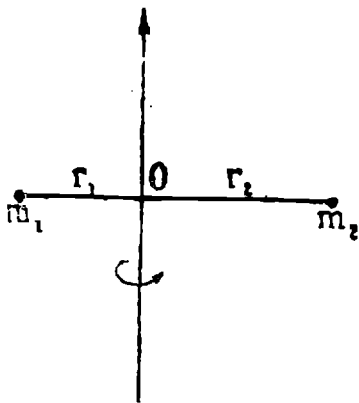
აქედან ადვილად მივიღებთ ინერციის მომენტის გამოსახულებას ინერციის რადიუსის საშუალებით.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = M x^2. \quad (\text{XI}, 26)$$

ეს ფორმულა ნათლად წარმოგვიდგენს ინერციის რადიუსის ფიზიკურ აზრს. თუ მყარ სხეულს ჩვენ შევცვლით M მასის მქონე ნივთიერი წერტილით, იგი უნდა მოვათავსოთ x მანძილზე ღერძიდან, რათა მას ჰქონდეს ისეთივე ინერციის მომენტი როგორც მყარ სხეულს.

§ 63. ინერციის მომენტები ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულისათვის

1. **ორატომიანი მოლეკულა.** განვიხილოთ ორატომიანი მოლეკულის მარტივი შემთხვევა (ნახ. 127). თუ ჩავთვლით, რომ ატომები ნივთიერ წერტილებს წარმოადგენენ, ორატომიანი მოლეკულის



ნახ. 127.

ინერციის მომენტი, ინერციის ცენტრზე გამავალი და ატომების შემაერთებული ხაზის მართობი ღერძის მიმართ გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad (\text{XI}, 27)$$

სადაც m_1 და m_2 არის ატომების მასები, ხოლო r_1 და r_2 — ატომების მანძილები ღერძამდე. ვინაიდან O წერტილი არის მოლეკულის ინერციის ცენტრი, r_1 და r_2 შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r,$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

სადაც r არის მანძილი ატომებს შორის.

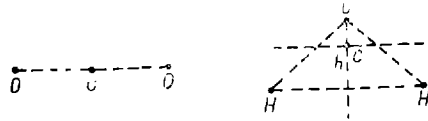
(XI, 27) ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2,$$

სადაც μ იქნება მოლეკულის დაყვანილი მასა. ორატომიანი მოლეკულის ინერციის რიცხვითი მნიშვნელობის რიგი ადვილად გამოითვლება, თუ გავიხსენებთ, რომ ატომებს შორის მანძილი დაახლოებით 10^{-8} cm -ის რიგისაა, ხოლო ატომის მასა 10^{-24} gr რიგისა. მივიღებთ

$$I \simeq 10^{-40} \text{ gr} \cdot \text{cm}^2.$$

2. სამატომიანი მოლეკულა. სამატომიანი მოლეკულის შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორი ფორმისაა მოლეკულა (ნახ. 128). ზოგი მოლეკულის შემთხვევაში (CO_2) ატომები ერთ სწორ ხაზზე არიან განლაგებულნი, ხოლო ზოგ შემთხვევაში მოლეკულას სამკუთხედის ფორმა აქვს (H_2O). მოვძებნოთ წყლის მოლეკულის ინერციის მომენტები მთავარი ღერძების მიმართ, ამისათვის ჯერ მოვნახლოთ ინერციის ცენტრი. აღვნიშნოთ წყალბადის ატომის მასა m_{H} -ით, ხოლო ჟანგბადისა — m_{O} -ით. ცხადია, რომ წყალბადის ატომების ინერციის ცენტრი იქნება მათი შემაერთებული ხაზის შუაში.. თუ ამ წერტილში თავს მოვუყრით წყალბადის ორივე ატომს და მოვნახავთ მისი და ჟანგბადის ატომის ინერციის ცენტრს, გამოიჩვენება, რომ იგი მდებარეობს სამკუთხედის სიმაღლეზე და დაშორებულია ფუძიდან მანძილით



ნახ. 128.

$$d = \frac{m_{\text{O}}}{m_{\text{O}} + 2m_{\text{H}}} h,$$

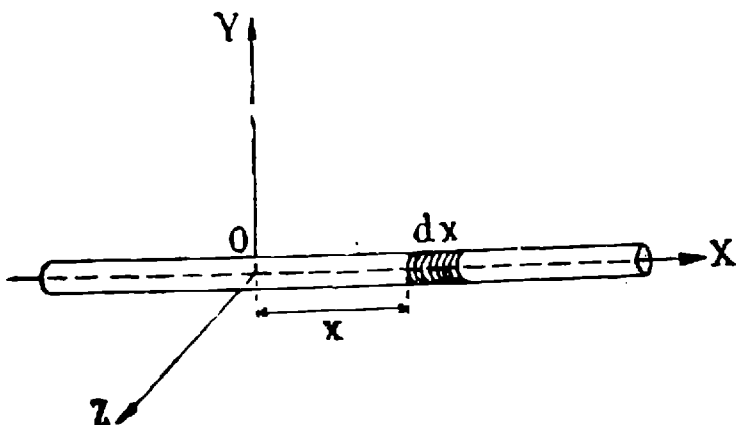
სადაც h არის სამკუთხედის სიმაღლე. ერთი მთავარი ღერძი თანხედენილი იქნება სიმაღლის მიმართულებასთან და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება

$$I_1 = \frac{m_{\text{H}}}{2} a^2,$$

სადაც a არის მანძილი წყალბადის ატომებს შორის. მეორე მთავარი ღერძი გაივლის ამ პირველი ღერძის მართობულად ინერციის ცენტრზე და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება $I_2 = \frac{2m_{\text{O}}m_{\text{H}}}{m_{\text{O}} + 2m_{\text{H}}} h^2$. მესამე მთავარი ღერძი მართობული იქნება სამკუთხედის სიბრტყისა და მის მიმართ ინერციის მომენტი იქნება I_1 და I_2 ინერციის მომენტების ჯამი.

3. წვრილი ერთგვაროვანი ღერო. განვიხილოთ წვრილი ერთგვაროვანი ღერო (ნებისმიერი კვეთის), რომლის სიგრძე არის l , ხოლო მასა — m . ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები: OX ღერძი თვით ღეროს გასწვრივ, ხოლო OY და OZ ღერძები მის მართობულად. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ ინერციის ცენტრში (ნახ. 129).

ცხადია, რომ OX , OY და OZ ღერძები იქნებიან ღეროს მთავარი ღერძები. გამოვითვალოთ მთავარი ინერციის მომენტი OY ღერძის მიმართ. ამისათვის განვიხილოთ OX ღერძის მართობი კვეთი, რომლის განივკვეთის ფართობი არის S , ხოლო სისქე— dx . თუ ღეროს მოცულობის ერთეულის მასას, ე. ი. სიმკვრივეს ρ -ით



ნახ. 129.

აღვნიშნავთ, dx ელემენტის ინერციის მომენტი OY ღერძის მიმართ იქნება

$$x^2 dm = \rho x^2 S dx;$$

აქედან ღერძის მარჯვენა ნახევრის ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \rho x^2 S dx = \frac{1}{3} \rho S \left(\frac{l}{2} \right)^3 = \frac{1}{24} \rho S l^3.$$

ცხადია, რომ მარცხენა ნახევრის ინერციის მომენტი ასეთივე იქნება და ამიტომ მთელი ღეროს ინერციის მომენტისათვის OY მთავარი ღერძის მიმართ გვექნება

$$I_Y = \frac{1}{12} \rho S l^3. \quad (\text{XI,28})$$

რადგანაც ღეროს მთელი მასა შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$m = \rho S l,$$

(XI,28) ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$I_Y = \frac{1}{12} m l^2. \quad (\text{XI,28}')$$

ცხადია, რომ ასეთივე იქნება ინერციის მომენტი OZ მთავარი ღერძის მიმართ. შტეინერის თეორემის საშუალებით ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ ღერძის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ, რომელიც გადის ღერძის ბოლოზე და პარალელურია, მაგალითად OY ღერძისა,

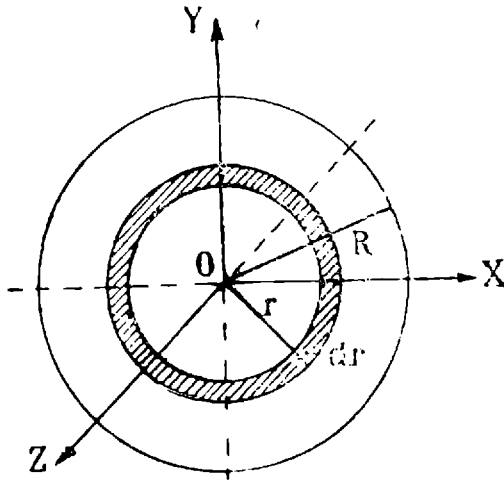
$$I_{\Delta} = I_Y + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (\text{XI}, 29)$$

ადვილია აგრეთვე ინერციის რადიუსის გამოთვლა

$$x_Y^2 = \frac{1}{12} l^2, \quad x_{\Delta}^2 = \frac{1}{3} l^2.$$

ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ ღერძი იმდენად ვიწროა, რომ მისი სისქე შეიძლება უგულებელვყავით, ცხადია, ინერციის მომენტი მესამე მთავარი ღერძის (OX -ის) მიმართ ნულის ტოლი იქნება.

4. **ერთგვაროვანი სფერო.** ერთგვაროვანი სფეროს შემთხვევაში ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი მთავარი ღერძი იქნება. ავირჩიოთ ამათგან სამი ურთიერთმართობი ღერძი— OX , OY და OZ (ნახ. 130). ცხადია, რომ, სიმეტრიის გამო, ამ სამი ღერძის მიმართ



ნახ. 130.

ინერციის მომენტები ტოლია. როგორც ვიცით, მათი გამოსათვლელი ფორმულები შემდეგია:

$$I_x = \int \rho(y^2 + z^2) dV,$$

$$I_y = \int \rho(x^2 + z^2) dV,$$

$$I_z = \int \rho(x^2 + y^2) dV.$$

მათი შეკრება მოგვცემს

$$I_x + I_y + I_z = 2 \int \rho(x^2 + y^2 + z^2) dV = 2 \int \rho r^2 dV.$$

თუ მოცულობის ელემენტად ავირჩევთ r და $r+dr$ რადიუსებს შორის მოთავსებულ შრეს, რომლის მოცულობა არის $4\pi r^2 dr$, და მოვახდენთ ინტეგრებას 0-დან R -მდე, სადაც R არის სფეროს რადიუსი, მივიღებთ

$$I_x + I_y + I_z = 8\pi \rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi \rho R^5}{5}.$$

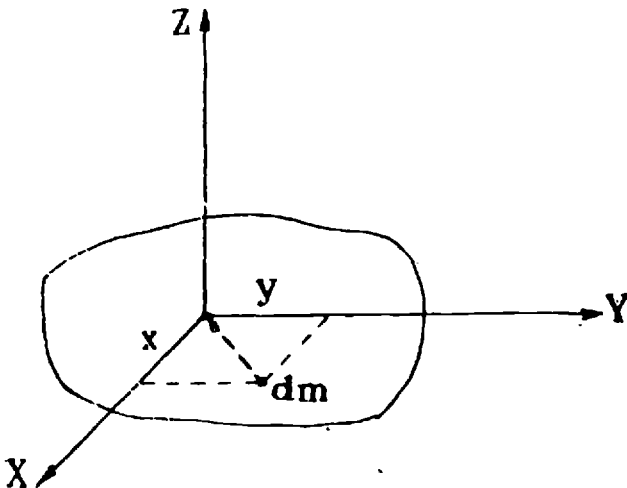
ვინაიდან $I_x = I_y = I_z$, ყოველი მათგანისათვის გვექნება

$$I_x = I_y = I_z = \frac{8\pi \rho R^5}{15}. \quad (\text{XI,30})$$

თუ შემოვიღებთ სფეროს მასას $m = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$, გვექნება

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m R^2. \quad (\text{XI,31})$$

5. კავშირი ერთგვაროვანი ბრტყელი ფირფიტის ინერციის მომენტებს შორის. ხშირად, როდესაც სხეულის სისქე საკმარისად



ნახ. 131.

მცირეა, იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც უსასრულოდ ბრტყელი ფირფიტა (ნახ. 131). ასეთი სხეულის ერთ-ერთი თავისუფალი ღერძი მიმართულია ფირფიტის სიბრტყის მართობულად. მის სა-

თანადო მომენტს ეწოდება პოლარული ინერციის მომენტი. ორი დანარჩენი თავისუფალი ღერძი მდებარეობს თვით ფირფიტის სიბრტყეში და მათი განლაგება დამოკიდებულია ფირფიტის ფორმაზე და მასის განაწილებაზე. მათ სათანადო ინერციის მომენტებს ეწოდება ეკვატორიალური ინერციის მომენტები. ავარჩიოთ კოორდინატთა ღერძები ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. OZ ღერძი მიემართათ ფირფიტის ნორმალის გასწვრივ, ხოლო OX და OY ღერძები მიემართათ ფირფიტის სიბრტყეში მდებარე თავისუფალი ღერძების გასწვრივ. ვინაიდან ფირფიტა OXY სიბრტყეში მდებარეობს, სათანადო ინერციის მომენტებისათვის მივიღებთ

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm,$$

$$I_x = \int y^2 dm,$$

$$I_y = \int x^2 dm.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ პოლარული ინერციის მომენტი უდრის ეკვატორული ინერციის მომენტების ჯამს

$$I_z = I_x + I_y. \quad (\text{XI}, 32)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ბრტყელი ფირფიტის პოლარული ინერციის მომენტი უდრის ეკვატორული ინერციის მომენტების ჯამს.

6. **ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრი.** თუ ცილინდრს მოვათავსებთ OX ღერძის გასწვრივ და კოორდინატთა სათავეს ინერციის ცენტრში მოვათავსებთ, კოორდინატთა ღერძები იქნებიან მთავარი ღერძები (ნახ. 132). ჯერ გამოვითვალოთ ინერციის მომენტი OX მთავარი ღერძის მიმართ, რომელიც თანხვედრა ცილინდრის სიმეტრიის ღერძს. მოცულობის ელემენტად ავირჩიოთ ცილინდრული შრე r შიგა რადიუსით და $r+dr$ გარე რადიუსით. თუ ცილინდრის სიმაღლე არის h , ამ ელემენტში მოთავსებული მასა იქნება $2\pi r h \rho \cdot dr$, სადაც ρ არის სიმკვრივე. ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ

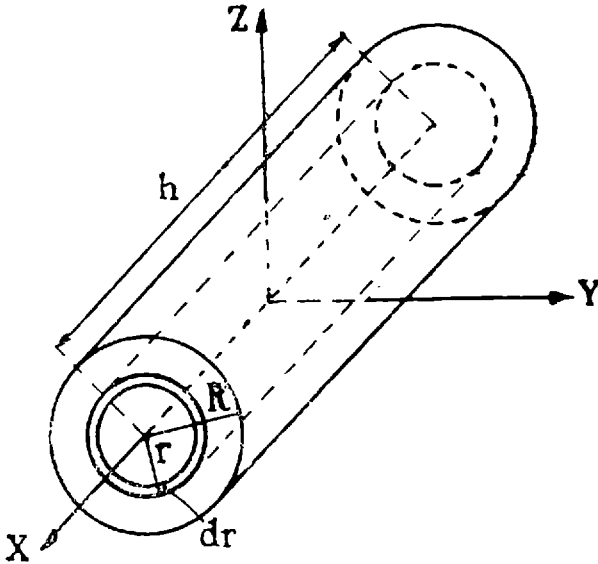
$$I_x = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi h \rho}{2} R^4.$$

თუ ჩავსვამთ ცილინდრის სრული მასის მნიშვნელობას $m = \pi R^2 h \rho$, ვვეჭნება

$$I_x = \frac{1}{2} m R^2. \quad (\text{XI}, 33)$$

OY და OZ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტების გამოთვლა უფრო რთულია. გამოთვლები გვაძლევენ

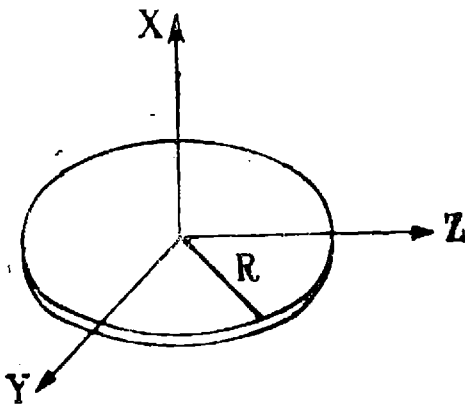
$$I_y = I_z = \frac{m}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \quad (XI,34)$$



ნახ. 132.

ცხადია, რომ ამ ფორმულიდან უსასრულოდ წვრილი ღეროს ($R \rightarrow 0$) კერძო შემთხვევაში მიიღება ინერციის მომენტის (XI,28) ფორმულა. წარმოვიდგინოთ, მეორე მხრივ, რომ ცილინდრის სიმაღ-

ლე თანდათან მცირდება ($h \rightarrow 0$), მაშინ (XI,33) და (XI,34) ფორმულები მოგვცემენ უსასრულოდ თხელი წრიული დისკოს ინერციის მომენტებს (ნახ. 133).



ნახ. 133.

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2,$$

$$I_y = I_x = \frac{1}{4} m R^2.$$

7. ერთგვაროვანი პარალელებიპედი. ვთქვათ, პარალელებიპედი, რომლის გვერდების სიგრძეები არის a , b და c , მდებარეობს კოორდინატთა ღერძების მიმართ ისე როგორც ეს ნაჩვენებია 134-ე ნა-

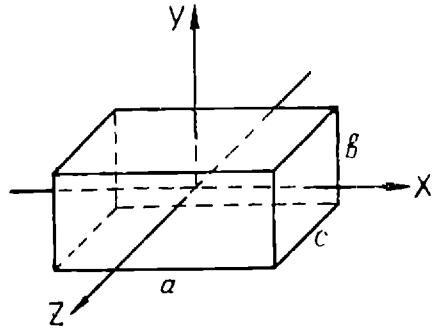
ხაზზე. მაშინ მათვარი ინერციის მომენტები OX , OY და OZ ღერძების მიმართ იქნება

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

გამოთვლები ისე წარმოებს, როგორც წრიული ცილინდრის შემთხვევაში. თუ $a > b > c$, მივიღებთ, რომ $I_x < I_y < I_z$. თუ ერთ-ერთი გვერდის, მაგალითად c -ს, სიგრძე $\frac{1}{2}$ თანდათან კლებულობს. ზღვარში მივიღებთ უსასრულოდ თხელ მართკუთხა ფირფიტას. სათანადო ინერციის მომენტები იქნება

$$I_x = \frac{m}{12} b^2, \quad I_y = \frac{m}{12} a^2,$$

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = I_x + I_y.$$



ნახ. 134.

§ 64. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. ფიზიკური საძანი. საბრუნო საძანი

ვანეხილეთ მყარი სხეულის ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში სხეულის მდებარეობა განისაზღვრება ერთი სიდიდით, მაგალითად φ კუთხით, რომელსაც მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი სიბრტყე ადგენს უძრავ სიბრტყესთან. მოძრაობის კინემატიკური განტოლება შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\varphi = \varphi(t).$$

ჩვენი ამოცანაა მოძრაობის დინამიკური განტოლების დადგენა და მისი გამოყენება ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის.

ჩვენთვის ცნობილია, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები შეიძლება დაფიქსირდეს ერთ მარეზულტირებელ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე \vec{M} მომენტი. ძირითადი მოძრაობის დინამიკური განტოლება, რომელიც საზღვრავს მყარი სხეულის ბრუნვას ღერძის ირგვლივ, შემდეგი სახისაა:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (\text{XI}, 35)$$

სადაც \vec{L} არის იმპულსის მომენტი. თუ ღერძი არ არის თავისუფალი, \vec{L} ვექტორს, გარდა ბრუნვის ღერძის გასწვრივ მიმართული

მდგენლისა, ექნება სხვა მდგენლებიც; ამ უკანასკნელი მდგენლების ცვალებადობას და მასთან დაკავშირებულ ლერძის რეაქციის ძალებს ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ, ახლა კი განვიხილოთ ლერძის გასწვრივ მიმართული მდგენელი. ლერძზე (XI,35) განტოლების დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta}. \quad (\text{XI},36)$$

მაგრამ იმპულსის მომენტი ლერძის მიმართ შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$L_{\Delta} = I\omega,$$

სადაც I არის ინერციის მომენტი ლერძის მიმართ, ხოლო ω —კუთხური სიჩქარე, ამიტომ (XI,36) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M_{\Delta}. \quad (\text{XI},37)$$

ვინაიდან სხეული მყარია, ინერციის მომენტი უცვლელი იქნება და ამიტომ შეიძლება დავწეროთ

$$I \frac{d\omega}{dt} = M.$$

რადგანაც $\frac{d\omega}{dt}$ წარმოადგენს კუთხურ აჩქარებას, ეს განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I\varepsilon = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M. \quad (\text{XI},38)$$

ინერციის მომენტის ნამრავლი კუთხურ აჩქარებაზე გარეშე ძალების მიმართ მომენტის ტოლია; ეს განტოლება ანალოგიურია ნიუტონის მეორე კანონის გამომხატველი განტოლებისა ნივთიერი წერტილისათვის

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ მასა შეცვლილია ინერციის მომენტით, ხაზოვანი აჩქარება—კუთხური აჩქარებით და ძალა—ძალის მომენტით.

მოძრაობის დინამიკური განტოლება (XI,38) გვიჩვენებს, რომ თუ ცნობილია გარეშე მომენტი, შეიძლება ამოვხსნათ იგი φ -ს მიმართ და ვიპოვოთ მოძრაობის კინემატიკური განტოლება. ცხადია, რომ მოძრაობის სრულად განსაზღვრისათვის საჭიროა საწყი-

სი ბირობების ცოდნა, ე. ი. φ კუთხისა და ω კუთხური სიჩქარის მნიშვნელობების ცოდნა დროის საწყისი მომენტისათვის.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა. ვთქვათ, გარეშე ძალების მომენტი ნულის ტოლია. მაშინ მოძრაობის განტოლებიდან მივიღებთ, რომ კუთხური აჩქარება ნულია, ხოლო კუთხური სიჩქარე მუდმივია, რაც იმას ნიშნავს რომ მყარი სხეული თანაბრად ბრუნავს ღერძის ირგვლივ. მოძრაობის კინემატიკური განტოლება იქნება

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \omega = \text{const.}$$

სადაც φ_0 არის კუთხის საწყისი მნიშვნელობა.

ასევე მარტივად შეიძლება ამოიხსნას შემთხვევა, როდესაც გარეშე მომენტი მუდმივია; ამ შემთხვევის მაგალითს წარმოადგენს ცილინდრული სხეული, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ნახ. 135). მასზე დახვეულია თოკი, რომლის ბოლოზე ჩამოკიდებულია P წონის ტვირთი. ცილინდრზე მოქმედებს $M = = Pr$ მომენტი. სადაც r არის ცილინდრის რადიუსი. (XI,38) განტოლების თანახმად კუთხური აჩქარება მუდმივი იქნება

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \text{const.}$$

კუთხური სიჩქარე კი იქნება დროის წრფივი ფუნქცია

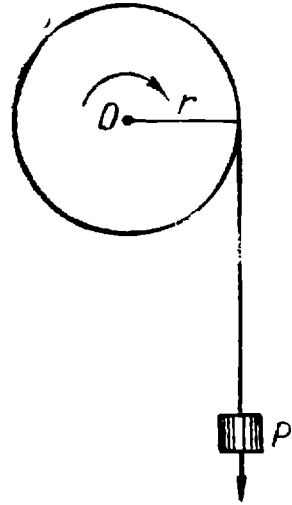
$$\omega = \omega_0 + \frac{M}{I} t.$$

კიდევ ერთი ინტეგრებით მივიღებთ მოძრაობის კინემატიკურ განტოლებას

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{M}{2I} t^2. \quad (\text{XI,39})$$

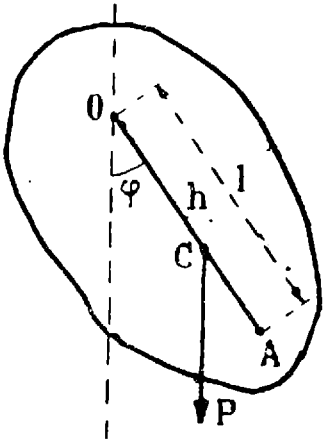
φ_0 და ω_0 წარმოადგენენ საწყის კუთხეს და კუთხურ სიჩქარეს. როგორც ვხედავთ, მუდმივი მომენტის მოქმედების შემთხვევაში ბრუნვა იქნება თანაბრად აჩქარებული.

გაცილებით უფრო საინტერესოა, მაგრამ უფრო რთულია შემთხვევა, როდესაც გარეშე მომენტი დამოკიდებულია მობრუნების კუთხეზე. ასეთი შემთხვევის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მაგალითს



ნახ. 135.

წარმოადგენს მძიმე მყარი სხეულის ბრუნვა ჰორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ნახ. 136), თუ სხეულის ინერციის ცენტრი არ მდებარეობს ღერძზე. O წერტილი წარმოადგენს ჰორიზონტალური ღერძის კვალს ნახაზზე (თვით ღერძი მიმართულია ნახაზის მართობულად). C არის ინერციის ცენტრი, რომელზედაც მოდებულია სიმძიმის ძალა. სხეულის ორიენტაცია განესაზღვროთ φ კუთხით, რომელსაც OC ხაზი ადგენს ვერტიკალთან. ნახაზი გვიჩვენებს, რომ მოქმედი მომენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:



ნახ. 136.

$$M = P \cdot h \cdot \sin \varphi,$$

სადაც h არის მანძილი ინერციის ცენტრსა და ღერძს შორის. მოძრაობის დინამიკური განტოლება იქნება

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - Ph \sin \varphi. \quad (XI,40)$$

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ მოქმედი მომენტი ცდილობს შეამციროს φ კუთხე; ამ განტოლების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც φ კუთხე მცირეა, იგი შეიძლება საგრძნობლად გავამარტივოთ. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\sin \varphi$ შეიძლება შევცვალოთ თვით φ კუთხით, რის შემდეგ (XI,40) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - Ph \varphi.$$

ეს განტოლება მსგავსია მათემატიკური საქანის განტოლებისა და ამოიხსნება ისევე როგორც ეს უკანასკნელი

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{Ph}{I}} t + \alpha_0 \right), \quad (XI,41)$$

სადაც φ_0 არის რხევის კუთხური ამპლიტუდა (უდიდესი კუთხური გადახრა ვერტიკალური მიმართულებიდან), ხოლო α_0 — საწყისი ფაზა. ჩვენ ვხედავთ, რომ განხილული მყარი სხეული ასრულებს ჰარმონიულ რხევას წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. რხევის პერიოდი გამოითვლება შემდეგი ფორმულიდან:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Ph}}.$$

თუ შევიტანთ წონის მნიშვნელობას მივიღებთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg l}}. \quad (\text{XI}, 42)$$

განხილულ მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია რხევა პორიზონტალური ღერძის ირგვლივ (ვერტიკალური მიმართულების მახლობლად) ფიზიკური საქანი ეწოდება. ცხადია, რომ ფიზიკური საქანიდან კერძო შემთხვევაში შეიძლება მივიღოთ მათემატიკური საქანი. ამისათვის საჭიროა დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის მთელი მასა კონცენტრირებულია მის ინერციის ცენტრში. მაშინ ინერციის მომენტისათვის მივიღებთ (h იქნება საქანის სიგრძე)

$$I = ml^2$$

და პერიოდის ფორმულა დაიყვანება მათემატიკური საქანის პერიოდის ფორმულაზე

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

ხშირად ისმის საკითხი ისეთი მათემატიკური საქანის მოძებნისა, რომლის რხევის პერიოდი უდრის მოცემული ფიზიკური საქანის პერიოდს. (XI, 42) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ამ მათემატიკური საქანის სიგრძე უნდა იყოს

$$l = \frac{I}{mh}. \quad (\text{XI}, 43)$$

გადავზომოთ ეს მანძილი საქანის დაკიდვის O ღერძიდან OC -ს მიმართულებით. მივიღებთ A წერტილს. თუ ჩვენ წარმოვიდგენთ, რომ სხეულის მთელი მასა ამ წერტილშია კონცენტრირებული, მზეილებთ მათემატიკურ საქანს, რომლის პერიოდი თანხვედება განხილული ფიზიკური საქანის პერიოდს. l -ს ეწოდება ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე.

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ ღერძად ავიღებთ არა O წერტილზე, არამედ A წერტილზე გამავალ ღერძს ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდი არ შეიცვლება. მართლაც. ამ შემთხვევაში საქანის დაყვანილი სიგრძე იქნება

$$l_1 = \frac{I_1}{m(l-l)}, \quad (\text{XI}, 44)$$

სადაც I_1 არის სხეულის ინერციის მომენტი A წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ $l_1 = l$. შტეინერის თეორემის თანახმად

$$I = I_0 + mh^2,$$

სადაც I_0 არის ინერციის მომენტი C წერტილზე, ე. ი. ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ (ყველა განხილული ღერძი ერთმანეთის პარალელურია). ჩასმა (XI,43) ფორმულაში მოგვცემს

$$I = h + \frac{I_0}{mh} \quad (\text{XI,45})$$

ან

$$m(l - h)h = I_0.$$

შტეინერის თეორემის გამოყენება C და A წერტილებზე გამავალი ღერძებისათვის მოგვცემს

$$I_1 = I_0 + m(l - h)^2.$$

I_0 -ის მნიშვნელობის ჩასმა მოგვცემს

$$I_1 = m(l - h)l.$$

ჩასმა (XI,44) ფორმულაში საბოლოოდ გვაძლევს

$$I_1 = l. \quad (\text{XI,46})$$

ღერძს, რომელიც დაშორებულია ბრუნვის ღერძიდან დაყვანილი სიგრძის ტოლი მანძილით ინერციის ცენტრის მიმართულებით. ფიზიკური საქანის რხევის ღერძი ეწოდება. (XI,45) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე არ იცვლება (და ამიტომაც არ იცვლება რხევის პერიოდიც), როდესაც ადგილებს უნაცვლებენ დაკიდვისა და რხევის წერტილებს.

ფიზიკური საქანის პრაქტიკული გამოყენების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მაგალითს წარმოადგენს ეგრეთ წოდებული საბრუნო საქანი. ცნობილია, რომ სიმძიმის ძალის აჩქარების ექსპერიმენტული განსაზღვრისათვის ყველაზე ხშირად საქანი გამოიყენება. რასაკვირველია, რომ შესაძლებელი იყოს მათემატიკური საქანის განხორციელება, g -ს გამოთვლა ადვილი იქნებოდა შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$g = \frac{l}{4\pi^2 T^2}.$$

ამისათვის საკმარისი იქნება საქანის სიგრძისა და რხევის პერიოდის განსაზღვრა. მაგრამ ვინაიდან ყოველი რეალური საქანი არის არა მათემატიკური, არამედ ფიზიკური საქანი, g -ს გამოთვლა რთულდება.

მართლაც, ფიზიკური საქანის რხევის პერიოდის ფორმულის თანახმად

$$g = \frac{I}{4\pi^2 m h T^2}.$$

g -ს გამოთვლა, გარდა პერიოდის განსაზღვრისა, მოითხოვს ცოდნას ინერციის მომენტისა და ინერციის ცენტრის მანძილისა დაკიდ-

ვის ღერძამდე. ეს კი დიდ ექსპერიმენტულ სიძნელეებს ელობება (საქანის რთული ფორმა. შესაძლო არაერთგვაროვნება და სხვა). ამიტომაც μ -ს განსაზღვრისათვის იყენებენ საბრუნ საქანს, რომელიც დამყარებულია დაკიდვისა და რხევის ღერძების ურთიერთშენაცვლების შესაძლებლობაზე.

საბრუნნი საქანი წარმოადგენს ბრტყელ ღერძს, რომელშიც ჩამარებულია ორი სამკუთხა პრიზმა ერთმანეთისაკენ წიბოებით მიმართული (ნახ. 137). ყოველი მათგანი შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც დაკიდვის ღერძი. საქანის ღერძზე მოთავსებულია ორი მძიმე ლინზისებრი სხეული, რომლებიც შეიძლება გადავანაცვლოთ ღერძის გასწვრივ; ამ ლინზებს ანაცვლებენ მანამდე, სანამ საქანის რხევის პერიოდი არ იქნება ერთი და იგივე დამოუკიდებლად იმისაგან, რომელი— A თუ B ღერძი იქნება აღებული საქანის დაკიდვის ღერძად. დავამტკიცოთ, რომ მანძილი ამ პრიზმების წიბოებს შორის არის სწორედ ფიზიკური საქანის დაყვანილი სიგრძე. აღვნიშნოთ h_1 -ითა და h_2 -ით A და B ღერძების დაშორება ინერციის (სიმძიმის) ცენტრიდან. ვინაიდან დაკიდვის ორივე შემთხვევაში დაყვანილი სიგრძე ერთი და იგივეა, (X1,45) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\frac{I_0}{mh_1} + h_1 = \frac{I_0}{mh_2} + h_2 = l. \quad (X1,47)$$

აქედან მივიღებთ

$$\left(\frac{I_0}{mh_1 h_2} - 1 \right) (h_1 - h_2) = 0.$$

თუ $h_1 \neq h_2$, გვექნება

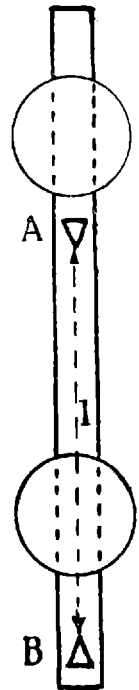
$$\frac{I_0}{m} = h_1 h_2.$$

ჩასმა (X1,47) ფორმულაში მოგვცემს

$$l = h_1 + h_2 \quad (X1,48)$$

და, მაშასადამე, მანძილი A და B ღერძებს შორის ზართლაც, არის საქანის დაყვანილი სიგრძე. ამიტომაც საკმარისია გავზომოთ მანძილი ღერძებს შორის, რაც დიდი სიზუსტით შეიძლება განხორციელდეს, რომ მათემატიკური საქანის ფორმულით გამოვთვალოთ μ

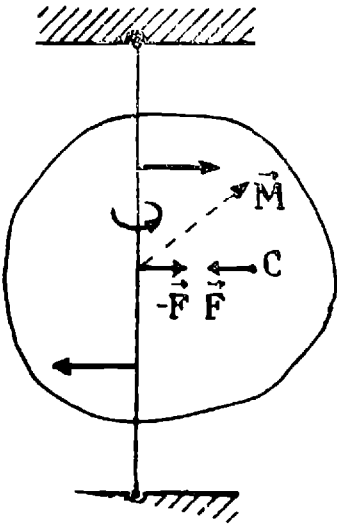
$$g = \frac{l}{4\pi^2 T^2}.$$



ნახ. 137.

§ 65. ბრუნვის ღერძზე მოქმედი ძალა და მომენტი.
თავისუფალი ღერძები

განვიხილოთ ისევ თავისუფალი მყარი სხეულის შემთხვევა, ე. ი. მივიღოთ, რომ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე მუდმივია; ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერგია მუდმივი სიდიდე იქნება და არ იქნება არავითარი მოქმედება გარეშე სხეულებისა. მაგრამ ეს კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ ასეთი მყარი სხეული იქნება სულ თავისუფალი. მართლაც, ჩვენ დაფუძვით, რომ მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის ირგვლივ. ცხადია, რომ ღერძის ან, რაც იგივეა, მისი შემადგენელი წერტილების დამაგრება შესაძლებელია მხოლოდ რაიმე გარეშე სხეულების საშუალებით; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ღერძი ან მისი დამაგრებელი სხეულები (საკისარი და საქუსლე) (ნახ. 138) უნდა მოქმედებდნენ სხეულზე გარკვეული ძალებით და, შებრუნებით, მბრუნავი სხეულიც უნდა მოქმედებდეს ღერძზე ტოლი და საწინააღმდეგო ძალებით.



ნახ. 138.

გამოვითვალოთ თანაბრად მბრუნავი სხეულის შემთხვევაში ღერძზე მოქმედი ძალები. ვინაიდან სხეული თანაბრად ბრუნავს, მის წერტილებს ექნებათ მხოლოდ ღერძისაკენ მიმართული ნორმალური აჩქარება.

$$\vec{a}_{ni} = - \vec{R}_i \omega^2,$$

სადაც \vec{R}_i არის ღერძიდან სხეულის განსახილველ წერტილამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი (ღერძისადმი მართობი); აქედან სათანადო ძალისათვის გვექნება

$$\vec{F}_i = - m_i \vec{R}_i \omega^2.$$

ყველა ეს ძალა მიმართულია ღერძისაკენ. მათი შეკრება მოგვცემს მარეზულტირებელ ძალას

$$\vec{F} = - \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i. \quad (XI, 49)$$

ვინაიდან მარეზულტირებული ძალა იმპულსის წარმოებულის ტოლია, გვექნება

$$\vec{F} = -\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i = \frac{d\vec{K}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt},$$

სადაც m არის მთელი სხეულის მასა, ხოლო \vec{v}_c — მასების ცენტრის სიჩქარე. თავის მხრივ სხეული იმოქმედებს ლერძზე ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალით

$$-\vec{F} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{R}_i = -m \frac{d\vec{v}_c}{dt}. \quad (\text{XI}, 50)$$

ცხადია, რომ \vec{F} ძალა მოდებულია სხეულის მასების ცენტრში, ხოლო $-\vec{F}$ ლერძის სათანადო წერტილში.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ, თუ სხეულის ინერციის ცენტრი ლერძზე არ მდებარეობს, უკანასკნელზე იმოქმედებს გამლუნავი ძალა $-\vec{F}$. თუკი ჩვენ გვსურს, რომ ლერძზე არავითარი ძალა არ მოქმედებდეს და, მაშასადამე, არც ლერძი მოქმედებდეს სხეულზე, ინერციის ცენტრი უნდა იყოს მოთავსებული ლერძზე ან, რაც იგივეა, ბრუნვის ლერძი უნდა გადიოდეს ინერციის ცენტრზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ბრუნვის ლერძი ცენტრირებულია.

ზოგ შემთხვევაში, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც ბრუნვა დიდი სიჩქარით წარმოებს, ლერძზე მოქმედი გამლუნავი ძალა იმდენად დიდი ხდება, რომ შეიძლება ვაშოიწვიოს ლერძის გაღუნვა და გატეხა. თანამედროვე მანქანების მბრუნავი ნაწილების სიჩქარე იმდენად დიდია, რომ საკმარისია მასების ცენტრი მკირედ გადაიხაროს ლერძიდან, რომ უკანასკნელზე დაიწყოს მეტად დიდი გამლუნავი ძალების მოქმედება. მაგალითად, განვიხილოთ ტურბინა, რომელიც ბრუნავს $\omega = 500 \text{ sec}^{-1}$ კუთხური სიჩქარით, მივიღოთ, რომ მასების ცენტრი დაშორებულია ლერძიდან r მანძილით. მაშინ ლერძზე მოქმედი გამლუნავი ძალის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$F = 25 \cdot 10^4 m r = \frac{25 \cdot 10^4}{g} r P \sim 250 P r.$$

სადაც l არის ტურბინის წონა (g მიახლოებით ჩათვლილია 1000-ის ტოლად). როგორც ვხედავთ, გამლუნავი ძალა დაახლოებით 250 r -ჯერ მეტია, ვიდრე ტურბინის წონა. თუ $r = 1 \text{ mm}$, გამლუნავი ძალა 25-ჯერ მეტი იქნება ტურბინის წონაზე; აქედან ცხადია, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ამ ძალის მოსაბოძა, ე. ი. ლერძის ცენტრირება. მაგრამ ლერძის ცენტრირება ჯერ კიდევ არ არის საკმარისი იმისათვის, რომ ლერძზე არავითარი ძალები არ მოქმედებდეს. მართა-

ღია მარეზულტირებელი ძალა ნულის ტოლი იქნება. მაგრამ ღერძზე. ისე როგორც ყოველ მყარ სხეულზე, მოქმედი ძალები არ დაიყვანებიან მხოლოდ მარეზულტირებელ ძალაზე. გარდა მარეზულტირებელი ძალისა იქნება კიდევ ძალთა წყვილი, რომელიც ცდილობს გატეხოს ღერძი (ნახ. 138).

გამოვთვალოთ ღერძზე მოქმედი ძალების მომენტი და გამოვარკვიოთ როგორ უნდა ავირჩიოთ ღერძი იმისათვის, რომ ეს მომენტი იყოს ნულის ტოლი. ღერძზე მოქმედი \vec{F}_i ; ძალის მომენტი იქნება

$$-\vec{M}_c = -|\vec{r}_i \vec{F}_i| = m\omega^2 |\vec{r}_i \vec{R}_i|. \quad (XI, 51)$$

ღერძზე დაგვემიღება მოგვეცემს

$$M_{xi} = -m_i \omega^2 y_i z_i, \quad -M_{yi} = 0, \quad -M_{zi} = m\omega^2 x_i y_i.$$

აქედან საერთო მომენტის ვეგმილებისათვის მივიღებთ

$$M_x = -\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad -M_y = 0, \quad -M_z = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

როგორც ვხედავთ, იმისათვის, რომ ბრუნვის ღერძზე არ მოქმედებდეს ძალთა წყვილი, შემდეგი პირობები უნდა შესრულდეს:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0 : \quad (XI, 52)$$

ამ შემთხვევაში ძალების მომენტი ნულის ტოლი იქნება.

მიღებული შედეგები შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს: თუ ღერძი გადის ინერციის ცენტრზე და, გარდა ამისა, მისთვის შესრულებულია (XI, 52) პირობები, მასზე არ იმოქმედებს არც მარეზულტირებელი ძალა, არც ძალთა წყვილი. ცხადია, რომ ასეთი ღერძი შეიძლება სრულებით არ დავამაგროთ, ვინაიდან სხეული მასზე არავითარ მოქმედებას არ ახდენს, არც ღერძი იმოქმედებს სხეულზე რაიმე ძალით და ძალთა წყვილით. ამიტომ ასეთ ღერძს ეწოდება თავისუფალი ღერძი; ეს სახელწოდება კიდევ იმით არის გამართლებული, რომ ამ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის დროს იმპულსის მომენტი სწორედ ამ ღერძის გასწვრივ არის მიმართული.

მართლაც, თუ ბრუნვა წარმოებს OY ღერძის გასწვრივ, იმპულსის მომენტს აქვს მდგენლები არა მარტო OY ღერძის გასწვრივ, არამედ OX და OZ ღერძების გასწვრივაც:

$$L_x = -\omega \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad L_z = -\omega \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i. \quad (XI, 53)$$

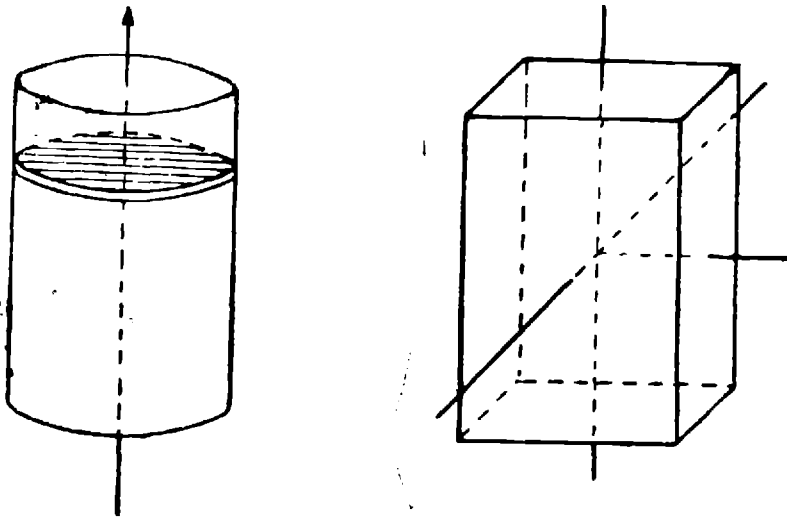
ამ გამოსახულებაში შენავალი ჯამები სწორედ იმ სიდიდეებს წარმოადგენენ, რომელთა ნულთან ტოლობა არის საჭირო იმისათვის, რომ OY ღერძი იყოს თავისუფალი ღერძი. ამიტომაც, თუ OY ღერძი თავისუფალია, \vec{T} , ვექტორი მიმართული იქნება ამ ღერძის გასწვრივ და ტოლი იქნება ინერციის მომენტის ნაწრაველისა კუთხურ სიჩქარეზე

$$\vec{L} = I \vec{\omega}.$$

ვთქვათ, (XI.50) პირობების გარდა, შესრულებულია კიდევ შემდეგი პირობა:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i = 0.$$

მაშინ ცხადია, რომ OX და OZ ღერძებიც თავისუფალი ღერძები იქნებიან. ვინაიდან კოორდინატთა ღერძების სათანადო შერჩევით აღნიშნული სამი პირობის შესრულება ყოველთვის შესაძლებელია, ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ ყოველ მყარ სხეულს აქვს მინიმუმ



ნახ. 139.

სამი თავისუფალი ღერძი. რასაკვირველია, თავისუფალი ღერძების რიცხვი შეიძლება სამზე მეტიც იყოს როგორც, მაგალითად, ერთგვაროვანი ბრუნვითი ელიფსოიდის ან სფეროს შემთხვევაში. 62-ე პარაგრაფში შემოღებულ მთავარ ღერძებთან შედარება გვიჩვენებს, რომ თავისუფალი ღერძი იგივე მთავარი ღერძია და, მაშასადამე, თავისუფალი ღერძის მოძებნა იგივეა, რაც მთავარი ღერძის მოძებნა.

აღებული მყარი სხეულისათვის თავისუფალი ღერძების მოძებნას აადვილებს ამ ღერძების შემდეგი თვისება. თავისუფალი ღერძის ყოველი წერტილი უნდა იყოს მის მართობულად გავლებული კვეთის მასების ცენტრი; მაგალითად, ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ღერძი არის მისი თავისუფალი ღერძი, ვინაიდან მისი წერტილები წარმოადგენენ ღერძის მართობულად გავლებული წრიული კვეთების ინერციის ცენტრებს. ცხადია რომ ერთგვაროვანი სფეროსათვის ცენტრზე გავლებული ყოველი ღერძი იქნება თავისუფალი ღერძი. გასაგებია აგრეთვე, რომ, თუ სხეული ერთგვაროვანი და სიმეტრიულია, მისი თავისუფალი ღერძები თანხვედნილი იქნება სიმეტრიის ღერძებისა (ნახ. 139).

§ 66. უძრავი წიკტილის ირგვლივ ბრუნვის დინამიკა. მიღების განტოლებები

უძრავი ღერძის ირგვლივ ბრუნვასთან შედარებით ბრუნვა უძრავი წერტილის ირგვლივ გაცილებით უფრო რთული ხასიათის მოძრაობაა: მისი შესწავლა უფრო რთულ მათემატიკურ აპარატს მოითხოვს და ამიტომაც ჩვენ დაკმაყოფილებით უმარტივესი შემთხვევების განხილვით.

როგორც 61-ე პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ საკმაოდ მცირე დროის განმავლობაში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. რასაკვირველია, სხვა მომენტში ღერძი უკვე სხვა იქნება. ისე, რომ თვითონ ღერძიც იცვლის თავის მდებარეობას. დროის ერთ მცირე შუალედში სხეული მობრუნდება ერთი ღერძის ირგვლივ, მეორე შუალედში — მეორე (მაგრამ, ცხადია უსასრულოდ ახლო მდებარე) ღერძის ირგვლივ და ა. შ. ამიტომაც ასეთ ღერძს ეწოდება მყისი ღერძი. ცხადია, რომ მყისი ღერძი ყოველთვის გადის უძრავ (1) წერტილზე. კუთხური სიჩქარის ვექტორი მიმართულია მყისი ღერძის გასწვრივ და მოძრაობის დროს იცვლის თავის მდებარეობას როგორც თვით მყარი სხეულის, ისე გარეშე ათვლის სისტემის მიმართ.

სანამ გადავიდოდეთ წერტილის ირგვლივ მბრუნავი მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებების განხილვაზე, შევეცადოთ თვალსაჩინოდ წარმოვიდგინოთ, თუ რისი განსაზღვრა არის საჭირო მოძრაობის დასახასიათებლად. ცხადია, რომ მყარი სხეულის მდებარეობა (ორიენტაცია) ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ სავსებით განისაზღვრება ამ სხეულში გავლებული სამი ღერძის ორიენტაციით. ავარჩიოთ ამ ღერძებად მთავარი ინერციის მომენტების

დერძები. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ერთი კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია მეორე კოორდინატთა სისტემის მიმართ განისაზღვრება სამი კუთხით და ჩვენ რომ ვიცოდეთ ამ სამი კუთხის დამოკიდებულება დროზე, მყარი სხეულის მოძრაობა ცნობილი იქნებოდა. მაგრამ ამ ამოცანის ამოხსნა ძალიან რთულია და ამიტომაც ჩვენ შემოვიხსნათ უფრო მარტივი და არასრული ამოცანის ამოხსნით. მთავარ ყურადღებას ჩვენ მივაქცევთ კუთხური სიჩქარის ვექტორს და მის ცვლილებას მოძრაობის დროს. ე. ი. ჩვენ დავკმაყოფილდებით იმისი ცოდნით, თუ როგორ იცვლება მყისი დერძი და როგორ ბრუნავს სხეული ამ მყისი დერძის ირგვლივ. ჩვენ უკვე ვთქვით, რომ კუთხური სიჩქარის ვექტორი და მასთან დაკავშირებული მყისი დერძი იცვლის თავის მდებარეობას როგორც ინერციული სისტემის, ისე თვით სხეულის მიმართ, ამიტომაც შესაძლებელია საკითხის ორნაირად დასმა: ჩვენ ვვსურს $\vec{\omega}$ ვექტორის მოძრაობის განსაზღვრა ან ინერციული სისტემის, ან თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული სისტემის მიმართ. როგორც ახლა ვნახავთ, $\vec{\omega}$ ვექტორის მოძრაობის განსაზღვრა თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული სისტემის მიმართ გაცილებით უფრო მარტივია, ვიდრე ინერციული სისტემის მიმართ. მართლაც, განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობის ძირითადი განტოლება, რომელიც აკავშირებს იმპულსის მომენტის ცვლილებას გარეშე ძალების მომენტთან

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{XI}, 54)$$

როგორც ვიცით. ეს განტოლება დაწერილია ინერციული სისტემის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ წარმოებული დროის მიმართ აღებულია ინერციული სისტემისათვის; ამ განტოლების ამოხსნის სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ, როგორც ვიცით, იმპულსის მომენტი გამოისახება კუთხური სიჩქარის, ინერციის მომენტების და ინერციის ნამრავლების საშუალებით. ინერციული სისტემის მიმართ ყველა ეს სიდიდე ცვალებადია. თვით სხეულთან დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემის მიმართ კი ინერციის მომენტები და ნამრავლები უცვლელ სიდიდეებს წარმოადგენენ; ერთადერთი ცვალებადი სიდიდე იქნება კუთხური სიჩქარე. ამიტომაც არის უფრო მარტივი $\vec{\omega}$ ვექტორის მოძრაობის განხილვა თვით სხეულთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ.

გადავწეროთ (XI, 54) განტოლება თვით მყარ სხეულთან დაკავშირებული ათვლის სისტემისათვის, რომელიც ბრუნავს ინერციული

სისტემის მიმართ $\bar{\omega}$ კუთხური სიჩქარით. მბრუნავი არაინერციული სისტემის განხილვის დროს ჩვენ გამოვარკვევთ, რომ ნებისმიერი ვექტორის ცვლილება ინერციული სისტემის მიმართ დაკავშირებულია მის ცვლილებასთან მბრუნავი სისტემის მიმართ შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\bar{\omega} \vec{A}],$$

ამ ფორმულის გამოყენება \vec{L} ვექტორისათვის გვაძლევს

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + [\bar{\omega} \vec{L}]. \quad (\text{XI},55)$$

ჩასმით (XI,54) ფორმულაში მივიღებთ:

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} + [\bar{\omega} \vec{L}] = \vec{M}. \quad (\text{XI},56)$$

აქ $\frac{d'\vec{L}}{dt}$ არის იმპულსის მომენტის წარმოებული მყარ სხეულთან ერთად მბრუნავი არაინერციული სისტემის მიმართ; ამ განტოლების კოორდინატული სახით წარმოდგენისათვის ავარჩიოთ მყარ სხეულთან დაკავშირებულ კოორდინატთა ღერძებად მთავარი ინერციის ღერძები. მაშინ \vec{L} ვექტორის გეგმილები ამ ღერძების მიმართ შემდეგი ფორმულებით იქნება გამოსახული:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (\text{XI},57)$$

კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებით და (XI,56) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d'\omega_x}{dt} - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d'\omega_y}{dt} - (I_z - I_x) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ I_z \frac{d'\omega_z}{dt} - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= M_z, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI},58)$$

ამ განტოლებებს ეილერის განტოლებები ეწოდება; ისინი გვიჩვენებენ, თუ როგორ იცვლება ბრუნვის კუთხური სიჩქარე სხეულის მიმართ; მათი ამოხსნა საზოგადოდ საკმაოდ ძნელია, მაგრამ ზოგიერთ მარტივ შემთხვევაში ისინი გვაძლევენ შესაძლებლობას ნათლად წარმოვიდგინოთ ბრუნვის ხასიათი.

§ 67. თავისუფალი მყარი სხეულის ბრუნვა წმინდის იკვლევი.
 რეზულტული კრეცხინა

თუ მყარი სხეული, რომლის ბრუნვასაც ჩვენ ვიხილავთ. თავისუფალია, ე. ი. მასზე არავითარი ძალები. გარდა უძრავი წერტილის დამმაგრებელი ძალებისა. არ მოქმედებს, მაშინ მისთვის \vec{M} ნულის ტოლი იქნება და ეილერის განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ (შემდეგში ჩვენ აღარ გავუყვებით შტრის წარმოებულს დროის მიმართ):

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z &= 0, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x &= 0, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 59)$$

გავარჩიოთ უმარტივესი შემთხვევები.

1. **სფერული ბურიალა.** სფერული ბურიალა ეწოდება ისეთ მყარ სხეულს, რომლის მთავარი ინერციის მომენტები ერთმანეთის ტოლია

$$I_x = I_y = I_z = I. \quad (\text{XI}, 60)$$

როგორც ვიცით ასეთი მყარი სხეულისათვის ინერციის ცენტრზე გამავალი ყოველი ღერძი ინერციის მთავარი ღერძი იქნება; ამ შემთხვევაში ეილერის განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

ე. ი.

$$\vec{\omega} = \text{const}. \quad (\text{XI}, 61)$$

როგორც ვხედავთ, მყისი ღერძი არ იცვლის თავის მდებარეობას მყარ სხეულში. მაგრამ ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ იგი უძრავია აგრეთვე ინერციული სისტემის მიმართ. მართლაც (XI,57) და (XI,60) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ \vec{L} ვექტორი მიმართულია $\vec{\omega}$ -ს გასწვრივ

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (\text{XI}, 62)$$

და ვინაიდან თავისუფალი სხეულისათვის იმპულსის მომენტი უცვლელია ინერციული სისტემის მიმართ, $\vec{\omega}$ ვექტორიც უცვლელი იქნება.

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ ერთ წერტილში დამაგრებული სფერული ბზრიალა თანაბრად უნდა ბრუნავდეს ღერძის ირგოლივ, რომელიც უძრავია, როგორც ინერციული სისტემის, ისე თვით სხეულის მიმართ.

2. **სიმეტრიული ბზრიალა.** ასეთი სხეულის შემთხვევა ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი და საინტერესოა როგორც თეორიული. ისე პრაქტიკული თვალსაზრისით. სიმეტრიული ბზრიალა ეწოდება ისეთ მყარ სხეულს, რომლის ორი მთავარი ინერციის მომენტი ტოლია, მესამე მომენტი კი მათგან განსხვავდება

$$I_x = I_y \neq I_z. \quad (\text{XI},63)$$

ამ განსაზღვრიდან ნათელია, რომ უმრავლესობა იმ მყარი სხეულებისა, რომლებიც პრაქტიკულ ცხოვრებასა და ტექნიკაში გამოიყენებიან (ბორბლები, ტურბინები, ელექტრული მანქანების ღუზები და სხვა), სიმეტრიულ ბზრიალებს წარმოადგენენ. ამიტომაც, ცხადია, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის ხასიათის გარკვევა. (XI,63) პირობის მხედველობაში მიღებით ეილერის მესამე განტოლება მოგვეცემს

$$\omega_x = \text{const} = b. \quad (\text{XI},64)$$

ორი დანარჩენი განტოლება კი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$I_x \dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z (I_y - I_z) = 0,$$

$$I_x \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = 0.$$

თუ პირველს გადავამრავლებთ ω_x -ზე. ხოლო მეორეს ω_y -ზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\omega_x \dot{\omega}_x + \omega_y \dot{\omega}_y = 0,$$

საიდანაც ინტეგრებით გვექნება.

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{const} = a^2. \quad \text{XI},65)$$

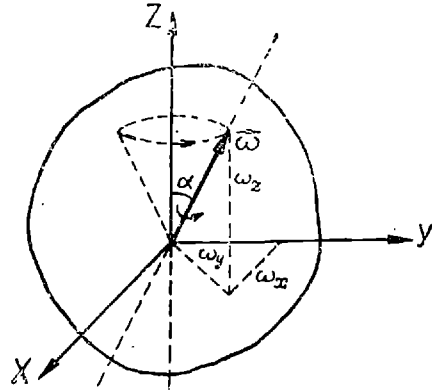
(XI,64) და (XI,65) განტოლებები ერთად გვაძლევენ

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \text{const}. \quad (\text{XI},66)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კუთხური სიჩქარის სიდიდე მუდმივია (თვით სხეულის მიმართ). გავარკვეოთ ახლა საკითხი კუთხური სიჩქარის ან, რაც იგივეა, მყისი ღერძის მიმართულების შესახებ. ვთქვათ, საწყის მომენტში $\vec{\omega}$ ვექტორი დახრილი იყო სიმეტრიის ღერძის, ე. ი. OZ ღერძის მიმართ α კუთხით. რადგანაც (ნახ. 140)

$$\text{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad (\text{XI},67)$$

მივიღებთ, რომ ეს კუთხე და მაშასადამე. მყავსი ღერძის დახრა სიმეტრიის ღერძის მიმართ მუდმივი იქნება. ვინაიდან საწყის მომენტში ω_y და ω_x ნულისაგან განსხვავებულია, (XI,59) ფორმულების თანახმად მათი წარმოებულები დროის მიმართ აგრეთვე განსხვავებული იქნება ნულისაგან. მაშასადამე, ω_x და ω_y იცვლებიან დროის განმავლობაში, მაგრამ ეს ცვლილება ისე წარმოებს, რომ $\vec{\omega}$ -ს დახრა OZ ღერძის მიმართ უცვლელი რჩება; აქედან გამომდინარეობს, რომ $\vec{\omega}$ ვექტორი მოძრაობს მყარი სხეულის ზიგნით, სახელდობრ, იგი შემოწვრს OZ ღერძის (სიმეტრიის ღერძის) ირგვლივ კონუსს 2α გაშლის კუთხით. (XI,59) ფორმულების გამოყენებით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ეს მოძრაობა არის თანაბარი ბრუნვა OZ ღერძის ირგვლივ.



ნახ. 140.

მაშასადამე, მყარი სხეულის მოძრაობა სიმეტრიის ღერძის მიმართ შედგება თანაბარი ბრუნვისაგან მყისი ღერძის ირგვლივ და ამ მყისი ღერძის თანაბარი ბრუნვისაგან სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ.

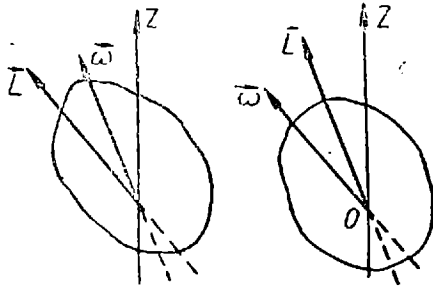
გამოვარკვიოთ როგორი სახისაა თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ. ვინაიდან სხეული თავისუფალია, იმპულსის მომენტი \vec{L} უცვლელი იქნება აღნიშნული ათვლის სისტემის მიმართ. ამიტომაც გამოსარკვევია როგორ მოძრაობს მყისი ღერძი \vec{L} ვექტორის მიმართ. განვიხილოთ ამისათვის $\vec{\omega}$ ვექტორის პროექცია \vec{L} -ზე: თუ კუთხეს β -სა და \vec{L} -ს შორის β -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$\cos \beta = \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{L})}{\omega L} = \frac{2E_k}{\omega L} = \text{const}, \quad (\text{XI}, 68)$$

ვინაიდან E_k არის მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერჯია და თავისუფალი სხეულის შემთხვევაში მუდმივია. მაშასადამე $\vec{\omega}$ ვექტორის დახრილობის კუთხე \vec{L} ვექტორის მიმართ მუდმივია და ვინაიდან თვით $\vec{\omega}$ ვექტორის სიდიდეც მუდმივია, ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც შეუძლია შეასრულოს $\vec{\omega}$ ვექტორმა, იქნება

ამ ვექტორის თანაბარი ბრუნვა \vec{L} ვექტორის ირგვლივ. ჩვენ ვხედავთ, რომ ინერციული სისტემის მიმართაც (რომლის ერთ ღერძს ახორციელებს \vec{L} ვექტორი), სხეულის მოძრაობა ორი მოძრაობისაგან შედგება: თანაბარი ბრუნვისაგან მყისი ღერძის ირგვლივ ა კუთხური სიჩქარით და თვით მყისი ღერძის თანაბარი ბრუნვისაგან \vec{L} ვექტორის ირგვლივ.

გავეერთიანოთ ახლა ჩვენ მიერ მიღებული შედეგები. სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა შეიძლება დახასიათდეს სამი ღერძის



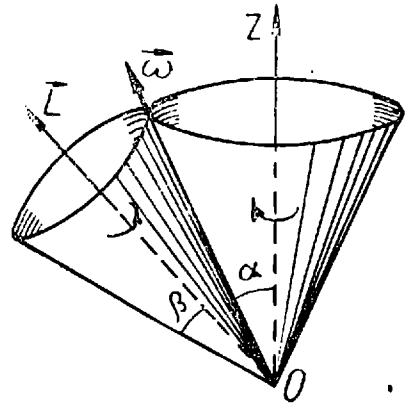
ნახ. 141.

მოძრაობით ერთმანეთის მიმართ და თვით მყარი სხეულის მოძრაობით ერთ-ერთი მათგანის (მყისი ღერძის) ირგვლივ. ეს ღერძებია: იმპულსის მომენტის \vec{L} ღერძი—უძრავი ინერციული სისტემის მიმართ, სიმეტრიის ღერძი—უძრავი თვით სხეულის მიმართ, და $\vec{\omega}$ მყისი

ღერძი, რომლის ირგვლივაც ხდება სხეულის ბრუნვა ყოველ მომენტში. თუ ჩვენ გვინდა განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ, უნდა უძრავად ჩავთვალოთ იმპულსის მომენტის ღერძი და აღვწეროთ როგორ მოძრაობენ სიმეტრიის ღერძი და მყისი ღერძი ($\vec{\omega}$ ვექტორი) მის მიმართ. უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა: პირველი, როდესაც სიმეტრიის ღერძის სათანადო ინერციის მომენტი ნაკლებია, ვიდრე დანარჩენი მთავარი ინერციის მომენტები ($I_z < I_x = I_y$) და მეორე, როდესაც I_z მეტია, ვიდრე I_x და I_y ($I_z > I_x = I_y$). ამ შემთხვევებს ეთანადება ზემოაღნიშნული სამი ღერძის სხვადასხვა ურთიერთგანლაგება. პირველ შემთხვევაში $\vec{\omega}$ ღერძი მოთავსებულია \vec{L} და OZ ღერძებს შორის, ხოლო მეორე შემთხვევაში — მათ გარეთ (ნახ. 141). ცხადია, რომ ორივე შემთხვევაში \vec{L} , OZ და $\vec{\omega}$ ღერძები ყოველთვის ერთ სიბრტყეში იმყოფებიან. ეს ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს ვილერის განტოლების საშუალებით.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა ($I_z < I_x = I_y$) და გამოვარკვიოთ როგორ მოძრაობენ მყისი ღერძი და იმპულსის მომენტის ღერძი უძრავი სიმეტრიის ღერძის მიმართ. ვინაიდან $\vec{\omega}$ ვექტორი თანაბრად ბრუნავს OZ ღერძის ირგვლივ და დახრილია მის

მიმართ მუდმივი α კუთხით, ცხადია რომ $\vec{\omega}$ ვექტორი თანაბრად ბრუნავს OZ ღერძის ირგვლივ მუდმივი α კუთხის დახრილობით. ამ მოძრაობის ნათლად წარმოსადგენად შემოვწეროთ OZ ღერძის ირგვლივ კონუსი, სათავეთ O წერტილში და გაშლის 2α კუთხით. შემოვწეროთ აგრეთვე \vec{L} ღერძის ირგვლივ მეორე კონუსი, სათავეთ ისევ O წერტილში და გაშლის 2β კუთხით. ამ ორი კონუსის გარე ზედაპირების შეხების ხაზი იქნება $\vec{\omega}$ ღერძი (ნახ. 142).



ნახ. 142.

ვთქვათ ახლა, რომ OZ -ღერძიანი კონუსი უძრავია და მის გარე ზედაპირზე, თანაბრად გორავს \vec{L} ღერძის მქონე კონუსი. მაშინ როგორც \vec{L} ღერძი, ისე კონუსების შეხების ხაზი, ე. ი. $\vec{\omega}$ ღერძი, თანაბრად იბრუნებს OZ ღერძის ირგვლივ.

თუ ჩვენ გვინდა განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა ინერციული სისტემის, ე. ი. \vec{L} ღერძის მიმართ, უძრავად უნდა ჩავთვალოთ \vec{L} -ღერძიანი კონუსი და მასზე ვავალოთ OZ -ის ირგვლივ შემოწერილი კონუსი. მაშინ ამ კონუსის ღერძის და კონუსების ზედაპირების შეხების ხაზის მოძრაობა წარმოგვიდგენს სხეულის სიმეტრიის ღერძის და მყისი ღერძის მოძრაობას \vec{L} ვექტორის მიმართ.

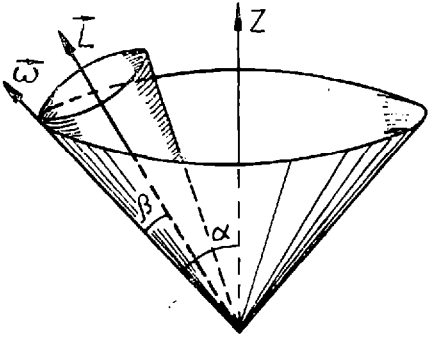
ასევე ვაირჩევა მეორე შემთხვევა, როდესაც $\vec{\omega}$ ვექტორი მოთავსებულია OZ და \vec{L} ღერძების გარეთ. ამ შემთხვევაშიც უნდა ავაგოთ ორი კონუსი: ერთი OZ ღერძით და 2α გაშლის კუთხით და მეორე \vec{L} ღერძით და გაშლის 2β კუთხით. ცხადია რომ \vec{L} ღერძის მქონე კონუსი მთლიანად მოთავსდება OZ ღერძის მქონე კონუსის შიგნით და მისი გარე ზედაპირის და განიერი კონუსის შიგა ზედაპირის შეხების ხაზი იქნება მყისი ღერძი (ნახ. 143).

OZ ღერძის მიმართ მოძრაობის წარმოსადგენად უნდა ჩავთვალოთ, რომ \vec{L} -ღერძიანი ვიწრო კონუსი გორავს OZ -ღერძიანი განიერი კონუსის შიგა ზედაპირზე. \vec{L} ღერძის მიმართ მოძრაობის წარმოსადგენად კი განიერი, OZ -ღერძიანი კონუსი უნდა ვავალოთ \vec{L} -ღერძიანი კონუსის გარე ზედაპირზე. თავისუფალი სიმეტრიული

ბზრიალას აღწერილ მოძრაობას, როდესაც მყისი ღერძი და ინ. პულსის მომენტი თანაბრად ბრუნავენ სხეულის სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ (მოძრაობა თვით სხეულის მიმართ) ან მყისი ღერძი და სიმეტრიის ღერძი თანაბრად ბრუნავენ იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ (მოძრაობა ინერციული სისტემის მიმართ), ეწოდება რეგულარული პრეცესია. კუთხურ სიჩქარეს ω , რომლითაც $\vec{\omega}$ და \vec{L} ვექტორები ბრუნავენ სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ, ეწოდება პრეცესიის კუთხური სიჩქარე. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ იგი დაკავშირებულია სხეულის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარესთან შემდეგი ფორმულით:

$$\omega_{\pi} = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega. \quad (X1,69)$$

ყოველი სიმეტრიული ბზრიალა, რომელზედაც არ მოქმედებენ გარეშე ძალები და რომლის მყისი ღერძი არ თანხვდება არც ერთ



ნახ. 143.

მთავარ ინერციის ღერძს, ასრულებს რეგულარულ პრეცესიას, რაც გამოიხატება მყისი ღერძის ბრუნვაში სიმეტრიის ღერძის ირგვლივ. რეგულარული პრეცესია კარგად ჩანს სიმეტრიული ბზრიალას შემთხვევაში, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა თავისი ინერციის ცენტრის ირგვლივ. პრეცესიის მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს, დედამიწის ბრუნვის ღერძის გადახრება დედამიწის შიგნით, რაც, თავის მხრივ, იწვევს კინემატიკური პოლუსის მოძრაობას. დედამიწა, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს შეჭყლვტილ ელიფსოიდს. ვუწოდოთ მისი სიმეტრიის ღერძის გადაკვეთას ზედაპირთან გეომეტრიული პოლუსი. იგი არ თანხვდება კინემატიკურ პოლუსს, რომელიც არის ბრუნვის მყისი ღერძის გადაკვეთა ზედაპირთან (ნახ. 144). მართალია, კინემატიკური პოლუსის გადახრა გეომეტრიული პოლუსიდან ძალიან მცირეა (სულ რამდენიმე მეტრია), მაგრამ ეს გადახრა უკვე საკმარისია იმისათვის, რომ კინემატიკურმა პოლუსმა შეასრულოს პრეცესიული მოძრაობა გეომეტრიული პოლუსის ირგვლივ. პრეცესიის სიხშირეს ადვილად გამოვიტვლით (X1,69) ფორმულის

გამოყენებით. ვანაიდან დედამიწის შეჭყლეთილობა არის დაახლოებით.

$$\frac{I_s - I_x}{I_x} \sim \frac{1}{300}.$$

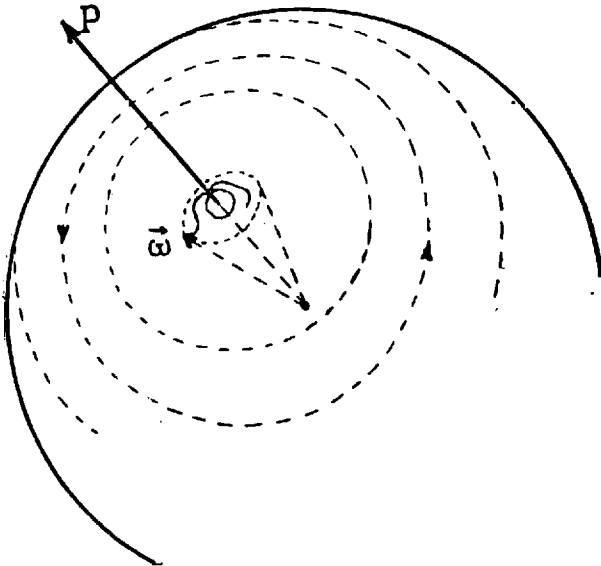
ხოლო დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ sec}^{-1}$,
პრეცესიის სიჩქარე იქნება

$$\omega\pi = \frac{2\pi}{86400 \cdot 300}.$$

აქედან პრეცესიული მოძრაობის პერიოდისათვის მივიღებთ

$$T\pi \sim 10 \text{ თვე}.$$

მიღებული შედეგი იმას ნიშნავს, რომ, თუ დედამიწას ჩვეთვლით სიმეტრიულ მყარ ბზრივად, კინემატიკურმა პოლუსმა უნდა შე-



ნახ. 144.

მოწეროს გეომეტრიული პოლუსის ირგვლივ მცირე ზომის წრეხაზი დაახლოებით 10 თვის განმავლობაში.

მრავალწლიანი დაკვირვებები გვიჩვენებენ, რომ დედამიწის კინემატიკური პოლუსი, მართლაც, მოძრაობს, ე. ი. იცვლის მდებარეობას გეომეტრიული პოლუსის მახლობლად, მაგრამ, ჯერ ერთი, ამ მოძრაობის ტრაექტორია არ წარმოადგენს წრეხაზს, იგი საკმაოდ დახლართული მრუდია, და, გარდა ამისა, მიახლოებითი პერიოდი არის არა 10 თვე, არამედ 14 თვე. ეს განსხვავება თეორიულ და დაკვირვებით მიღებულ შედეგებს შორის მრავალი მიზეზით შეიძ-

ლება იყოს გამოწვეული. მათ შორის აღსანიშნავია დედამიწის გადახრა სიმეტრიული ბზრიალას ფორმისაგან, ატმოსფეროს ფენების მოძრაობა და მასების გადანაცვლება დედამიწის შიგნით.

3. არასიმეტრიული ბზრიალა. ვინაიდან განსახილველი შემთხვევა გაცილებით უფრო რთულია. ვიდრე სიმეტრიული ბზრიალას შემთხვევა, ჩვენ გავარჩევთ ამ მოძრაობის მსოლოდ ზოგიერთ მარტივ მხარეს. ჯერ ერთი, ცხადია, რომ, თუ საწყის მომენტში სხეული მოძრაობს ერთ-ერთი მთავარი ინერციის ღერძის (თავისუფალი ღერძის) ირგვლივ, იგი განუწყვეტლად იბრუნებს ამ ღერძის ირგვლივ; ეს ადვილად მტკიცდება ეილერის განტოლებების საშუალებით.

გამოვარკვიოთ ახლა როგორია მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როდესაც მყისი ღერძი ცოტათი გადახრილია მთავარი ინერციის ღერძიდან; აქ უნდა გავარჩიოთ ორი შემთხვევა იმისდა მიხედვით, თუ როგორია აღებული ღერძის ინერციის მომენტი.

როგორც დაკვირვება და თეორიული გამოკვლევა გვიჩვენებს, იმ შემთხვევაში, როდესაც არჩეული მთავარი ღერძის სათანადო ინერციის მომენტი ან მაქსიმალური, ან მინიმალურია, მყისი ღერძი ყოველთვის ამ ღერძის მახლობლად დარჩება და შემოწერს მის ირგვლივ მცირე კონუსს, ისე როგორც ეს ხდება სიმეტრიული ბზრიალას პრეცესიის შემთხვევაში. ეს გვიჩვენებს, რომ ბრუნვა მაქსიმალური ან მინიმალური ინერციის მომენტის მქონე თავისუფალი ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

სულ სხვა შედეგი მიიღება საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ ბრუნვის შემთხვევაში. როგორც ირკვევა, თუ დასაწყისში სხეული ბრუნავდა ასეთი ღერძის ირგვლივ და შემდეგ მყისი ღერძი გადაიხარა ამ ღერძიდან, იგი არ დარჩება მის მახლობლობაში, არამედ სულ უფრო და უფრო მეტად გადაიხრება მისგან. ეს გვიჩვენებს, რომ ბრუნვა საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ არამდგრადია.

ზემოთ მოყვანილი შედეგები ადვილად მიიღება ეილერის განტოლებებიდან. ვთქვათ, ბრუნვა წარმოებს OX მთავარი ღერძის ირგვლივ. რომლის სათანადო ინერციის მომენტი არის I_x . $\vec{\omega}$ ვექტორს არ ექნება მდგენლები OY და OZ ღერძების მიმართ. მცირედ გადავხაროთ ახლა ბრუნვის ღერძი (ე. ი. $\vec{\omega}$ ვექტორი) OX ღერძიდან, რაც იმას ნიშნავს, რომ α_y და α_z მიიღებენ მცირე მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ მათი ნამრავლი კიდევ უფრო მცირე იქნება. ისე, რომ მისი შემცველი წევრი ეილერის პირველ განტო-

ლებაში შეიძლება უგულებელვყოთ. მივიღებთ $\frac{d\omega_x}{dt} = 0$ ან $\omega_x = \text{const.}$ ორი დანარჩენი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = (I_x - I_x)\omega_x\omega_y, \quad I_x \frac{d\omega_x}{dt} = (I_x - I_y)\omega_x\omega_y. \quad (\text{XI}, 70)$$

ვთქვათ, $\omega_x > 0$ და, გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ I_x არის მაქსიმალური ინერციის მომენტი. პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ω_y კლებულობს დროის განმავლობაში. ვინაიდან $I_x < I_x$ და ω_y განუწყვეტლად კლებულობს, $\frac{d\omega_x}{dt}$ თანდათან შემცირდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ω_x -ის მნიშვნელობა არ შეიძლება გახდეს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობაზე მეტი. ასევე დამტკიცდება, რომ ω_y -იც ვერ გადააჭარბებს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარეობს, რომ მყისი ღერძის გადახრა მაქსიმალური ინერციის მომენტის მქონე ღერძიდან ყოველთვის საკმარისად მცირე იქნება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვა ასეთი ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

ასეთივე შედეგს მივიღებთ, თუ დავუშვებთ, რომ I_x არის მინიმალური ინერციის მომენტი. თუ ω_y დადებითია, მეორე განტოლება (XI, 59) გვიჩვენებს, რომ ω_x მცირდება დროის განმავლობაში ($\frac{d\omega_x}{dt} < 0$). ვინაიდან $I_x > I_x$ და ω_x განუწყვეტლად კლებულობს, $\frac{d\omega_y}{dt}$ თანდათან შემცირდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ω_y -ის მნიშვნელობა არ შეიძლება გახდეს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობაზე მეტი. ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ ბრუნვა მინიმალური ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ მდგრადია.

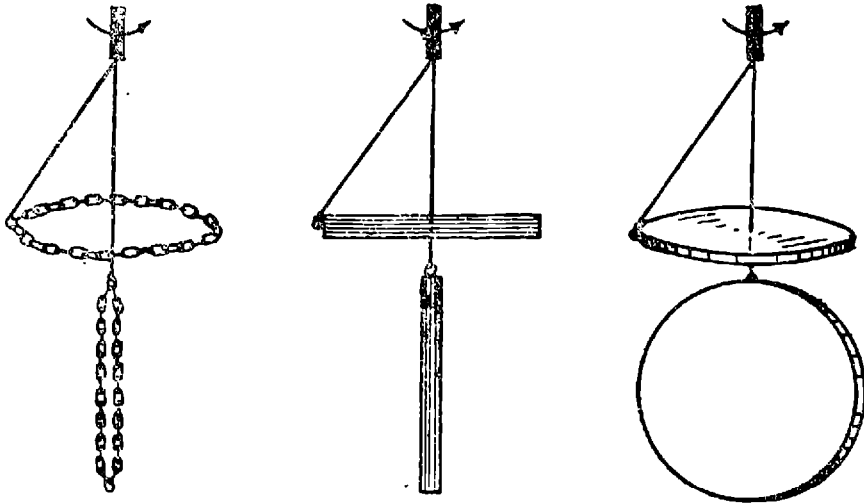
სულ სხვა შედეგს მივიღებთ, თუ I_x არის საშუალო ინერციის მომენტი (მაგალითად, $I_x > I_x > I_y$). თუ ω_x დადებითია, პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ ω_y იზრდება დროის განმავლობაში. ვინაიდან $I_x > I_y$ და ω_y განუწყვეტლად იზრდება, მეორე განტოლება ცხადყოფს, რომ $\frac{d\omega_x}{dt}$ თანდათან გაიზრდება, ე. ი. თვით

ω_x -იც სულ მოიმატებს და მოიმატებს რაც, თავის მხრივ, გამოიწვევს ω_y -ის ზრდას. ვინაიდან ორივე ეს მდგენელი თანდათან იზრდება და მათი ზრდის სისწრაფეც თანდათან მატულობს, მყისი ღერძი სულ უფრო მეტად გადაიხრება სიმეტრიის ღერძიდან; ეს

კი იმას ნიშნავს, რომ ბრუნვა საშუალო ინერციის მომენტის მქონე ღერძის ირგვლივ არ იქნება მდგრადი.

მთავარი ღერძების ირგვლივ ბრუნვის მდგრადობის განხილვისას უნდა მიექცეს ყურადღება შემდეგ გარემოებას.

ის შედეგი, რომ მდგრადია უდიდესი და უმცირესი ინერციის მომენტის მქონე მთავარი ღერძები, მართებულია მხოლოდ იმ პი-



ნახ. 145.

რობით, რომ სხეულზე არ მოქმედებენ გარეშე ძალები. მაგრამ, პრაქტიკულად, მბრუნავ სხეულზე ყოველთვის მოქმედებენ ხახუნისა და მაბრუნებელი ძალები. როგორც ირკვევა, ასეთ პირობებში მდგრადია მხოლოდ ერთი მთავარი, ანუ თავისუფალი ღერძი, სახელდობრ ის, რომელსაც ეთანადება უდიდესი ინერციის მომენტი. ეს შედეგი ადვილად შეიძლება შემოწმდეს ექსპერიმენტულად. ცენტრიდანული მანქანის საშუალებით მოვიყვანოთ სწრაფ ბრუნვაში დაფხე დაკიდებული სხვადასხვა ფორმის სხეულები: დისკო, ღერო, ჯაჭვი და სხვა (ნახ, 145). ჩვენ დავინახავთ, რომ, მაგალითად, დისკო მის სიბრტყეში მდებარე ღერძის ირგვლივ ბრუნვასთან ერთად დაიწყებს ქანაობას, შემდეგ აიწევეს, მიიღებს ჰორიზონტალურ მდებარეობას და განაგრძობს ბრუნვას მისი სიბრტყის მართობი ღერძის ირგვლივ, რომელსაც ეთანადება უდიდესი ინერციის მომენტი. ასევე იქნება ღეროსა და ჯაჭვის შემთხვევაში.

§ 68. მიმდებარე სიმეტრიული ბზრიალას ბაუნჯა წმკტილის ირგვლივ.
 უხმვდო-ჩმვულარული კრმცმნია

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა და გამოვარკვეეთ, რომ ეს მოძრაობა წარმოგვიდგება რეგულარული პრეცესიის სახით: სიმეტრიის და მყისი ღერძები თანაბრად ბრუნავენ იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ, რომელიც უძრავია ინერციული სისტემის მიმართ.

გავარჩიოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც სიმეტრიულ ბზრიალაზე მოქმედებს გარეშე მომენტი, რომელიც მოძრაობის დინამიკური განტოლების თანახმად

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (\text{XI},71)$$

სცვლის იმპულსის მომენტს. ჩვეულებრივად ეს შემთხვევა ხორციელდება მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას სახით, რომელიც ერთი წვერით დაყრდნობილია პორიზონტალურ ზედაპირზე და რომლის ინერციის ცენტრზე მოქმედებს წამქცევი სიმძიმის ძალა.

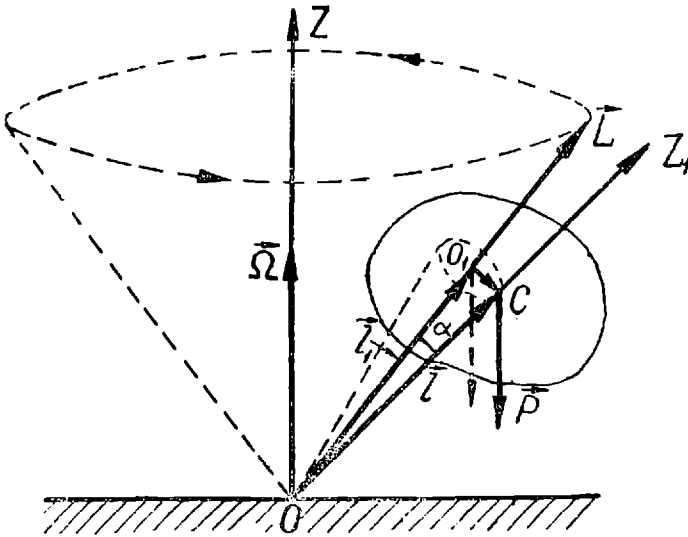
მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობა საკმაოდ რთული ხასიათისაა და ამიტომ ჩვენ შემოვისაზღვრებით რაც შეიძლება ელემენტარული განხილვით.

ვთქვათ, სიმეტრიული ბზრიალას ღერძი დახრილია ვერტიკალისადმი რალაც კუთხით და დაეუშვათ ჯერ, რომ სიმძიმის ძალა არ მოქმედებს. მაშინ, როგორც უკვე ვიცით, იმპულსის მომენტის ღერძი უძრავი იქნება და, თუ სიმეტრიის OZ_1 ღერძი მას არ თანხედება, იგი შემოწერს იმპულსის ღერძის ირგვლივ რეგულარული პრეცესიის კონუსს. დაეუშვათ ახლა, რომ ასეთნაირად მოძრავ ბზრიალაზე იმოქმედა ვერტიკალურად ქვევით მიმართულმა სიმძიმის \vec{P} ძალამ, რომელიც მოდებულია სიმეტრიის ღერძზე მდებარე სიმძიმის ცენტრზე (ნახ. 146). (XI,71) განტოლების თანახმად ამ ძალის მომენტი გამოიწვევს იმპულსის მომენტის ცვლილებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ \vec{L} ღერძი აღარ იქნება უძრავი. ჩვენი მიზანია ამ ღერძის მოძრაობის ხასიათის გამოვარკვევა. ამოცანის გასამართივებლად დაეუშვათ შემდეგი: ბზრიალა იმდენად სწრაფად ბრუნავს, რომ \vec{L} ვექტორის მოძრაობის ხასიათის გასარკვევად საკმარისია ჩავთვალოთ, რომ სიმძიმის ძალა მოდებულია თვით \vec{L} ღერძზე (ფაქტობრივად ძალა მოდებულია სიმძიმის ცენტრზე, რომელიც სიმეტრიის ღერძზე მდებარეობს; ამ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის დროს სიმძიმის ცენტრი შემოწერს \vec{L} ღერძის ირგვლივ წრე-

ბაზს, რომლის ცენტრი შეიძლება ჩავთვალოთ სიმძიმის ცენტრის საშუალო მდებარეობად). თუ \vec{P} ძალის მოდების წერტილია O , სათანადო მომენტისათვის მივიღებთ

$$\vec{M} = [\vec{l}_1 \cdot \vec{P}]. \quad (\text{XI},72)$$

სადაც \vec{l}_1 არის \vec{OO}_1 ვექტორი (მხარი), მიმართული \vec{L} ვექტორის გასწვრივ. თუ OC მანძილი სიმძიმის ცენტრიდან დაყრდნობის O წერ-



ნახ. 146.

ტილამდე l -ით აღვნიშნეთ, ხოლო კუთხე სიმეტრიის ღერძსა და \vec{L} ვექტორს შორის α -თი, შეიძლება დავწეროთ

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{L}}{L} l \cos \alpha, \quad (\text{XI},73)$$

სადაც $\frac{\vec{L}}{L}$ არის \vec{L} ღერძის გასწვრივ მიმართული ერთეულოვანი ვექტორი. ჩასმა (XI,72) ფორმულაში მოგვცემს

$$\vec{M} = \frac{l \cos \alpha}{L} [\vec{L} \cdot \vec{P}].$$

აქედან \vec{L} ვექტორის წარმოებულისათვის მივიღებთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{l \cos \alpha}{L} [\vec{L} \cdot \vec{P}]. \quad (\text{XI},74)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ \vec{L} ვექტორის ცვლილება მიმართულია \vec{L} ვექტორის მართობულად, რაც იმას ნიშნავს, რომ \vec{L} ვექტორის სიდი-

დე არ იცვლება, იცვლება მხოლოდ მისი მიმართულება. \vec{L} ვექტორის მოძრაობის ხასიათის გამოსარკვევად დავაგეგმილოთ (XI,74) განტოლება ვერტიკალურ მიმართულებაზე (OZ ღერძზე). ვინაიდან $[\vec{L} \vec{P}]$ ნამრავლის გეგმილი OZ ღერძზე ნულის ტოლია (ეს ნამრავლი \vec{P} ვექტორის, ე. ი. OZ -ის მართობია), მივიღებთ

$$\frac{dL_z}{dt} = 0,$$

საიდანაც

$$L_z = \text{const.}$$

ე. ი. იმპულსის მომენტის გეგმილი ვერტიკალზე მუდმივი სიდიდისაა. რადგანაც \vec{L} ვექტორის სიდიდე უცვლელია, უცვლელი იქნება აგრეთვე მისი OZ ღერძთან დახრილობის კუთხე; აქედან, ცხადია, რომ ერთადერთი მოძრაობა, რომელიც შეიძლება შეასრულოს \vec{L} ვექტორმა, არის თანაბარი ბრუნვა OZ ღერძის ირგვლივ. მართლაც, ამის დასამტკიცებლად და მისი ბრუნვის კუთხური სიჩქარის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა ვექტორის წარმოებულისათვის არაინერციული სისტემის მიმართ. თუ ასეთი სისტემის ღერძად თვით \vec{L} ღერძს ავიღებთ, ხოლო მის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს აღვნიშნავთ $\vec{\Omega}$ -თი, მივიღებთ

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - [\vec{\Omega} \vec{L}].$$

აქ $\frac{d'\vec{L}}{dt}$ არის \vec{L} ვექტორის წარმოებულ არაინერციული სისტემის, ე. ი. \vec{L} ვექტორთან ერთად მოძრავი სისტემის მიმართ და ამიტომ იგი ნულის ტოლი უნდა იყოს; აქედან მივიღებთ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -[\vec{L} \vec{\Omega}] = \vec{M}.$$

შედარება (XI,74) ფორმულასთან გვაძლევს \vec{L} ვექტორის ბრუნვის კუთხური სიჩქარისათვის

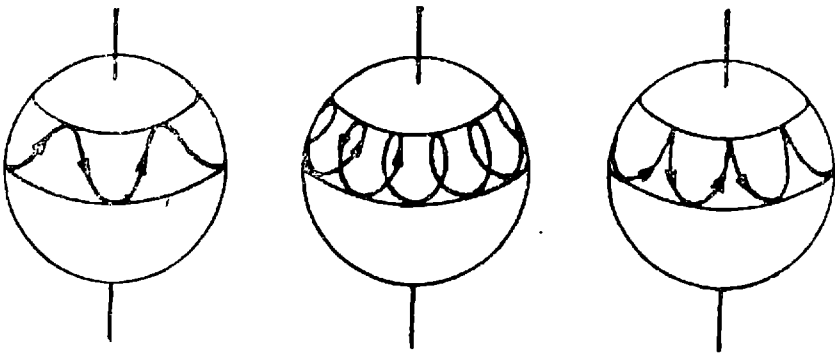
$$\vec{\Omega} = -\frac{l \cos \alpha}{L} \vec{P} \quad \text{ან} \quad \Omega = \frac{M}{L \cos \beta}, \quad (\text{XI,75})$$

სადაც β არის კუთხე $\vec{\Omega}$ და \vec{L} ვექტორებს შორის.

ასეთი კუთხური სიჩქარით ბრუნავს \vec{L} ვექტორი ვერტიკალური მიმართულების ირგვლივ. მიღებული შედეგი ასე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ: მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას იმპულსის მომენტის

\vec{L} ვექტორი ბრუნავს ვერტიკალური მიმართულების ირგვლივ (XI,75) ფორმულით გამოხატული კუთხური სიჩქარით. მეორე მხრივ, ბზრიალას სიმეტრიის ღერძი ბრუნავს \vec{L} ვექტორის ირგვლივ აგრეთვე მუდმივი კუთხური სიჩქარით. სიმეტრიის ღერძის საერთო მოძრაობა იქნება ჯამი ამ ორი ბრუნვისა.

იმპულსის მომენტის ვექტორის თანაბარ ბრუნვას გარეშე ძალების მომენტის გავლენით ეწოდება იძულებითი პრეცესია, ხოლო სიმეტრიის ღერძის ბრუნვას იმპულსის მომენტის ირგვლივ, რომელიც თავისუფალი ბზრიალას შემთხვევაში რეკულარულ პრეცესიას წარმოადგენს, იძულებითი პრეცესიის დროს ეწოდება ნუტაცია. სიმეტრიის ღერძის საერთო მოძრაობას, რომელიც მიიღება იძულებითი პრეცესიისა და ნუტაციის შეკრებით, ეწოდება ფსევდო-რეგულარი პრეცესია.



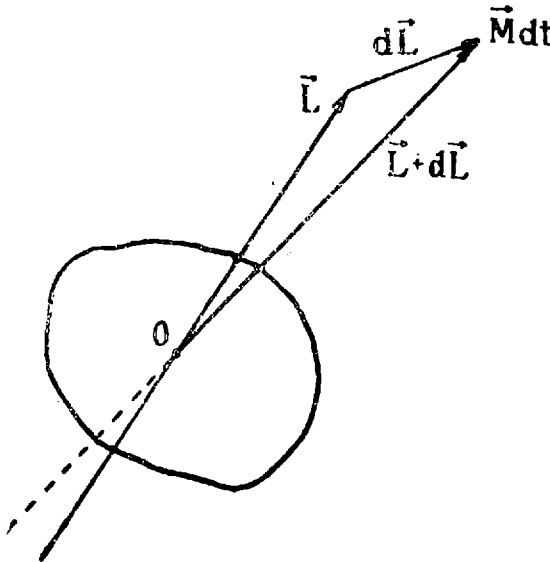
ნახ. 147.

სწრაფად მბრუნავი ბზრიალას შემთხვევაში ნუტაცია იმდენად მცირეა, რომ იგი თითქმის არ შეიმჩნევა და ისეთი შთაბეჭდილებაა, თითქოს იძულებით პრეცესიას ასრულებს თვით სიმეტრიის ღერძი. 147-ე ნახაზზე ნაჩვენებია იმ მრუდების სახე, რომლებსაც შემოწერს სიმეტრიის ღერძის ბოლო წერტილი ფსევდო-რეგულარი პრეცესიის დროს. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია იძულებითი პრეცესიისა და ნუტაციის კუთხური სიჩქარეები, მიიღება სხვადასხვა სახის მრუდი (ნახაზზე მრუდი გვიჩვენებს კვალს, რომელსაც სიმეტრიის ღერძი შემოწერს უძრავი საყრდენი წერტილის ირგვლივ შემოწერილი სფეროს ზედაპირზე), როდესაც ნუტაცია თითქმის შეუმჩნეველია, ბზრიალას სიმეტრიის ღერძის მოძრაობა წარმოებს არა წამქცევი გარეშე ძალის მიმართულებით, არამედ მის მართობულად.

განვიხილოთ ახლა ხანმოკლე ბიძგის მოქმედება სიმეტრიულ ბზრიალაზე. ვთქვათ, რომელიღაც მომენტამდე ბზრიალა თავისუფალი იყო და ბრუნავდა უპრეცესიოდ თავისი ერთ-ერთი თავისუფალი, მაგალითად, OZ ღერძის ირგვლივ. ამ შემთხვევაში სამივე ღერძი — იმპულსის \vec{L} მომენტის, მყისი $\vec{\omega}$ ღერძი და სიმეტრიის OZ ღერძი თანხვედნილი იქნებიან. ვთქვათ, საკმაოდ მცირე dt დროს განმავლობაში ამ სხეულზე იმოქმედა გარეშე \vec{M} მომენტმა. ხოლო შემდეგ მისი მოქმედება შეწყდა. გამოვარკვიოთ როგორი იქნება dt დროს შემდეგ ბზრიალას მოძრაობა. როგორც ვიცით, ინერციული სისტემის მიმართ dt დროის განმავლობაში მოქმედი \vec{M} მომენტი შექმნის დამატებით იმპულსის მომენტს

$$d\vec{L} = \vec{M} dt.$$

ეს დამატებითი იმპულსის მომენტი შეიკრიბება საწყის იმპულსის მომენტთან და მოგვცემს ახალ იმპულსის მომენტს $\vec{L} + d\vec{L}$ (ნახ. 148); ეს იმას ნიშნავს, რომ იმპულსის მომენტი მობრუნდება გარკვეული α_1 კუთხით. იმ შემთხვევაში როდესაც \vec{M} მომენტი მიმარ-



ნახ. 148.

თულია იმპულსის მომენტის, ე. ი. სიმეტრიის ღერძის მართობულად, მობრუნების კუთხისათვის მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dL}{L}.$$

რადგანაც იმპულსის მომენტი შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$L = I_x \omega,$$

სადაც ω არის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, შივილებთ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{dL}{I_x \omega}. \quad (\text{XI}, 76)$$

გარეშე ბიძგის მომენტი შეცვლის აგრეთვე კუთხური სიჩქარის, ე. ი. მყისი ლერძის მიმართულებას. მართლაც, \vec{M} მომენტი გამოიწვევს დამატებით ბრუნვას \vec{L} და \vec{M} ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობი ლერძის ირგვლივ. ამ ბრუნვის სიჩქარე შემდეგი ფორმულის საშუალებით გამოითვლება:

$$d\vec{\omega} = \frac{d\vec{L}}{I_x},$$

სადაც I_x არის ინერციის მომენტი ამ ლერძის ირგვლივ (იგი თანხვედება OX ლერძს). საბოლოო კუთხური სიჩქარე მიიღება $\vec{\omega}$ და $d\vec{\omega}$ ვექტორების შეკრებით. ცხადია, რომ საბოლოო კუთხური სიჩქარე გადახრილი იქნება საწყისი $\vec{\omega}$ -ს მიმართულებიდან გარკვეული α_2 კუთხით, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{d\omega}{\omega} = \frac{dL}{I_x \omega}. \quad (\text{XI}, 77)$$

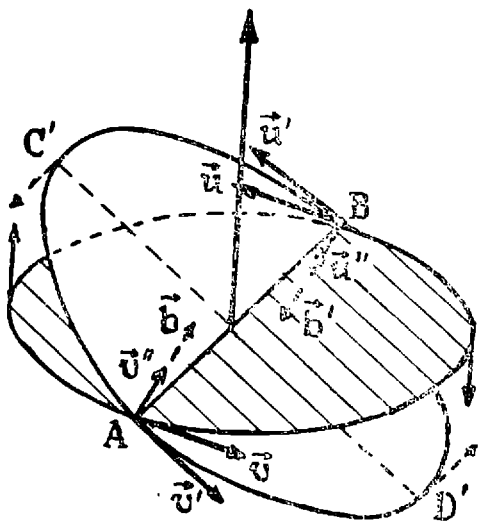
ეს კუთხე საზოგადოდ არ უდრის α_1 კუთხეს.

როგორც ვხედავთ, ხანმოკლე ბიძგის მოქმედება მბრუნავ სიმეტრიულ ბზრიალაზე შემდეგ შედეგს იძლევა: როგორც \vec{L} , ისე $\vec{\omega}$ ვექტორი გადაიხრება საწყისი მიმართულებიდან და ამ გადახრის შემდეგ ისინი უკვე აღარ იქნებიან თანხვედნილნი. ცხადია, რომ სიმეტრიის ლერძიც მობრუნდება. ბიძგის მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ შივილებთ სიმეტრიულ ბზრიალას, რომლის იმპულსის მომენტის, სიმეტრიის და მყისი ლერძები აღარ თანხვედნიან ერთმანეთს. როგორც ვიცით, ასეთ შემთხვევაში ბზრიალას მოძრაობა წარმოგვიდგება რეგულარული პრეცესიის სახით, რომლის დროს მყისი ლერძი და სიმეტრიის ლერძი თანაბრად ბრუნავს უძრავი იმპულსის მომენტის ლერძის ირგვლივ. თუ ბზრიალას საწყისი იმპულსის მომენტი საკმაოდ დიდი იყო, ე. ი. თუ ბზრიალა ძალიან დიდი სიჩქარით ბრუნავდა, (XI, 76) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ლერძების გადახრა ძალიან მცირე იქნება. განსხვავება α_1 და α_2 კუთხეებს შორის კიდევ უფრო მცირე იქნება და ამიტომ პრაქტიკულად ჩვენ შემდეგს შივილებთ. საკმაოდ სწრაფად მბრუნავი სიმეტრიული ბზრიალას ლერძზე მოქმედი ხანმოკლე ბიძგი

თითქმის არ ცვლის ბრუნვის ღერძის მიმართულებას — ბზრიალა დიდ წინააღმდეგობას უწევს მისი ღერძის მიმართულების ყოველი შეცვლის ცდას და, თუ ცვლილება მაინც მოხდება, იგი იქნება საკმაოდ მცირე და მიმართული არა მოქმედი ძალის მიმართულებით, არამედ მის მართობულად (ბიჯის მომენტის მიმართულებით). ბზრიალას ღერძის ასეთი გადახრა ძალიან უცნაურ შთაბეჭდილებას ქმნის. მიუხედავად იმისა, რომ ბზრიალაზე მოქმედებს სიმძიმის წამქცევი ძალა, იგი არ ვარდება და მისი ღერძის დახრილობის კუთხე თითქმის არ იცვლება. ისეთი შთაბეჭდილებაა, ვითომ ბზრიალას სწრაფმა ბრუნვამ ღერძის ირგვლივ, მიანიჭა მის ღერძს განსაკუთრებული მდგრადობა.

შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის თივისებურების დამამტკიცებელ მრავალ მაგალითს, ახლა კი შევეცდებით ნათლად წარმოვიდგინოთ მიზეზი ბზრიალას ღერძის მოძრაობის თავისებურებისა და მისი მდგრადობისა. ჩვენ უნდა გავარკვიოთ რატომ ეწინააღმდეგება ღერძი გარეშე ძალით გამოწვეულ გადახრას და იხრება ამ ძალების მომენტის მიმართულებით.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ ბზრიალა წარმოადგენს ღერძზე დამაგრებულ თხელ დისკოს (ნახ. 149), რომლის ინერციის ცენტრი დამაგრებულია. ვთქვათ, ბზრიალაზე მოქმედებენ გარეშე ძალები, რომლებიც ცდილობენ მოაბრუნონ ღერძი ვერტიკალურ სიბრტყეში, ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით (ამ ძალების მომენტი მიმართულია ნახაზის მართობულად). დავუშვათ, რომ ამ ძალების გავლენით ღერძი მცირედ დაიხარა, რის გამოც დისკომ მიიღო პუნქტირით ნაჩვენები მდებარეობა; ეს იმას ნიშნავს, რომ ღერძი მცირედ მოაბრუნდა AB ღერძის ირგვლივ. განვიხილოთ დისკოს A და B წერტილები. A წერტილის სიჩქარე დისკოს მოაბრუნებამდე გამოხატულია \vec{v} ვექტორით. მოაბრუნების შემდეგ სიჩქარის ვექტორიც მოაბრუნდება და დაიკა-



ნახ. 149.

ვებს \vec{u} მდებარეობას, რომელიც წარმოადგენს \vec{u} ვექტორის მდგენელს დისკოს ახალი მდებარეობის სიბრტყეში. მაგრამ \vec{u} ვექტორს აქვს ამ სიბრტყის მართობი მდგენელი \vec{u}' , რომელიც, თუ არ მოიხსნა გარეწე მოქმედებით, ამოძრავებს A წერტილს სათანადო მიმართულებით, ასეთივე მსჯელობა, ჩატარებული B წერტილისათვის, გვიჩვენებს, რომ ეს წერტილი ამოძრავდება \vec{u}'' ვექტორის მიმართულებით. \vec{u}' და \vec{u}'' სიჩქარეების სათანადო იმპულსები გამოიწვევენ ბრუნვის ღერძის მობრუნებას ნახაზის სიბრტყის მართობული მიმართულებით; \vec{u} და \vec{u}' ვექტორებით ნაჩვენები მხრით. ცხადია, რომ ეს ნიშნავს დისკოს მობრუნებას $C'D'$ ღერძის ირგვლივ. თუ ამ მობრუნებასთან დაკავშირებით ჩვენ გავიმეორებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ C' და D' წერტილების სიჩქარეების მიმართულების ცვლილება გამოიწვევს ბრუნვის ღერძის გადახრას ნახაზის სიბრტყეში. როგორც 149-ე ნახაზი გვიჩვენებს, ეს გადახრა საწინააღმდეგოა ღერძის პირვანდელი გადახრისა და ამიტომ სპობს მას. რჩება ერთადერთი გადახრა, გამოხატული \vec{u} და \vec{u}' ვექტორებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ბზრიალა ეწინააღმდეგება ღერძის გადახრას გარეშე ძალების მოქმედების გასწვრივ და იხრება ამ ძალების სათანადო შომენტის მიმართულებით, ე. ი. ისე როგორც ეს აღწერილი იყო ზემოთ.

§ 69. გიროსკოპი და მისი გამოყენება

ბზრიალას მოძრაობის თავისებურების საჩვენებლად იყენებენ ხელსაწყოს, რომელსაც გიროსკოპი ეწოდება. მის ძირითად ნაწილს შეადგენს სწრაფად მბრუნავი ბზრიალა (ნახ. 150). ბზრიალას AA' ღერძი დამაგრებულია რგოლში, რომელსაც, თავის მხრივ, შეუძლია ბრუნვა ბზრიალას ღერძის მართობული BB' ღერძის ირგვლივ. ვუწოდოთ ამ რგოლს შიგა რგოლი. თვით შიგა რგოლის ღერძი მიმაგრებულია გარე რგოლთან, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა AA' და BB' ღერძების მართობული CC' ღერძის ირგვლივ. CC' ღერძი უძრავად დამაგრებულია სადგარზე. აღწერილ მოწყობილობას, რომელიც საშუალებას აძლევს ბზრიალას თავისუფლად იბრუნოს სამი ურთიერმართობი ღერძის ირგვლივ, ეწოდება კარდანის საკიდი.

განვალაგოთ კარდანის საკიდის ღერძები ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე: ბზრიალას AA' ღერძი ჰორიზონტალურად ნახაზის სიბრტყეში, შიგა რგოლის BB' ღერძი ისევ ჰორიზონტალურად

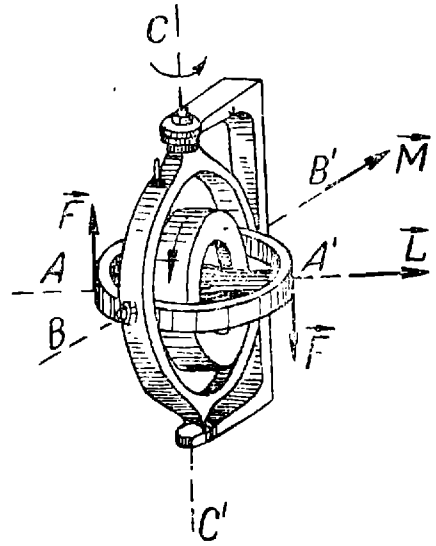
რად, მაგრამ ნახაზის სიბრტყის მართობულად, ხოლო გარე რგოლის CC' ღერძი ვერტიკალურად და ნახაზის სიბრტყეში.

დაეუშვათ, რომ ბზრიალა მოყვანილია სწრაფ ბრუნვაში ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით. მისი იმპულსის მომენტი წარმოდგენილია \vec{L} ვექტორით. აღწეროთ ახლა ზოგიერთი ცდა, რომელიც თვალსაჩინოდ ადასტურებს წინა პარაგრაფებში მიღებულ შედეგებს ბზრიალას იძულებითი პრეცესიის შესახებ.

1. შინაგანი რგოლის A' წერტილზე ვიმოქმედოთ ქვემოთ მიმართული ძალით, ე. ი. შევეცადოთ მოვაბრუნოთ ბზრიალას AA' ღერძი ჰორიზონტალურ სიბრტყეში საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ამ ძალების მომენტი მიმართული იქნება BB' ღერძის გასწვრივ, ნახაზის სიბრტყის მართობულად.

როგორც უკვე ვიცით ამ მომენტის მოქმედებით, AA' -მა, ე. ი. \vec{L} ღერძმა ჰორიზონტალურ სიბრტყეში დახრის მაგიერ უნდა დაიწყოს მოძრაობა მომენტის მიმართულებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ გარე რგოლმა უნდა დაიწყოს ბრუნვა CC' ღერძის ირგვლივ ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით. ცდა სავსებით ადასტურებს თეორიის შედეგებს. გარეშე მომენტის მიმართულების შეცვლა გამოიწვევს ბზრიალას ღერძის მოძრაობის მიმართულების შეცვლას.

2. ვიმოქმედოთ ახლა გარე რგოლზე ისე, რომ შევეცადოთ ბზრიალას ღერძი შემოვაბრუნოთ ჰორიზონტალურ სიბრტყეში საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით; ამ ძალების მომენტი მიმართული იქნება ვერტიკალურად ქვემოთ და ამიტომ თეორიული მსჯელობის თანახმად ბზრიალას ღერძი უნდა გადახაროს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით (ნახ. 151). ცდა სავსებით ადასტურებს თეორიის შედეგს.



ნახ. 150.

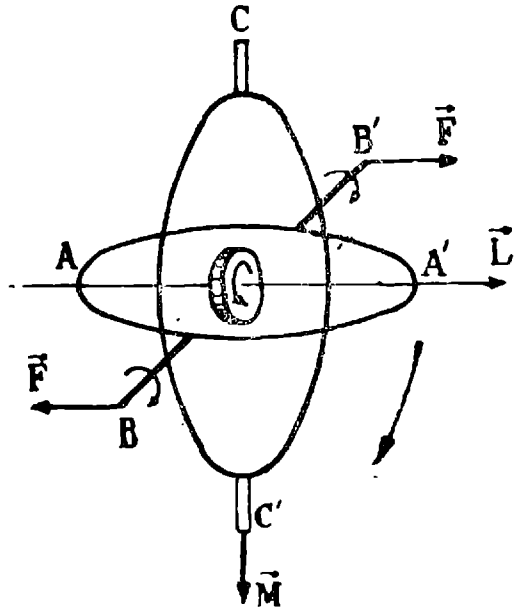
ორივე ცდა ნათლად გვიჩვენებს, რომ ყოველ შემთხვევაში ბზრიალას ღერძი ცდილობს მიიღოს ბრუნვაში მოყვანილი რგოლის ღერძის მიმართულება და ამასთანავე ისე, რომ მისი ბრუნვის მიმართულება თანხდეს რგოლის ბრუნვის მიმართულებას. ბზრიალას ღერძის მიმართულება მდგრადია მანამდე, სანამ მისი ბრუნვის

20. მ. ზირიანაშვილი

მიმართულება თანხედება რგოლის ბრუნვის მიმართულებას. ამ ორი ბრუნვის ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულების შემთხვევაში ბზრიალას ღერძის მიმართულება არამდგრადია და საკმარისია მცირე გადახრა, რომ ღერძი შემობრუნდეს საწინააღმდეგო მიმართულებით.

3. მოვახდინოთ ხანმოკლე, მაგრამ ძლიერი დარტყმა შიგა რგოლზე. ჩვენ დავინახავთ, რომ ეს დარტყმა თითქმის არავითარ გავლენას არ მოახდენს. წარმოიშვება მხოლოდ ბზრიალას ღერძის კონუსური მოძრაობა მისი საწყისი მიმართულების ირგვლივ. ეს კონუსური მოძრაობა არის რეგულარული პრეცესია, გამოწვეული ბზრიალას სიმეტრიის ღერძის მცირე გადახრით იმპულსის ღერძის მიმართულებიდან.

სამი თავისუფლების ხარისხის მქონე გაწონასწორებული გიროსკოპის შესანიშნავი თვისება, შეინარჩუნოს ბრუნვის ღერძის მიმარ-



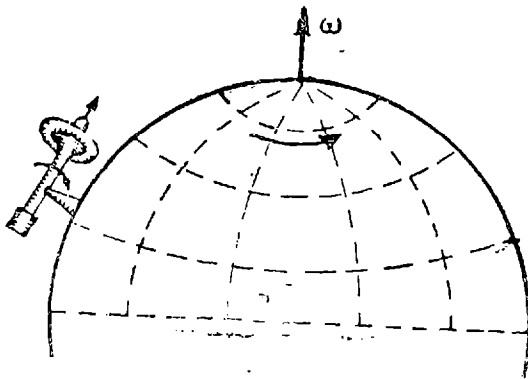
ნახ. 151.

თულება ინერციული სისტემის მიმართ, მრავალნაირ გამოყენებას პოულობს მეცნიერებასა და ტექნიკაში. სწრაფი ბრუნვის დროს გარეშე ძალების მოქმედება მხოლოდ მცირედ სცვლის ღერძის მიმართულებას და აიძულებს მას შეასრულოს პროცესიული მოძრაობა მოცემული მიმართულების ირგვლივ.

გიროსკოპის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან გამოყენებას წარმოადგენს გიროსკოპასი, რომელიც გამოიყენება გემის სვლის კურსის

ვანსაზღვრისა და შენარჩუნებისათვის. გიროკომპასის ძირითად ნაწილს წარმოადგენს ჰორიზონტალური ლერძის ირგვლივ სწრაფად მბრუნავი გიროსკოპი (ბრუნთა რიცხვი 17000—30000 მინუტში). ამ გიროსკოპს აქვს მხოლოდ ორი თავისუფლების ხარისხი და ამიტომ, ჰორიზონტალურად მოთავსებული, მოაბრუნებს თავის ლერძს დედამიწის ლერძის გასწვრივ ისე, რომ მათ ჰქონდეთ ერთნაირი ბრუნვის მიმართულება. გიროსკოპის ლერძი ჩერდება მერიდიანის სიბრტყეში და ერთი ბოლოთი გვიჩვენებს ჩრდილოეთის პოლუსის მიმართულებას (ნახ. 152). მაგნიტური კომპასისაგან განსხვავებით იგი გვიჩვენებს არა მაგნიტური, არამედ კინემატიკური პოლუსის მიმართულებას. მისი უპირატესობა მაგნიტურ კომპასთან შედარებით იმაში მდგომარეობს, რომ მასზე არ მოქმედებენ გემზე არსებული რკინის მასები და მაგნიტური შეფოთებები.

გიროსკოპი გამოიყენება აგრეთვე ტორპედოს სტაბილიზაციისათვის, ტორპედოს გასროლისას მისი შეიგნით მოთავსებული გიროს-



ნახ. 152.

კოპი იწყებს სწრაფ ბრუნვას. თუ ტორპედო გვერდით გადაიხარა, მისი კორპუსი შემობრუნდება გიროსკოპის გარე რგოლის მიმართ, რომელიც ინარჩუნებს თავის საწყის ორიენტაციას. ამ მობრუნებას მოჰყავს მოქმედებაში სათანადო მექანიზმი, რომელიც ხსნის სარკველს და საშუალებას აძლევს შეკუმშულ ჰაერს აამუშაოს გვერდითი საჭე. ეს უკანასკნელი უბრუნებს ტორპედოს საწყის მიმართულებას.

გიროსკოპის სხვა მრავალი გამოყენების გასაცნობად საჭიროა მკითხველმა მიმართოს სპეციალურ ლიტერატურას.

§ 70. დედამიწის ლერძის კამცანია და ნუბაცია

მყარი სხეულის პროცესიული მოძრაობის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან მაგალითს წარმოადგენს დედამიწის ლერძის კონუსური

მართულებით (თუ დამზერა წარმოებს ორბიტის ჩრდილოეთი მხრიდან, მოძრაობა იქნება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). ამ ასტრონომიული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე გამოთვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\Omega = \frac{M}{L \sin \beta}, \quad (\text{XI}, 78)$$

სადაც β არის კუთხე დედამიწის ღერძსა და ორბიტისადმი ნორმალს შორის ($\beta = 23^{\circ}5'$). კუთხისათვის, რომელზედაც მობრუნდება დედამიწის ღერძი ერთი წლის განმავლობაში, მივიღებთ

$$\varphi = T \cdot \Omega, \quad (\text{XI}, 79)$$

სადაც T არის წელიწადის ხანგრძლიობა, გამოხატული სეკუნდებით. რიცხვითი გამოთვლები გვაძლევენ

$$\varphi = 15'', 9.$$

ცხადია, რომ ეინაიდან დედამიწის სიმეტრიის და ბრუნვის ღერძები არ თანხვდებიან იმპულსის მომენტის ღერძს, მისი სიმეტრიის ღერძი შეასრულებს ნუტაციურ მოძრაობასაც — კონუსურ მოძრაობას იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ. მაგრამ, ეინაიდან დედამიწის სიმეტრიის ღერძი ძალიან მცირედ არის გადახრილი იმპულსის მომენტის ღერძიდან; ეს ნუტაციური მოძრაობა თითქმის შეუმჩნეველია და ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ პრეცესიულ მოძრაობას ასრულებს თვით სიმეტრიის ღერძი.

ჩვენ განვიხილეთ მზის მოქმედება დედამიწის ღერძზე, მაგრამ ვიცით, რომ მასზე მოქმედებს აგრეთვე მთვარე, რომლის ორბიტის სიბრტყე თითქმის თანხვდენილია დედამიწის ორბიტის სიბრტყესთან (ასტრონომიულ ნუტაციას, რომელიც გამოწვეულია მთვარის ორბიტის დახრით დედამიწის ორბიტისადმი ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ). მართალია, მთვარის მასა გაცილებით უფრო ნაკლებია, ვიდრე მზის მასა, მაგრამ, სიახლოვის გამო, მისი მოქმედება უფრო ძლიერია. გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ მთვარის მოქმედებით გამოწვეული პრეცესიის კუთხური სიჩქარე 2,18-ჯერ აღემატება მზის მოქმედებით გამოწვეული პრეცესიის კუთხურ სიჩქარეს.

მზისა და მთვარის საერთო მოქმედებით გამოწვეული პრეცესიისათვის მივიღებთ

$$\varphi = 50'', 3.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ პრეცესიის სრულ კონუსს დედამიწის ღერძი შემოწერს დაახლოებით 26000 წლის განმავლობაში ($360^{\circ}/50'', 3 \sim 26000$ წელია). თუ ახლა ღერძი თავისი ჩრდილოეთის პოლუსით მიმართულია მცირე დათვის თანავარსკვლავედის α ვარსკვ-

დღეღამური მოძრაობა. მეორე მხრივ. დედამიწის წლიური მოძრაობის გამო, მზე მოძრაობს ეკლიფტიკაზე ისრით ნაჩვენები მიმართულებით, ე. ი. საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. იმისდა მიხედვით. თუ საუ იმყოფება მზე ეკლიფტიკაზე, დღესა და ღამეს სხვადასხვა ხანგრძლიობა ექნებათ. თუ მზე იმყოფები ეკლიფტიკის ჩრდილოეთ ნაწილში, რომელიც ეკვატორის ზევით არის, დღე უფრო ხანგრძლივია, ვიდრე ღამე, ხოლო, თუ მზე ეკლიფტიკის სამხრეთ ნაწილშია, დღე ღამეზე მოკლე იქნება. დღისა და ღამის ხანგრძლიობა ერთნაირი იქნება, თუ მზე იმყოფება ეკლიფტიკისა და ეკვატორის წრეხაზების გადაკვეთის წერტილებში (A და C წერტილები ნახაზზე). ამიტომაც ეწოდებათ ამ წერტილებს დღელამსწორობის წერტილები.

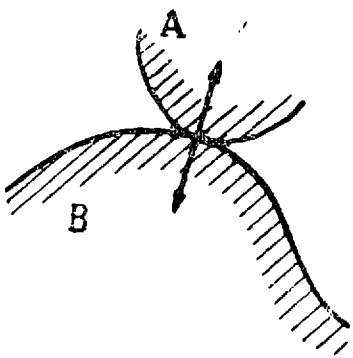
როგორც ზემოთ ვთქვით, ბერძენმა ასტრონომმა ჰიპარქემ შეამჩნია, რომ ყოველ შემდგომ წელიწადში მზე უფრო ადრე აღწევს დღელამსწორობის წერტილებს, ვიდრე წინა წელში; ეს იმას ნიშნავს, რომ თვით დღელამსწორობის წერტილები არ არიან უძრავი ეკლიფტიკაზე. ისინი მოძრაობენ მზის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ხდება ეგრეთ წოდებული დღელამსწორობის წინსწრება (სწორედ წინსწრებას ეწოდება ლათინურად პრეცესია და აქედან არის წარმომდგარი სახელწოდება პრეცესიული მოძრაობა). ეს მოვლენა ადვილად აიხსნება დედამიწის ღერძის იძულებითი პრეცესიით ეკლიფტიკის ნორმალის ირგვლივ. ვინაიდან დედამიწის ღერძი შემოწერს კონუსს *OP* ღერძის ირგვლივ, ნახაზზე აღნიშნული მიმართულებით, ეკვატორის სიბრტყეც იბრუნებს, რაც გამოიწვევს დღელამსწორობის წერტილების გადანაცვლებას მზის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ასტრონომიულ პრეცესიას ემატება, ეგრეთ წოდებული ასტრონომიული ნუტაცია, რომელიც უნდა განვასხვაოთ მექანიკური ნუტაციისაგან (სიმეტრიის ღერძის ბრუნვისაგან იმპულსის მომენტის ღერძის ირგვლივ). როგორც ზემოთ ვთქვით, ეს უკანასკნელი ნუტაცია იმდენად მცირეა, რომ თითქმის შეუმჩნეველია. სულ სხვა ბუნებისაა ასტრონომიული ნუტაცია, რომელიც გამოწვეულია მთვარის ორბიტის დასრით დედამიწის ორბიტის სიბრტყისადმი. ეს დახრა დაახლოებით 5° -ის ტოლია. მზისა და დედამიწის მოქმედებით ნორმალს მთვარის ორბიტისადმი ასრულებს პრეცესიულ მოძრაობას ეკლიფტიკისადმი ნორმალის ირგვლივ, რაც, თავის მხრივ, იწვევს დედამიწის ღერძის ბრუნვას მომენტის ღერძის ირგვლივ პერიოდით $18\frac{2}{3}$ წელიწადი. სწორედ ამ მოვლენას ეწოდება ასტრონომიული ნუტაცია.

§ 71. მუხარის სხეულების შეხება. რეაქციისა და ხახუნის ძალები

როგორც ყოველდღიურ ცხოვრებაში, ისე ტექნიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები მყარი სხეულების შეხებისა ერთმანეთთან. ცხადია, რომ ასეთი შეხების შედეგად სხეულები მოქმედებენ ერთმანეთზე გარკვეულა ძალებით და ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ამ ძალების ხასიათი და მათი როლი მყარი სხეულების მოძრაობაში. უნდა აღინიშნოს, რომ შეხების ძალების წარმოშობის მიზეზია სხეულების ზედაპირული ფენების ატომებს ან მოლეკულების ურთიერთქმედება და ამიტომ მათი ხასიათის თეორიული გამოკვლევისათვის საჭიროა მოლეკულების ურთიერთქმედების ცოდნა. ვინაიდან ეს უკანასკნელი საკმაოდ კარგად ცნობილი არ არის, ჩვენ იძულებული ვართ მივმართოთ ექსპერიმენტებს და მათი საშუალებით დავადგინოთ შეხების ძალების ხასიათი.

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შემხები მყარი სხეულები უძრავია ერთმანეთის მიმართ. ასეთი შემთხვევის მაგალითს წარმოადგენს შეხება უძრავი მძიმე სხეულისა საყრდენთან (ნახ 155).



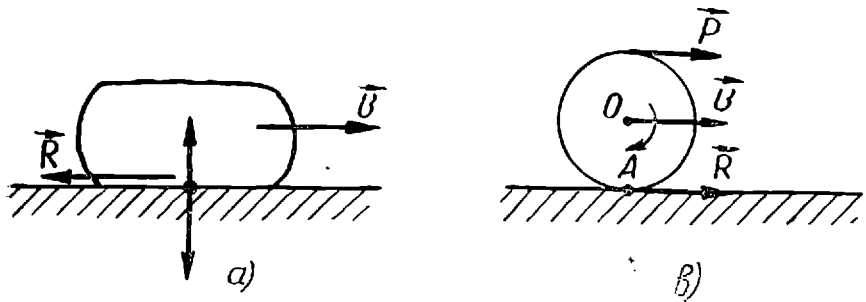
ნახ. 155.

შეხების წერტილებში მოქმედებენ ერთმანეთის ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალები. ცდები გვიჩვენებენ, რომ, თუ სხეულებს შეუძლიათ თავისუფლად სრიალი ერთიმეორის მიმართ, შეხებით გამოწვეული ე. წ. რეაქციის ძალები მიმართულია ზედაპირის მართობულად. ასეთი მიმართულება აქვთ რეაქციის ძალებს მხოლოდ სხეულების უძრავობის დროს. თუ სხეულები მოძრაობენ, რეაქციის ძალების გარდა ჩნდებიან ე. წ. ხახუნის ძალები, რომელნიც აღარ წარმოადგენენ წმინდა მექანიკური ხასიათის ძალებს. ეს ძალები, როგორც უკვე ვიცით, დისიპატიური ხასიათის ძალებია, ვინაიდან ისინი იწვევენ მექანიკური ენერჯის გარდაქმნას სითბურ ენერჯიად.

შემხები მყარი სხეულების ურთიერთმოძრაობა ორი სახის შეიძლება იყოს. შეიძლება ერთი სხეული სრიალებდეს მეორე სხეულის ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში მოძრაობს სხეულის ზედაპირის ყველა წერტილი. სრიალის დროს შეხების წერტილებში მოქმედებენ ორი სახის ძალები: უკვე ცნობილი რეაქციის ძალები, მი-

მართული შეხების ზედაპირის ნართობულად, და ხახუნის ძალები, რომლებიც მიმართული არიან ზედაპირის მხებად და მოქმედებენ მოძრაობის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 156a). სრიალის გარდა არსებობს შემხები სხეულების კიდევ ერთი სახის მოძრაობა — ე. წ. გორვა (ნახ. 156 b). ამ შემთხვევაში სხეულების შეხების წერტილები უძრავია და მგორავი სხეული ყოველ მომენტში ასრულებს ბრუნვას ამ წერტილების ირგვლივ (ან ამ წერტილებზე გამავალი ღერძის ირგვლივ). ცხადია, რომ მცირედ მობრუნების შემდეგ შეხების წერტილები უკვე სხვა იქნება და შემდეგი ბრუნვა იწარმოებს უკვე მათ ირგვლივ.

გორვის შემთხვევაში რეაქციის ძალები საზოგადოდ აღარ არიან მიმართულნი ზედაპირების ნართობულად და მათი მიმართულების მოძებნა შეიძლება მხოლოდ მოძრაობის განტოლებების ამოხსნით.



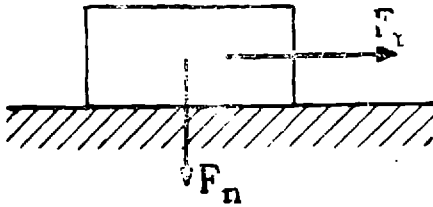
ნახ. 156.

გარდა რეაქციის ძალებისა, გორვის დროს ჩნდება კიდევ ხახუნის ძალები, რომელთა მოქმედება გამოიხატება დამატებითი ბრუნვის მომენტში, რომელიც წინააღმდეგობას უწევს გორვას.

შეიძლება ხახუნის ძალა სრიალის დროს იმდენად მცირე იყოს, რომ შესაძლებელი იყოს მისი უგულებელყოფა. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სხეულების ზედაპირები აბსოლუტურად გლუვია. მეორე უკიდურესი შემთხვევა გვექნება მაშინ, როდესაც ძლიერი სრიალის ხახუნის გამო, სრიალი საერთოდ შეუძლებელია, ხოლო გორვის ხახუნი შეიძლება უგულებელვყოთ. ეს ნიშნავს, რომ შესაძლებელია მხოლოდ უხახუნო გორვა.

განვიხილოთ ექსპერიმენტის შედეგები ხახუნის ძალების შესახებ. დავიწყეთ უძრავობის ხახუნით. ვთქვათ, რაიმე მყარი სხეული მოთავსებულია რაიმე ბრტყელ საყრდენზე (ნახ. 157). ვიმოქმედოთ ამ სხეულზე შეხების ზედაპირის გასწვრივ მიმართული F_x ძალით. ცდა გვიჩვენებს, რომ, თუ ეს ძალა საკმაოდ მცირეა, სხეული უძრავი დარჩება, რაც იმას ნიშნავს, რომ სხეულზე საყრდენის მხრიდან

მოქმედებს უძრავობის ხახუნის ძალა R , რომელიც მიმართულია F_t ძალის საწინააღმდეგოდ. თუ F_t ძალა გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას გადააჭარბებს, სხეული იწყებს აჩქარებულ მოძრაობას. აღნიშნით R_{max} -ით ის ხახუნის ძალა, რომლის შემდეგ იწყება სხეულის მოძრაობა. მრავალი მეცნიერის, განსაკუთრებით კი ფრანგი ფიზიკოსის—კულონის მიერ დადგენილ იქნა, რომ ეს მაქსიმალური უძრავობის ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია იმ ნორმალური



ნახ. 157.

F_n დაწოლისა, რომლითაც სხეული აწევა საყრდენს (თუ რაიმე სხვა გარეშე დაწოლა არ არის, F_n სხეულის წონას უდრის). მაშასადამე, შეიძლება დაიწეროს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$R_{max} = F_t = k_0 F_n,$$

რომელსაც ეწოდება კულონის კანონი. k_0 კოეფიციენტს, რომელიც დამოკიდებულია შემნები სხეულების გვარობაზე და ზედაპირების მდგომარეობაზე, ეწოდება უძრავობის ხახუნის კოეფიციენტი. k_0 -ის რიცხვითი მნიშვნელობები სხვადასხვა სხეულისათვის მოყვანილია ცხრილში.

ცხრილი 5

სხეულების წყვილი	k_0
ფოლადი—ფოლადზე (მშრალი ზედაპირები)	0,15
ფოლადი—ფოლადზე (ზეთიანი ზედაპირები)	0,12
ლითონი—ხეზე (მშრალი)	0,5
ხე—ხეზე (მშრალი)	0,65
ფოლადი—ყინულზე	0,027

ხშირად კულონის კანონს წერენ შემდეგი სახით:

$$\frac{R_{max}}{S} = k_0 N,$$

სადაც S არის შეხების ფართობი, ხოლო N — ნორმალური წნევა, ე. ი. ნორმალური ძალის შეფარდება შეხების ფართობთან.

აღსანიშნავია, რომ ხახუნის ძალა არ არის დამოკიდებული შეხების ზედაპირის ფართობზე. ეს ფაქტი იმით გამოიხატება, რომ N არის ნორმალური წნევა, ე. ი ფართობის ერთეულზე მოქმედი

ნორმალური ძალა. კულონის კანონი არ წარმოადგენს ზუსტ კანონს, იგი მით უფრო სწორია, რაც უფრო მეტია ნორმალური წნევა.

ხშირად, ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის იყენებენ დახრილ სიბრტყეს (ნახ. 158). თუ ერთ ერთი სხეულის ზედაპირს დაეხრით და მეორე სხეულს მოვათავსებთ ამ დახრილ სიბრტყეზე, გარკვეული დახრილობის კუთხის დროს დაიწყება სხეულის სრიალი დახრილ სიბრტყეზე. ამ შემთხვევაში მოძრაობაში მომყვანი ძალა არის წონის მდგენელი დახრილი სიბრტყის გასწვრივ, ხოლო ნორმალური ძალა კი — წონის ნორმალური მდგენელი.

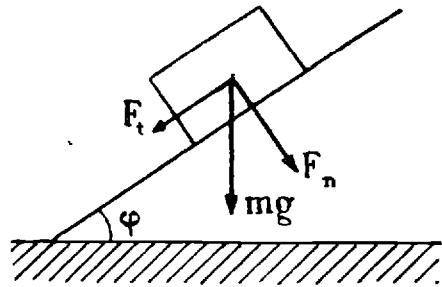
$$F'_t = mgs \sin \varphi_{max}, \quad F'_n = mg \cos \varphi_{max};$$

აქედან ხახუნის კოეფიციენტისათვის მივიღებთ

$$k_0 = \frac{F'_t}{F'_n} = \operatorname{tg} \varphi_{max}.$$

φ_{max} არის დახრილობის კუთხის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლის შემდეგაც იწყება სხეულის სრიალი დახრილ სიბრტყეზე. მას ხშირად ხახუნის კუთხეს უწოდებენ. ცხადია, რომ, თუ დახრილობის კუთხე φ_{max} -ზე ნაკლებია, სხეული უძრავი იქნება.

განვიხილოთ ახლა სრიალის ხახუნი. იმის შემდეგ, რაც შეხების ზედაპირის გასწვრივ მოქმედი ძალა აამოძრავებს სხეულს, იწყება სრიალი. სრიალის დროსაც არსებობს ხახუნის ძალა, რომელიც, ისევე როგორც უძრაობის ხახუნის ძალა, დამოკიდებულია ნორმალურ ძალაზე და მისი პროპორციულია



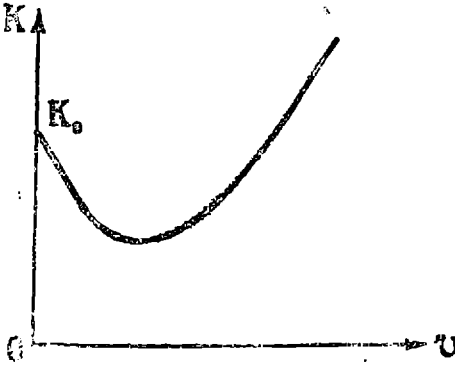
ნახ. 158.

$$F'_t = kF'_n.$$

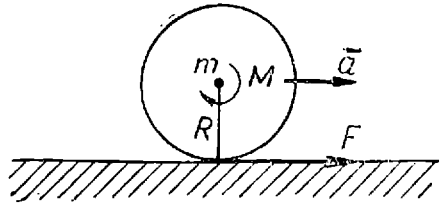
k კოეფიციენტს ეწოდება სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი. ცდები გვიჩვენებენ, რომ k კოეფიციენტი, ისევე, როგორც k_0 , არ არის დამოკიდებული შეხების ზედაპირის ფართობზე, მაგრამ დამოკიდებულია სხეულების გვარობაზე და ზედაპირების მდგომარეობაზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი ჩვეულებრივად ნაკლებია, ვიდრე უძრაობის ხახუნის კოეფიციენტი და სიჩქარის ვიწრო ფარგლებში არ არის დამოკიდებული სიჩქარეზე. მაგრამ ზუსტი ცდები გვიჩვენ-

ნებენ, რომ სიჩქარის ფართო ფარგლებში სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის დამოკიდებულება შესამჩნევი ხდება. საზოგადოდ იგი თანდათანობით კლებულობს (სიჩქარის ზრდასთან ერთად), აღწევს მინიმალურ წინშენელობას და შემდეგ იწყებს ზრდას. 159-ე ნახაზზე ნაჩვენებია μ -ს დამოკიდებულება სიჩქარისაგან.

დასასრულ განვიხილოთ გორვის ხახუნი. სუფთა გორვის დროს, როდესაც სრიალი სრულებით არ არის, სხეულების შეხების წერტილი ან ხაზი ყოველ აღებულ მომენტში უძრავია; ეს ნაშნავს, რომ წერტილში უნდა მოქმედებდეს უძრავობის ხა-



ნახ. 159.



ნახ. 160.

ხუნის ძალა. მაგრამ ეს ძალა მოქმედებს სხეულის სიჩქარის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 160) და მისი ბრუნვის მომენტი მიმართულია ისევე, როგორც გორვის გამომწვევი ძალის მომენტი. ამიტომაც მას არ შეუძლია შეანელოს გორვის სიჩქარე. მაშასადამე, გარდა ამ ძალის მომენტისა, უნდა არსებობდეს კიდევ რაღაც ძალის მომენტი, რომელიც მოქმედებს გორვის გამომწვევი მომენტის საწინააღმდეგოდ და ანელებს გორვას. სიმარტივისათვის განვიხილოთ წრიული ცილინდრის გორვა ბრუყელ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. თუ ხახუნის ტანგენციალურ ძალას F -ით აღვნიშნავთ, ხოლო გორვის ხახუნის ძალის მომენტს M -ით, შეიძლება დაიწეროს შემდეგი განტოლებები:

$$ma = F ,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - FR, \tag{XI,80}$$

სადაც a არის ცილინდრის ინერციის ცენტრის აჩქარება, m —მისი მასა, ხოლო I — ინერციის მომენტი. ვინაიდან გორვა უსრიალოა ინერციის ცენტრის აჩქარება დაკავშირებული იქნება კუთხურ

აჩქარებასთან ფორმულით $a = I \frac{d\omega}{dt}$. ჩასმა წინა ფორმულებში და F -ის გამორიცხვა გვაძლევს

$$mR \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right) a = M ;$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ გორვის ხახუნის ძალის მომენტი. ხახუნის ძალისათვის გვექნება

$$F = \frac{M}{R \left(1 + \frac{I}{mR^2} \right)} . \quad (\text{XI}, 81)$$

ხახუნის ძალები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ სხეულების მოძრაობის დროს. რომ არ ყოფილიყო ხახუნის ძალა შემხებ სხეულებს შორის, შეუძლებელი იქნებოდა ადამიანის სიარული, ბორბლების გორვა და, მაშასადამე, ბორბლიანი ეტლების მოძრაობა, ვინაიდან ერთადერთი გარეშე ძალა, რომელიც მოქმედებს მათზე, არის ხახუნის ძალა. შიგა ძალებს კი არ შეუძლიათ მოიყვანონ სხეულები მოძრაობაში.

§ 72. მყისი ძალის მოქმედება მყარ სხეულზე

წარმოვიდგინოთ, რომ თავისუფალი მყარი სხეულის რაიმე A წერტილში ძალიან მცირე დროის განმავლობაში მოქმედა საკმაოდ დიდმა ძალამ. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მყარმა სხეულმა განიცადა დარტყმა. იმის გამოსარკვევად, თუ როგორი იქნება სხეულის მოძრაობა ასეთი დარტყმის შემდეგ, გამოვიყენოთ მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლება

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_c}{dt} &= \vec{F}, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 82)$$

სადაც m არის სხეულის მთელი მასა, \vec{v}_c — ინერციის ცენტრის სიჩქარე, \vec{F} სხეულზე მოქმედი ძალა, ხოლო \vec{M} — ამ ძალის მომენტი ინერციის ცენტრის მიმართ. თუ ჩვენ მივიღებთ, რომ დარტყმის მოქმედების Δt დროის განმავლობაში \vec{F} ძალა მუდმივია, ეს განტოლებები ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\left. \begin{aligned} m \Delta \vec{v}_c &= \vec{F} \Delta t, \\ \Delta \vec{L} &= \vec{M} \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI}, 83)$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ დარტყმის ძალა მდებარეობს ინერციის ცენტრზე გამავალი ერთ-ერთი მთავარი ღერძის მართობ სიბრტყეში (ინერციის მთავარი სიბრტყე) (ნახ. 161). მაშინ ამ ძალის მომენტი მიმართული ექნება მთავარი ღერძის გასწვრივ და ვინაიდან ასეთივე მიმართულება ექნება იმპულსის მომენტს, (XI,83) განტოლებები შეიძლება სკალარულად დავწეროთ

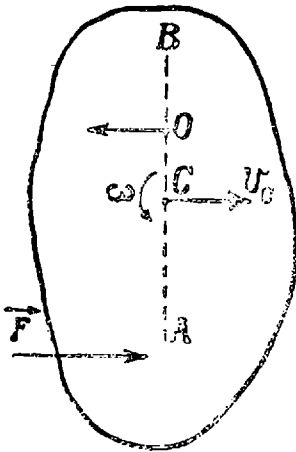
$$m\Delta v_c = F\Delta t,$$

$$I\Delta\omega = M\Delta t,$$

სადაც I არის ინერციის მომენტი მთავარი ღერძის მიმართ, ხოლო $\Delta\omega$ კუთხური სიჩქარის ცვლილება, გამოწვეული დარტყმით. თუ დარტყმამდე მყარი სხეული უძრავი იყო, მაშინ (XI,83) განტოლებები გვაძლევენ ინერციის ცენტრის სიჩქარეს და ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს დარტყმის შემდეგ

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \frac{F\Delta t}{m}, \\ \omega &= \frac{M\Delta t}{I} = \frac{F \cdot CA \cdot \Delta t}{I}, \end{aligned} \right\} \quad (XI,84)$$

სადაც CA არის F ძალის მხარი (დაშვებულია რომ ძალა მხარის მართობია). ჩვენ ვხედავთ, რომ დარტყმის გავლენით მყარი სხეული იწყებს გადატანით მოძრაობას v_c სიჩქარით და იმავე დროს ბრუნავს მთავარი ღერძის ირგვლივ ω კუთხური სიჩქარით. მოძრაობის ხასიათის უფრო



ნახ. 161.

ნათლად წარმოსადგენად გავატაროთ ძალის მოდების A წერტილზე და ინერციის ცენტრზე სწორი ხაზი (CA მხარის გაგრძელება). ნახაზი ნათლად გვიჩვენებს, რომ ამ ხაზის წერტილები გადატანით მოძრაობასთან ერთად ბრუნავენ აგრეთვე ω კუთხური სიჩქარით ისე, რომ CA მონაკვეთის წერტილებისათვის სრუნვის სიჩქარე ემატება გადატანით სიჩქარეს. ხოლო CB მონაკვეთის წერტილებისათვის აკლდება მას. ამის გამო ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება მოიქებნოს ამ ხაზზე ისეთი წერტილი, რომლის სიჩქარე იქნება ნულის ტოლი? ამის გამოსარკვევად ავარჩიოთ CB მონაკვეთზე რაიმე O წერტილი და გამოვითვალოთ მისი

თის წერტილებისათვის აკლდება მას. ამის გამო ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება მოიქებნოს ამ ხაზზე ისეთი წერტილი, რომლის სიჩქარე იქნება ნულის ტოლი? ამის გამოსარკვევად ავარჩიოთ CB მონაკვეთზე რაიმე O წერტილი და გამოვითვალოთ მისი

სრული სიჩქარე—გადატანითი და ბრუნვითი სიჩქარეების ჯამი. ვინაიდან ამ წერტილების ბრუნვითი სიჩქარე $OC \cdot \omega$ მიმართულია გადატანითი მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, სრული სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v_c - OC \cdot \omega = \frac{F\Delta t}{m} - \frac{F\Delta t \cdot CA \cdot OC}{I}$$

ან

$$v_c - OC \cdot \omega = \frac{F\Delta t}{m} \left(1 - \frac{m CA \cdot OC}{I} \right). \quad (XI,85)$$

ეს სიჩქარე ნულის ტოლი იქნება იმ შემთხვევაში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$CA \cdot OC = \frac{I}{m} = x^2, \quad (XI,86)$$

სადაც x არის ინერციის რადიუსი მთავარი ღერძის მიმართ.

როგორც ვხედავთ, თუ O წერტილს ისე ავირჩევთ, რომ შესრულებული იყოს (XI,86) პირობა, იგი არ ამოძრავდება დარტყმის შედეგად. ეს წერტილი არ განიცდის დარტყმის მოქმედებას. ძალის მოდების ყოველი A წერტილისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი O წერტილი, რომელიც უძრავი იქნება დარტყმის შემდეგ. შეიძლება დაისვას შებრუნებული ამოცანა: ამორჩეული გვაქვს O წერტილი და ვეძებთ ისეთ A წერტილს, რომ მასზე მოდებული დარტყმის ძალას არ მოჰყავდეს O წერტილი მოძრაობაში, ე. ი. არ გადასცემდეს ამ წერტილს იმპულსს. ასეთი წერტილი ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს (XI,86) პირობის გამოყენებით. მისი მანძილი ინერციის ცენტრიდან მოიძებნება შემდეგი ფორმულით:

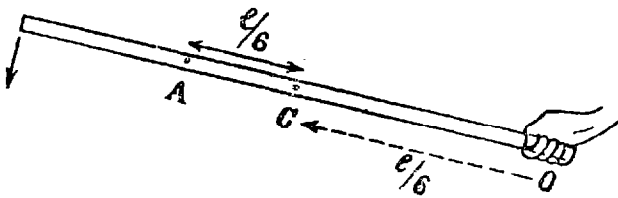
$$OC = \frac{x^2}{CA}. \quad (XI,87)$$

ამ წერტილს ეწოდება დარტყმის ცენტრი A წერტილის მიმართ.

მყარი სხეულის დარტყმის ცენტრის არსებობა ნათლად ჩანს ჩაქუჩის ან ცულის ხმარების დროს. დარტყმის დროს ადამიანის ხელი გრძნობს უსიამოვნო ბიძგს, თუ მას სახელური არ უჭირავს სათანადოდ შერჩეულ ადგილას. სწორედ ეს ადგილი ეთანადება ჩაქუჩის ან ცულის დარტყმის ცენტრს, რომელიც არ განიცდის არავითარ ბიძგს დარტყმის დროს.

მაგალითისათვის განვიხილოთ წვრილი ღერი (ნახ. 162). ვთქვათ, ჩვენ გვიჭირავს ეს ღერი ერთი ბოლოთი და გვინდა გამოვარკვიოთ,

თუ ღერის რა ადგილით უნდა ვაწარმოოთ დარტყმა, რომ ხელმა არ განიცადოს ბაძგი. ეს ნიშნავს დარტყმის ცენტრის მოძებნას ღერის ბოლო წერტილისათვის. თუ ღერის სიგრძე არის l , CO იქნება $\frac{l}{2}$, რადგანაც C ინერციის ცენტრი ღერის შუა წერტილია.



ნახ. 162.

ტილშია. როგორც ვიცით, ინერციის რადიუსის კვადრატი ღერის ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ არის $\frac{1}{12}l^2$; აქედან დარტყმის ცენტრის მანძილისათვის შუა წერტილიდან მივიღებთ

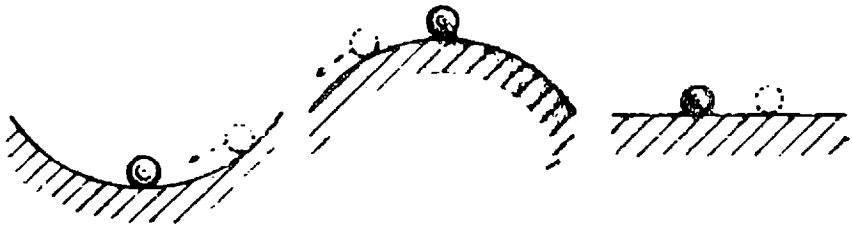
$$AC = \frac{1}{6}l.$$

ნივთიერი წარმოქმნისა და მყარი სხეულის წონასწორობა

§ 73. ნივთიერი წარმოქმნის წონასწორობის პირობები

წინა თავებში ჩვენ გამოვიყვანეთ მოძრაობის ძირითადი კანონი, რომელიც აკავშირებს მოძრაობას ურთიერთქმედებასთან. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია ურთიერთქმედების ხასიათი და საწყისი პირობები, ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა სახის მოძრაობას. ურთიერთქმედების ზოგიერთი უმნიშვნელოვანესი სახე და მათი სათანადო მოძრაობები შემდეგ თავებში იქნება განხილული, ახლა კი ჩვენ გავარჩევთ მოძრაობის მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას—წონასწორობას.

ხშირად ვხვდებით ბუნებაში ისეთ შემთხვევას, როდესაც ურთიერთქმედების არსებობის მიუხედავად ნივთიერი წერტილი ან სხეუ-



ნახ. 163.

ლი უძრავი რჩება. ასეთია, მაგალითად, ძაფზე დაკიდებული სხეულის შემთხვევა (საქანი), თუკი ძაფს ვერტიკალური მიმართულება აქვს. ასევე უძრავია მცირე ზომის ბირთვი, მოთავსებული ჩაზნექილი (ამოზნექილი) ჭურჭლის ყველაზე უფრო დაბალ (მაღალ) ადგილას ან ბრტყელ პორიზონტალურ ზედაპირზე (ნახ. 163).

ყველა ამ შემთხვევაში სხეული უძრავია და უძრავი რჩება განუსაზღვრელ დროის განმავლობაში მიუხედავად იმისა, რომ მასზე მოქმედებს როგორც დედამიწის მიზიდვის ძალა, ისე ძაფის ან ზედაპირის რეაქცია.

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა: ნივთიერი წერტილი წონასწორობაშია, თუ იგი, მოყვანილი უძრავ მდგომარეობაში, უძრავი რჩება შემდეგშიც.

ის პირობა, რომ ნივთიერი წერტილი უძრავ მდგომარეობაში უნდა იყოს, ადვილად შესასრულებელია ვინაიდან იგი დაკავშირებულია საწყისი პირობების შერჩევასთან. წონასწორობისათვის მნიშვნელოვანია მეორე პირობა, რომ ნაწილაკმა არ უნდა დაიწყოს მოძრაობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი აჩქარება ნულის ტოლი უნდა იყოს

$$\vec{a} = 0. \quad (\text{XII, 1})$$

მაშასადამე, იმის გამოსარკვევად, არის თუ არა ესა თუ ის მდებარეობა წონასწორობის მდებარეობა, შემდეგნაირად უნდა მოვიქცეთ. განსახილველი ნივთიერი წერტილი უნდა მოვათავსოთ ამ მდებარეობაში და მოვიყვანოთ იგი უძრავ მდგომარეობაში. თუ ნაწილაკი არ გამოვა უძრავი მდგომარეობიდან, ალბულის მდებარეობა იქნება წონასწორობის მდებარეობა.

გავარკვიოთ ახლა როგორი ხასიათისა უნდა იყოს ურთიერთქმედება, ე. ი. როგორი ძალები უნდა მოქმედებდნენ ნაწილაკზე ან როგორი უნდა იყოს პოტენციალური ენერჯია იმისათვის, რომ ნაწილაკი წონასწორობაში იყოს. მოძრაობის კანონების თანახმად

$$m\vec{a} = \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

სადაც \vec{F} არის ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი. ვინაიდან წონასწორობაში $\vec{a} = 0$, მივიღებთ, რომ

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (\text{XII, 2})$$

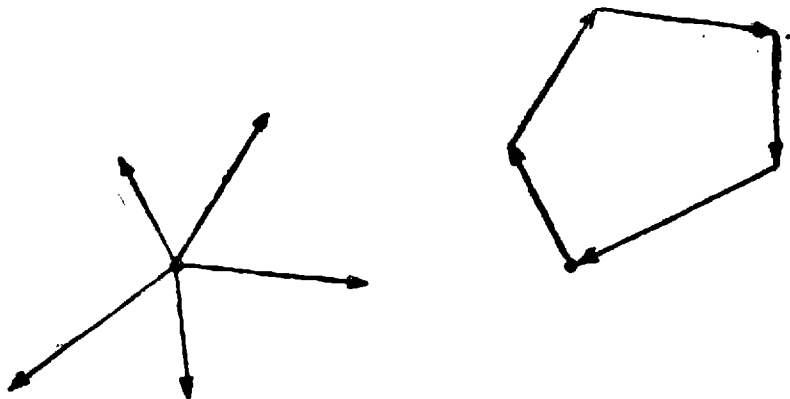
როგორც ვხედავთ, წონასწორობისათვის საჭიროა ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი იყოს ნულის ტოლი. შეიძლება გამოითქვას უებრუნებული დებულება, რომ, თუ ნაწილაკზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია, ნაწილაკი წონასწორობაში იქნება.

(XII, 2) განტოლების ლერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (\text{XII, 3})$$

ე. ი. წონასწორობისათვის საჭიროა, რომ ნულის ტოლი იყოს ყოველ ღერძზე ძალების გეგმილების ჯამი.

ძალთა ტოლქმედის ნულთან ტოლობა გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკზე მოქმედი ძალები შეკრების შედეგად უნდა ვეაძლეოდნენ ჩაკეტილ მრავალკუთხედს (ნახ. 164).



ნახ 164.

წონასწორობის პირობებს შეიძლება მივცეთ სხვა სახეც, თუ გამოვიყენებთ პოტენციალურ ენერჯიას. ვისაიდან

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = - \frac{\partial U}{\partial z},$$

წონასწორობის შემთხვევაში შემდეგი პირობები უნდა შესრულდეს.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (\text{XII, 4})$$

ე. ი. წონასწორობის მდებარეობაში პოტენციალური ენერჯიის კერძო წარმოებულები კოორდინატების მიმართ ნულის ტოლი უნდა იყოს.

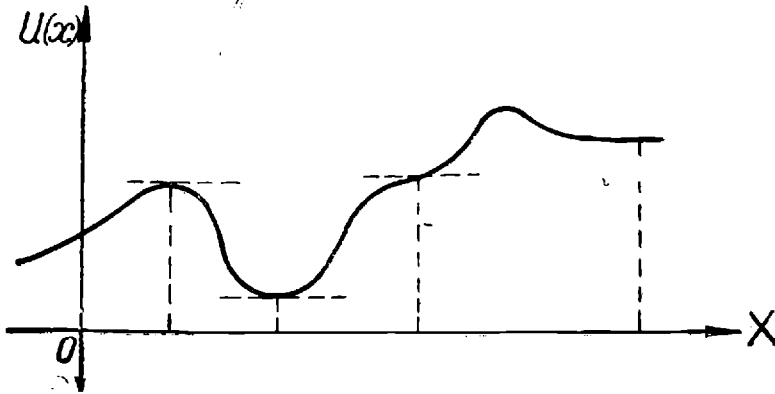
ამ პირობების მნიშვნელობის გამოსარკვევად განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს მხოლოდ OX ღერძზე. ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯია იქნება მხოლოდ x -ის ფუნქცია და (XII,4) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{dU}{dx} = 0.$$

როგორც ცნობილია ანალიზიდან, თუ ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია, ფუნქციას ამ წერტილში ექნება ან ექსტრე-

მუმი (მინიმუმი ან მაქსიმუმი), ან გადაღუნვის წერტილი, ან ფუნქცია იქნება მუდმივი ამ წერტილის მახლობლობაში.

დავხაზოთ პოტენციალური ენერგიის, როგორც x -ის ფუნქციის, გრაფიკი—ე. წ. პოტენციალური მრუდი, რომელიც ნათლად წარმოგვიდგენს პოტენციალური ენერგიის მდებარეობაზე დამოკიდებულების ხასიათს (ნახ. 165). წერტილის ყოველ მდებარეობას ეთანადება პოტენციალური ენერგიის გარკვეული მნიშვნელობა, რომელიც ამ მდებარეობის სათანადო ორდინატით გამოიხატება. მაგრამ პოტენციალური მრუდი გვაძლევს არა მარტო პოტენციალურ ენერგიას, არამედ წერტილზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობა-



ნახ. 165.

საც. ამისათვის საკმარისია მრუდის ადგილზე წერტილში გავატაროთ მხები და გავზომოთ ამ მხებით შექმნილი კუთხე OX ღერძთან. ამ კუთხის ტანგენსი, ადგილზე მინუს ნიშნით გვაძლევს ნაწილაკზე მოქმედი ძალის მნიშვნელობას. წონასწორობაში

$$\frac{dU}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

ე. ი. წონასწორობის სათანადო წერტილში მხები აბსცისთა ღერძის პარალელური უნდა იყოს. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, ამას ადგილი ექნება მაქსიმუმის, მინიმუმის ან გადაღუნვის წერტილებში, ან ისეთ ნაწილში, სადაც მრუდი აბსცისთა ღერძის პარალელურია.

§ 74. წონასწორობის სახეები

თუ დავაკვირდებით წონასწორობის მდებარეობის ზოგიერთ მოყვანილ მაგალითს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მათ შორის

მნიშვნელოვანი განსხვავება არსებობს; ეს განსხვავება დაკავშირებულია წონასწორობის მდებარეობიდან გამოყვანილი ნაწილაკის მოძრაობის ხასიათთან; მაგალითად, გადავხაროთ საქანი მისი წონასწორობის მდებარეობიდან და მივანებოთ მას თავი. ცდა გვიჩვენებს, რომ საქანი ისევ დაუბრუნდება ამ მდებარეობას. მართალია, ის კი არ დარჩება წონასწორობის მდებარეობაში, არამედ გადაიხრება მეორე მხარეს და დაიწყებს რხევას წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად, ასევე იმოძრაავებს ჩაზნექილი ჭურჭლის ყველაზე დაბალ მდებარეობაში მოთავსებული ბირთვი, გამოყვანილი ამ მდებარეობიდან. სულ სხვანაირად იმოძრაავებს ბირთვი, რომელიც ამოზნექილი ჭურჭლის ყველაზე მაღალ ადგილას იყო მოთავსებული და გამოყვანილია წონასწორობის მდებარეობიდან; ამ მდებარეობიდან გამოყვანილი ბირთვი კი არ უბრუნდება მას, არამედ განაგრძობს დაშორებას ამ მდებარეობიდან. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ბირთვი წონასწორობაშია ბრტყელ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე. თუ გამოვიყვანთ მას ამ მდებარეობიდან, იგი წონასწორობაში იქნება ახალ მდებარეობაშიც; ეს იმას ნიშნავს, რომ აღებული წონასწორობის მდებარეობის მახლობელი მდებარეობანიც აგრეთვე წონასწორულ მდებარეობას წარმოადგენენ.

ყოველივე ზემოთქმულის გამო, შეიძლება შემოვიღოთ წონასწორობის მდებარეობათა შემდეგი კლასიფიკაცია: წონასწორობა მდგრადია, თუ ამ მდებარეობიდან გამოყვანილი ნივთიერი წერტილი საკმაოდ მცირე ბიძგით ან გადახრით ისევ ამ მდებარეობას უბრუნდება.

თუ წონასწორობიდან გამოყვანილი ნივთიერი წერტილი განაგრძობს ამ მდებარეობიდან დაშორებას, წონასწორობას ეწოდება არამდგრადი.

მესამე შემთხვევაში, როდესაც წონასწორობის მახლობელი მდებარეობანი ისევ წონასწორულ მდებარეობებს წარმოადგენენ, ამბობენ, რომ წონასწორობა არის განუორჩეველი.

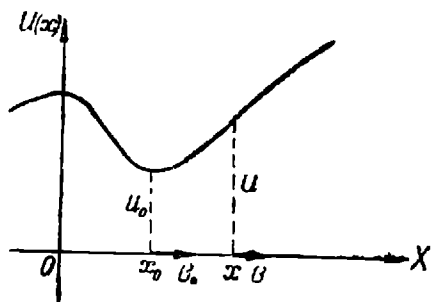
დავაკავშიროთ ახლა წონასწორობის ეს სახეები პოტენციალური მრუდის განხილვით მიღებულ პირობებთან, რომ წონასწორობის მდებარეობაში უნდა გვქონდეს მრუდის მაქსიმუმი, მინიმუმი ან აბსცისთა ღერძის პარალელური სწორხაზოვანი ნაწილი.

დავამტკიცოთ პირველ ყოვლისა, რომ პოტენციალური ენერჯიის მინიმუმს ეთანადება მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა, აღვნიშნოთ x_0 -ით მინიმუმის წერტილის სათანადო კოორდინატი (ნახ. 166). პოტენციალური ენერჯიის სათანადო მნიშვნელობა იყოს U_0 . ამ მდებარეობაში მყოფ ნაწილაკს საკმარის

სად მცირედ ვუბიძგოთ, ე. ი. მივანიჭოთ მას გარკვეული v_0 სიჩქარე და $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ კინეტიკური ენერგია. ნაწილაკის სრული ენერგია ბიძგის შემდეგ იქნება

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + U_0.$$

ვინაიდან ნაწილაკი ამოძრავებულა, იგი გარკვეული დროის შემდეგ გადავა ახალ მდებარეობაში კოორდინატით x და პოტენციალური ენერგიით $U(x)$. რადგანაც U_0 არის პოტენციალური ენერგიის მინიმალური მნიშვნელობა, ცხადია, რომ $U(x) > U_0$. მეორე მხრივ, ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად



ნახ. 166.

$$\frac{mv_0^2}{2} + U_0 = \frac{mv^2}{2} + U,$$

სადაც v არის სიჩქარე x მდებარეობაში; აქედან მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U_0 - U < 0,$$

ე. ი.

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{mv_0^2}{2};$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია შემცირდა, როდესაც იგი წონასწორობის მდებარეობიდან მეზობელ მდებარეობაში გადავიდა. მინიმალური პოტენციალური მდებარეობიდან გამოსული ნაწილაკი თანდათან ამცირებს თავის სიჩქარეს. ცხადია, რომ დადგება მომენტი, როდესაც ნაწილაკი გაჩერდება და მასზე მოქმედი ძალების გავლენით დაბრუნდება საწყის მდგომარეობაში; ეს კი ნიშნავს, რომ მინიმალური პოტენციალური ენერგიის მდებარეობას ეთანადება მდგრადი წონასწორობა. ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ პოტენციალური ენერგიის მაქსიმუმს ეთანადება არამდგრადი წონასწორობა.

მაშასადამე, თუ პოტენციალური ენერგია მინიმალურია, წონასწორობა იქნება მდგრადი, ხოლო, თუ პოტენციალური ენერგია მაქსიმალურია, წონასწორობა იქნება არამდგრადი.

ისმის კითხვა, როგორია წონასწორობა იმ შემთხვევაში, როდესაც

საც წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად პოტენციალური ენერგია უცვლელია (პოტენციალური მრუდის ჰორიზონტალური ნაწილი)? ცხადია, რომ, თუ ნაწილს გადავხრით მეზობელ მდებარეობაში, იგი დარჩება ამ მდებარეობაში, ვინაიდან პოტენციალური ენერგია არ შეცვლილა, ეს იმას ნიშნავს, რომ ყველა მეზობელი მდებარეობანი წონასწორობის მდებარეობანი იქნებიან და წონასწორობა იქნება განურჩეველი.

განსახილველი დარჩა შემთხვევა, როდესაც პოტენციალურ ენერგიის მრუდს აქვს გადაღუნვის წერტილი. გადაღუნვის წერტილი იმას ნიშნავს, რომ თვით ამ წერტილში მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია, მაგრამ ამ წერტილის ერთ მხარეს პოტენციალური ენერგია მატულობს, ხოლო მეორე მხარეს კლებულობს.

ცხადია, რომ, თუ წონასწორობის მდებარეობიდან ნაწილს გადავხრით იმ მხარეს, რომლის მიმართულებითაც პოტენციალური ენერგია კლებულობს, ნაწილს სულ უფრო დაშორდება საწყის მდებარეობას. თუ ნაწილს გადავხრით პოტენციალური ენერგიის ზრდის მიმართულებით, იგი თანდათან შეანელებს მოძრაობას, გაჩერდება, და დაუბრუნდება საწყის მდებარეობას, გადასცდება და სულ უფრო და უფრო დაშორდება მას. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაშიც წონასწორობა იქნება არამდგრადი.

§ 75. მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები

განვიხილოთ ახლა მყარი სხეულის შემთხვევა. ჩვენ ვიცით, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალები შეიძლება დავიყვანოთ ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე. თუ მარეზულტირებელ ძალას და მომენტს აღვნიშნავთ სათანადოდ \vec{F} -ით და \vec{M} -ით, მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

$$m \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$
(XII, 5)

სადაც m არის მყარი სხეულის მასა, \vec{r}_c — ინერციის ცენტრის სიჩქარე და \vec{L} — იმპულსის მომენტი. გამოვიყენოთ წონასწორობის იგივე განსაზღვრა, რაც ნივთიერი წერტილის შემთხვევაში. თუ მყარი სხეული მოყვანილია უძრავ მდგომარეობაში და იგი არ გამოდის

ამ მდებარეობიდან, ჩვენ ვიტყვით, რომ მყარი სხეული წონასწორობაშია. ვინაიდან მყარ სხეულს შეუძლია შეასრულოს გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობა წონასწორობის მდებარეობაში არც ერთი მათგანი არ უნდა დაიწყოს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ინერციის ცენტრის აჩქარება ნულის ტოლი უნდა იყოს და არ უნდა იცვლებოდეს იმპულსის მომენტი

$$\vec{a}_c = 0, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

(XII, 5) განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ ამისათვის საჭიროა გარეშე ძალების \vec{F} ჯამის და გარეშე მომენტების \vec{M} ჯამის ნულთან ტოლობა

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{M} = 0. \quad (\text{XII, 6})$$

ასეთია წონასწორობის პირობები მყარი სხეულის შემთხვევაში. პირველი პირობა ისეთივეა, როგორც წონასწორობის პირობა ნივთიერი წერტილისათვის და ამიტომ მის მიმართ შეიძლება გავიმეოროთ ყველაფერი, რაც წინა პარაგრაფში იყო ნათქვამი. ეს პირობა შეიძლება გამოისახოს პოტენციალური ენერჯიის როგორც ინერციის ცენტრის კოორდინატების ფუნქციის ექსტრემუმის პირობით. უფრო მნიშვნელოვანი და საინტერესოა მეორე პირობა, რომელიც კრძალავს უძრავი მყარი სხეულის ბრუნვის დაწყებას.

ერთი ვექტორული განტოლება

$$\vec{M} = 0$$

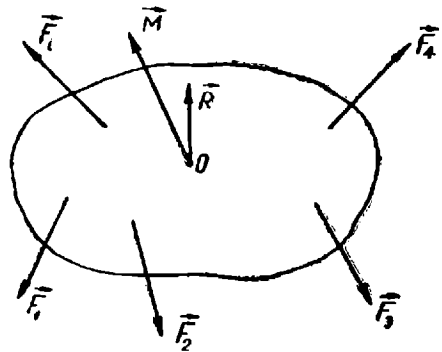
შეიძლება დაიშალოს სამ სკალარულ განტოლებად, თუ დავაგეგმილებთ მას კოორდინატთა ღერძებზე. მივიღებთ

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \quad (\text{XII, 7})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საერთო მოკენტის გეგმილები ღერძებზე ნულის ტოლი უნდა იყოს.

განვიხილოთ ზოგადი წონასწორობის პირობების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა და მაგალითი. ჩვეულებრივად პრაქტიკაში საჭიროა მყარი სხეულის წონასწორობის პირობების დადგენა იმ შემთხვევაში, როდესაც მყარი სხეული არ არის თავისუფალი, ე. ი. როდესაც მისი მოძრაობა შეზღუდულია გარეშე სხეულებით—ბმებით. ამ შემთხვევაში უშუალოდ მიღებულ ძალებს უნდა დაემატოს რეაქციის ძალები, ე. ი. ძალები, რომლებითაც გარეშე სხეულები მოქმედებენ განსახილველ სხეულზე.

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ (ნახ. 167); ასეთ სხეულს ეწოდება ბერკეტი. ვთქვათ, ბერკეტზე მოქმედებენ ღერძისადმი მართობულ სიბრტყეში მდებარე $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ძალები. გარდა ამ ძალებისა, ბერკეტზე მოქმედებს კიდევ თვით ღერძა რეაქციის \vec{R} ძალით. წონასწორობის პირობის თანახმად, მოქმედი ძალების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი:



ნახ. 167.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{R} = 0. \quad (\text{XII}, 8)$$

ეს პირობა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ რეაქციის ძალა.

წონასწორობის მეორე პირობა — ძალთა მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობა — შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0, \quad (\text{XII}, 9)$$

თუ სათავედ, რომლის მიმართაც გამოითვლება მომენტები, ავარჩევთ რეაქციის ძალის მოდების წერტილს. ვინაიდან ბერკეტზე მოქმედი ძალები მდებარეობენ ღერძის მართობ სიბრტყეში, მათი მომენტები მიმართული იქნებიან ღერძის გასწვრივ და ამიტომ (XII, 9) განტოლება შეიძლება დაიწეროს სკალარულად:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0.$$

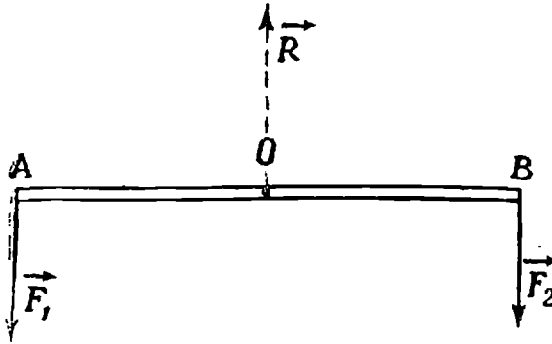
როგორც მაგალითი განვიხილოთ ჩვეულებრივი ბერკეტი, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა O ღერძის ირგვლივ და რომლის ბოლო წერტილებზე მოდებულია \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ძალები (ნახ. 168). თუ მანძილებს ძალების მოდების წერტილებიდან O წერტილამდე აღვნიშნავთ OA -თი და OB -თი, წონასწორობის პირობა მოგვცემს

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB.$$

ღერძის რეაქციის ძალისათვის კი მივიღებთ

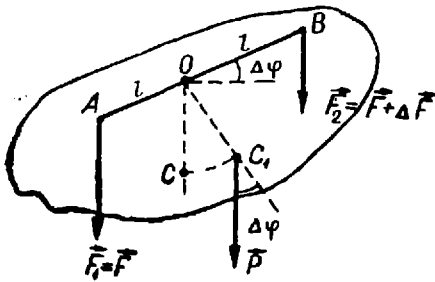
$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2);$$

ეს შედეგი მიღებულია იმ დაშვებით, რომ თვით ბერკეტს არა აქვს წონა და ამიტომ წონასწორობისათვის არა აქვს მნიშვნელობა როგორ არის მობრუნებული სხეული ღერძის ირგვლივ.



ნახ. 108.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა მძიმე ბერკეტისა, რომლის სიმძიმის ცენტრი ე. ი. წონის ძალის მოდების წერტილი არ მდებარეობს ღერძზე (ნახ. 169). თუ ღერძის O წერტილი და სიმძიმის ცენტრი — C ერთ ვერტიკალზე მდებარეობენ, წონასწორობის პირობები შემდეგი სახით დაიწერება:



ნახ. 169.

$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P})$$
 და

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB,$$

ვინაიდან როგორც რეაქციის ძალის, ისე წონის მომენტები O ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც ბერკეტის მხრები ტოლია ($OA = OB$) — ე. წ. ტოლმხრიანი სასწორის შემთხვევა. წონასწორობის პირობა იქნება

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2.$$

თუ ბერკეტის ერთ-ერთი ბოლოზე მოქმედ ძალას გავადიდებთ (რაც სასწორის შემთხვევაში ნიშნავს ერთ თეფშზე ზედმეტი ტვირთის დადებას), წონასწორობა დაირღვევა, ბერკეტი მობრუნდება და სასწორის სიმძიმის ცენტრი გადაინაცვლებს ვერტიკალიდან (ნახ. 169); ეს, თავის მხრივ, გამოიწვევს წონის ძალის მომენტის გაზრდას და წონასწორობის პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

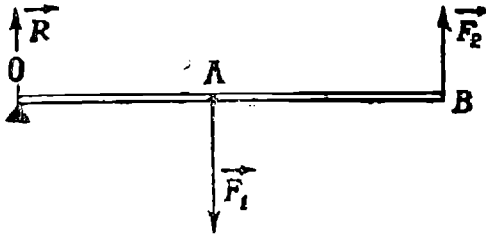
$$P' \cdot l \cos \Delta\varphi + P \cdot d \sin \Delta\varphi = (F' + \Delta F) l \cos \Delta\varphi,$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \Delta \varphi = \frac{\Delta F \cdot l}{P \cdot d}$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ბერკეტის (სასწორის) მობრუნების კუთხე ზედმეტი ტვირთის მოჭმელების შედეგად (სასწორის მგრძნობიერება).

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ წონასწორობა ბერკეტისა, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ერთ-ერთი ბოლო წერტილის მირგვლივ (ნახ. 170).



ნახ. 170.

წონასწორობის პირობები ამ შემთხვევაში შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\vec{R} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2),$$

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB.$$

რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა

§ 76. შ მ ს ა ვ ა ლ ი

ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ს ა ხ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ე ბ ს შ ო რ ი ს ე რ თ - ე რ თ ი უ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო -
 ვ ა ნ ე ს ი ა რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა . ა რ ა რ ს ე ბ ო ბ ს ბ უ ნ ე ბ ი ს თ ი თ კ მ ი ს ა რ ც
 ე რ თ ი მ ო ვ ლ ე ნ ა , რ ო მ ე ლ შ ი ც ა რ ი ლ ე ბ დ ე ს მ ო ნ ა წ ი ლ ე ო ბ ა ს მ ო ძ რ ა ო -
 ბ ი ს ე ს ს ა ხ ე . ყ ო ვ ე ლ დ ლ ი უ რ ც ხ ო ვ რ ე ბ ა ს ა და ტ ე ქ ნ ი კ ა შ ი ჩ ვ ე ნ ყ ო -
 ვ ე ლ თ ვ ი ს ვ ხ ვ დ ე ბ ი თ რ ხ ე ვ ი თ მ ო ძ რ ა ო ბ ა ს : ს ა ქ ა ნ ი ს რ ხ ე ვ ა წ ო ნ ა ს წ ო -
 რ ო ბ ი ს მ დ ე ბ ა რ ე ო ბ ი ს მ ა ხ ლ ო ბ ლ ა დ , ს ა ა თ ი ს ზ ა მ ბ ა რ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ა ,
 მ ა ნ ქ ა ნ ე ბ ი ს ნ ა წ ი ლ ე ბ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ა , დ ე დ ა მ ი წ ი ს ქ ე რ ქ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ა
 მ ი წ ი ს ძ ვ რ ე ბ ი ს დ რ ო ს , ჰ ა ე რ ი ს ბ გ ე რ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა და მ რ ა ვ ა ლ ი
 ს ხ ვ ა წ ა რ მ ო ა დ გ ე ნ ე ნ რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ს . მ ა გ რ ა მ
 მ ა რ ტ ო მ ე ქ ა ნ ი კ უ რ ი რ ხ ე ვ ე ბ ი თ ა რ ა მ ო ი წ უ რ ე ბ ა რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს
 მ რ ა ვ ა ლ ნ ა ი რ ო ბ ა . მ თ ე ლ ი ო პ ტ ი კ ა და რ ა დ ი ო ტ ე ქ ნ ი კ ა დ ა მ ყ ა რ ე ბ უ ლ ი ა
 რ ხ ე ვ ი თ ი პ რ ო ც ე ს ე ბ ი ს გ ა ნ ხ ი ლ ვ ა ხ ე .

ძ ნ ე ლ ი ა დ ა ვ ა ს ა ხ ე ლ ო თ ტ ე ქ ნ ი კ ი ს ი ს ე თ ი დ ა რ გ ი , რ ო მ ე ლ შ ი ც
 რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა ნ ი ა რ ა ს რ უ ლ ე ბ დ ნ ე ნ მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ვ ა ნ რ ო ლ ს . რ ხ ე -
 ვ ი თ ი პ რ ო ც ე ს ე ბ ი ს რ ო ლ ი ი მ დ ე ნ ა დ დ ი დ ი ა , რ ო მ ხ შ ი რ ა დ მ ა თ გ ა მ ო -
 ყ ო ფ ე ნ ც ა ლ კ ე დ ა რ გ ი ს ს ა ხ ი თ და გ ა ნ ი ხ ი ლ ა ვ ე ნ ე რ თ ა დ რ ო ვ ო რ ც მ ე ქ ა -
 ნ ი კ უ რ , ი ს ე ს ხ ვ ა ს ა ხ ი ს (ე ლ ე ქ ტ რ უ ლ , ო პ ტ ი კ უ რ) რ ხ ე ვ ე ბ ს . ყ ვ ე ლ ა
 რ ხ ე ვ ი თ ი პ რ ო ც ე ს ი ს ე რ თ ო ბ ლ ი ვ ი გ ა ნ ხ ი ლ ვ ა მ ი თ უ ფ რ ო : შ ი ზ ა ნ შ ე წ ო -
 ნ ი ლ ი ა , რ ო მ რ ო ვ ო რ ი ბ უ ნ ე ბ ი ს ა ც ა რ უ ნ დ ა ი ყ ო ს რ ხ ე ვ ა დ ი ს ი დ ი დ ე ,
 რ ხ ე ვ ა ს ა ხ ა ს ი ა თ ე ბ ს ზ ო ვ ა დ ი თ ვ ი ს ე ბ ე ბ ი ს ა ე რ თ ო დ ყ ვ ე ლ ა ს ა ხ ი ს რ ხ ე -
 ვ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს .

მ ე ო რ ე მ ი ზ ე ზ ი , რ ო მ ლ ი ს გ ა მ ო ც რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ა მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო -
 ვ ა ნ რ ო ლ ს ა ს რ უ ლ ე ბ ს ფ ი ზ ი კ ა შ ი , ი მ ა შ ი მ დ გ ო მ ა რ ე ო ბ ს , რ ო მ თ ი თ -
 კ მ ი ს ყ ო ვ ე ლ ი ს ა ხ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ა შ ე ი ძ ლ ე ბ ა გ ა ნ ვ ი ხ ი ლ ო თ რ ო ვ ო რ ც
 მ ა რ ტ ი ვ რ ხ ე ვ ი თ მ ო ძ რ ა ო ბ ა თ ა ჯ ა მ ი . რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს ე ს თ ვ ი -
 ს ე ბ ა ს ა შ უ ა ლ ე ბ ა ს გ ვ ა ძ ლ ე ვ ს დ ა ვ ი ყ ვ ა ნ ო თ რ თ უ ლ ი ს ა ხ ი ს მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს
 გ ა ნ ხ ა ლ ვ ა რ ხ ე ვ ი თ ი მ ო ძ რ ა ო ბ ი ს გ ა ნ ხ ი ლ ვ ა ხ ე და ა მ ი თ გ ა ვ ა მ ა რ ტ ი -
 ვ ო თ ს ა თ ა ნ ა დ ო მ ო ვ ლ ე ნ ი ს გ ა რ ჩ ე ვ ა .

მექანიკის კურსში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მექანიკურ რხევებს, გავარჩევთ მათ დამახასიათებელ თვისებებს, რთული სახის მექანიკური მოძრაობის დაშლას შემადგენელ მარტივ რხევებად და რხევების შეკრებას. მიღებული შედეგები, გარდა დიდი თავისთავადი მნიშვნელობისა, შემდეგში გამოიყენება სხვა ბუნების რხევების განხილვისას.

§ 77. წმინდის ჰარმონიული რხევა. ამპლიტუდა, ფაზა და სიხშირე

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სწორ ხაზზე, წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. ნაწილაკს, რომელიც წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად ირხევა, ეწოდება ოსცილატორი. ავირჩიოთ წონასწორობის წერტილი კოორდინატთა სათავედ და განვიხილოთ იმ მდებარეობიდან გადახრილი ნივთიერი წერტილის პოტენციალური ენერგია (ნახ. 171). თუ გადახრას წონასწორობის მდებარეობიდან x -ით აღვნიშნავთ, პოტენციალური ენერგია იქნება x -ის ფუნქცია. ვინაიდან O წერტილი ნაწილაკის მდგრადი წონასწორობის წერტილია, პოტენციალურ ენერგიას ექნება მინიმუმი ამ წერტილში. ჩვენ დავუშვებთ, რომ ნაწილაკი მოძრაობს წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად და შემოვისაზღვრებით იმ შემთხვევით, როდესაც გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან საკმარისად მცირეა. მაშინ პოტენციალური ენერგია შეიძლება დავშალოთ მწკრივად O წერტილის მახლობლად და ამ დაშლაში შემოვისაზღვროთ პირველი სამი წევრით

$$U(x) = U(0) + U'(0) \cdot x + U''(0) \frac{x^2}{2} + \dots \quad (\text{XIII, 1})$$

(უმალესი რიგის წევრი x -ის მიმართ იქნება კვადრატული).

მივიღოთ ახლა მხედველობაში ის გარემოება, რომ $x=0$ წერტილში არის მდგრადი წონასწორობის მდებარეობა, ე. ი. ამ წერტილში პოტენციალური ენერგია მინიმალურია, მაშინ, როგორც უკვე ვიცით,

$$U'(0) = 0 \quad \text{და} \quad U''(0) > 0.$$

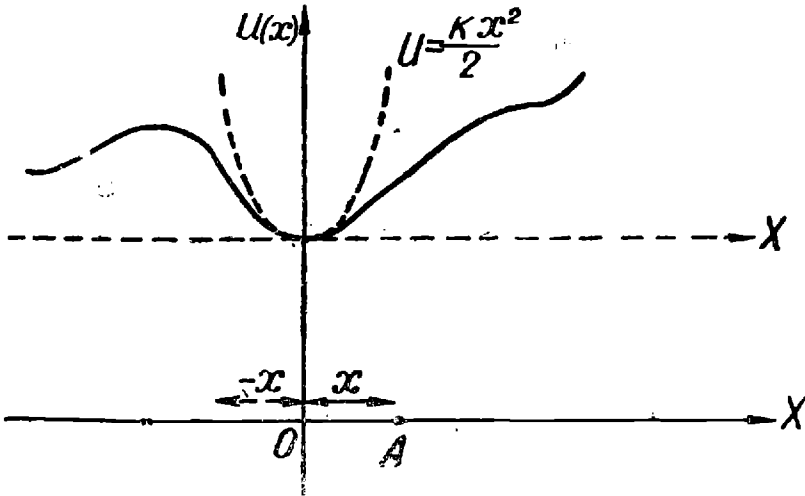
აღვნიშნოთ მეორე წარმოებულის მნიშვნელობა O წერტილში k ასოთი

$$U''(0) = k > 0, \quad (\text{XIII, 2})$$

რის შემდეგ პოტენციალური ენერჯიის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$U(x) = U(0) + \frac{kx^2}{2}. \quad (\text{XIII, 3})$$

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში შემავალი მუდმივა (ადიტიური) ნებისმიერად შეიძლება შეირჩეს, ვინაიდან მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ მდებარეობაში ითვლება პოტენციალური ენერჯია ნულის ტო-



ნახ. 171.

ლად. ჩვენ დავუშვებთ, რომ პოტენციალური ენერჯია ნულის ტოლია წონასწორობის მდებარეობაში, ე. ი. რომ $U(0) = 0$. მაშინ პოტენციალური ენერჯია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (\text{XIII, 4})$$

როგორც ვხედავთ, მცირე რხევის შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯია გადახრის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. პოტენციალური ენერჯიის ასეთ მარტივ სახემდე დაყვანა გეომეტრიულად შემდეგს ნიშნავს. პოტენციალურ მრუდს აქვს მინიმუმი წონასწორობის მდებარეობაში. ცხადია, რომ მხები, გავლებული მინიმუმის წერტილში, OX ღერძის პარალელური იქნება, რაც არის გეომეტრიული გამოხატვა იმ პირობისა, რომ $U'(0) = 0$. გარდა ამისა, მინიმუმის წერტილის მახლობლად მრუდი ამოზნექილია OX ღერძის მიმართ, რაც გეომეტრიულად ეთანადება $U''(0) > 0$ პირობას. ჩვენ მიერ მიღებული დამატებითი პირობა, რომ $U(0) = 0$,

გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ მრუდის მინიმუმის წერტილი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. ყოველივე ამის შემდეგ O წერტილის მახლობლობაში პოტენციალური მრუდის განტოლება იღებს (XIII, 4) სახეს. მაგრამ ჩვენთვის ცნობილია, რომ ეს განტოლება არის პარაბოლის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში და სიმეტრიულად არის განლაგებული ორდინატთა ღერძის მიმართ (ნახ. 171). მაშასადამე, ის გარემოება, რომ პოტენციალური ენერგია წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად (XIII, 4) ფორმულით გამოისახება, გეომეტრიულად იმის მაჩვენებელია, რომ O წერტილის მახლობლად პოტენციალური მრუდი ჩვენ შევცვალეთ პარაბოლით. რასაკვირველია, ასეთი შეცვლა მრუდისა უფრო მარტივი მრუდით შესაძლებელია იმიტომ, რომ O წერტილი არის მინიმუმის წერტილი და ჩვენ შემოვისას ღერძით მრუდის მცირე ნაწილით.

მას შემდეგ, რაც გამოთვლილია რხევადი ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია, ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ ძალა. ამისათვის საკმარისია გავაწარმოთ $U(x)$ კოორდინატის მიმართ, მივიღებთ:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (\text{XIII, 5})$$

როგორც ვხედავთ, რხევად ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გადახრის პირდაპირპროპორციულია და მიმართულია ამ გადახრის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. წონასწორობის მდებარეობისაკენ. ოსცილატორს, რომლის პოტენციალური ენერგია გადახრის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია, ეწოდება ჰარმონიული ოსცილატორი. ახლა უკვე ადვილია რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის დინამიკური განტოლების, ე. ი. ნიუტონის მეორე კანონის დაწერა

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (\text{XIII, 6})$$

და შევეცადოთ ამოვხსნათ იგი, ე. ი. მოვძებნოთ გადახრა როგორც დროის ფუნქცია. ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (XIII, 6) განტოლებას შემდეგი ამონახსნი აქვს:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (\text{XIII, 7})$$

სადაც A , ω_0 და φ_0 მუდმივი სიდიდეებია. გამოვარკვიოთ, რა მნიშვნელობები უნდა ჰქონდეთ ამ სიდიდეებს, რომ დაკმაყოფილდეს (XIII, 6) განტოლება. (XIII, 7) განტოლების ორჯერ გაწარმოება მოგვცემს

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII, 8})$$

(XIII, 8) გამოსახულების ჩასმა (XIII, 6) ფორმულაში გვადლევს
 $-mA \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -kA \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

შეკვეცა $A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ -ზე მოგვცემს

$$m \omega_0^2 = k.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ (XIII, 7) გამოსახულება მხოლოდ იმ შემთხვევაში დააკმაყოფილებს მოძრაობის განტოლებას, თუ

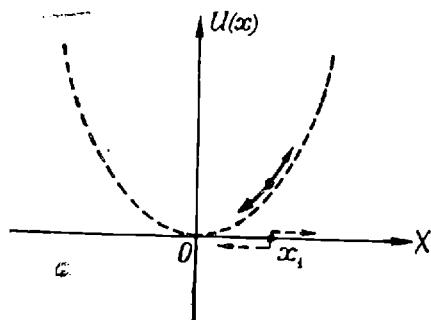
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (\text{XIII, 9})$$

A და φ_0 მუდმივა არ განისაზღვრებიან მოძრაობის განტოლებიდან, ვინაიდან როგორი მნიშვნელობაც არ უნდა ჰქონდეთ მათ (XIII, 7) გამოსახულება ყოველთვის დააკმაყოფილებს (XIII, 6) განტოლებას. ამ სიდიდეების მოძებნა შესაძლებელი იქნება მხოლოდ საწყისი პირობების გამოყენებით. მაშასადამე, ჰარმონიული ოსცილატორის რხევა აიწერება შემდეგი განტოლებით:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

როგორც ეს ფორმულა გვიჩვენებს, ნაწილაკის მოძრაობა პერიოდულია, ვინაიდან სინუსი არის არგუმენტის პერიოდული ფუნქცია. ვიპოვოთ მოძრაობის ან რხევის პერიოდი, ე. ი. უმცირესი დრო, რომლის შემდეგ ნაწილაკი უბრუნდება წინანდელ მდგომარეობას. ამ განსაზღვრაში ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ ნაწილაკი საჭიროა დაუბრუნდეს წინანდელ მდგომარეობას და არა მდებარეობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნაწილაკმა უნდა მიიღოს როგორც წინანდელი მდებარეობა, ისე სიჩქარე. 172-ე ნახაზზე ნაჩვენებია საწყისი მდგომარეობა (ნაწილაკი გადახრილია მარჯვნივ x_1 მანძილით და მისი სიჩქარე მიმართულია აგრეთვე მარჯვნივ, ე. ი. ნაწილაკი შორდება წონასწორობის მდებარეობას). 172-ე ნახაზზე ნაჩვენებია აგრეთვე მდგომარეობა, რომელიც მიიღება მას შემდეგ, რაც ნაწილაკმა მიაღწია უდიდეს გადახრას და უკან დაბრუნებისას ისევ გაიარა x_1 წერტილზე. ნაწილაკს იგივე მდებარეობა უკავია, რაც საწყის მომენტში, მაგრამ

მდგომარეობა იგივე არ არის, ვინაიდან მისი სიჩქარე მიმართულია მარცხნივ, ე. ი. ნაწილაკი უხლოვდება წონასწორობის მდებარეობას. იმისათვის, რომ მდგომარეობა ისეთივე იყოს, როგორც საწყის მომენტში, საჭიროა, რომ ნაწილაკმა მიიღოს წინანდელი მდებარეობა და სიჩქარე. ამისათვის კი საჭიროა, რომ \sin -ის არგუმენტი შეიცვალოს 2π -ს ჯერადით. ვინაიდან ჩვენ ვეძებთ უმცირეს დროს, რომლის შემდეგაც ნაწილაკი უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, არგუმენტი უნდა შეიცვალოს 2π სიდიდით. აღვნიშნოთ რხევის პერიოდი T_0 ასოთი. მაშინ პირობის თანახმად მივიღებთ



ნახ. 172.

$$\sin(\omega_0(t + T_0) + \varphi_0) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

ე. ი.

$$\omega_0(t + T_0) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi,$$

საიდანაც პერიოდისათვის ვღებულობთ

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (\text{XIII, 10})$$

T_0 -ის საშუალებით რხევის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right).$$

რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის პერიოდულობის დასახასიათებლად იხმარება აგრეთვე მეორე სიდიდე — სიხშირე. ეს სიდიდე გვიჩვენებს, თუ რამდენ სრულ რხევას ასრულებს ნაწილაკი დროის ერთეულის (ჩვეულებრივად, ერთი სექუნდის) განმავლობაში. სრული რხევა ეწოდება მოძრაობას ორ თანამომდევნო ერთნაირ მდგომარეობათა შორის. ვინაიდან ერთი სრული რხევა T_0 დროის განმავლობაში ხდება, რხევათა რიცხვისათვის დროის ერთეულში, ე. ი. სიხშირისათვის მივიღებთ

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (\text{XIII, 11})$$

ახლა უკვე ადვილია ω_0 სიდიდის ფიზიკური მნიშვნელობის გამოკვება, ვინაიდან

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0. \quad (\text{XIII, 12})$$

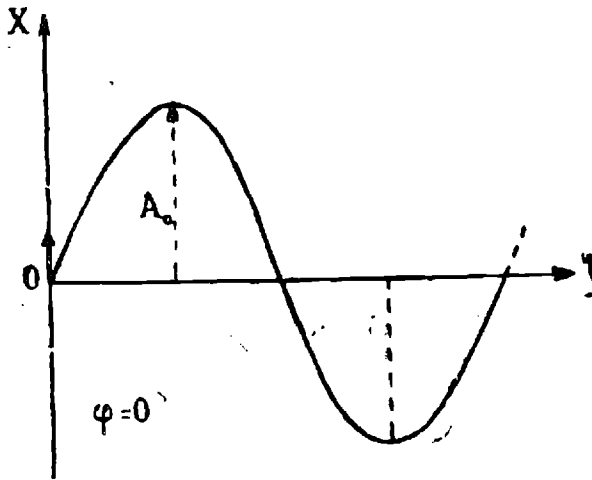
ω_0 ყოფილა რხევათა რიცხვი 2π სეკუნდში. მას ეწოდება წრიული, ანუ კუთხური სისშირე. გამოვარკვეით ახლა რა ფიზიკური აზრი აქვთ A და φ_0 სიდიდეებს და როგორ არიან ისინი დაკავშირებული საწყის პირობებთან. ვინაიდან \sin -ის უდიდესი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, გადახრის, ე. ი. x -ის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება A_0 . მაშასადამე, A_0 ყოფილა რხევადი ნაწილაკის უდიდესი გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან. მას ეწოდება რხევის ამპლიტუდა.

ცხრილი 6

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	0	A_0	0	$-A_0$	0

შევადგინოთ ცხრილი და გრაფიკი (ნახ. 173), რომლებიც ნათლად წარმოგვიდგენენ კავშირს დროსა და გადახრას შორის. მივიღოთ სიმარტივისათვის, რომ $\varphi_0 = 0$.

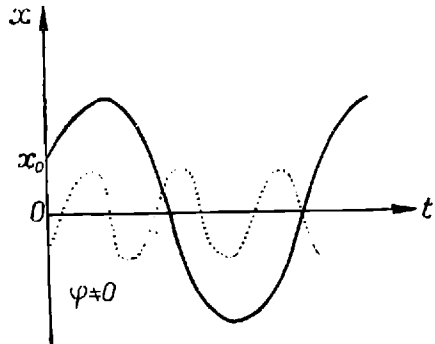
შევადგინოთ ცხრილი და გრაფიკი (ნახ. 173), რომლებიც ნათლად წარმოგვიდგენენ კავშირს დროსა და გადახრას შორის. მივიღოთ სიმარტივისათვის, რომ $\varphi_0 = 0$.



ნახ. 173.

თუ თვალყურს ვადევნებთ ნაწილაკის მოძრაობას ერთი პერიოდის განმავლობაში (შემდეგ პერიოდებში მოძრაობა მეორდება), შემდეგ სურათს მივიღებთ ($\varphi_0 = 0$). საწყის მომენტში ნაწილაკი წონასწორობის მდებარეობაში იმყოფება. საწყისი სიჩქარის გამო, იგი გადაიხრება დადებითი x -ისაკენ და პერიოდის მეოთხედის შემდეგ მიაღწევს უდიდეს გადახრას ($x = A_0$). ამის შემდეგ ნაწილაკი იცვლის მოძრაობის მიმართულებას, უახლოვდება წონასწორობის მდებარეობას და $\frac{T_0}{2}$ მომენტში, ე. ი. მოძრაობის დაწყებიდან ნახევარი პერიოდის შემდეგ, ისევ გაივლის ამ მდებარეობაზე მხოლოდ მისი საჩქარე მიმართული იქნება საწინააღმდეგო მიმართუ-

ლებით. შემდეგ წერტილი ისევ გადაიხრება წონასწორობიდან (უარყოფითი x -ების მხარეს) და $\frac{3}{2}T_0$ მომენტში მიაღწევს უდიდეს გადახრას მარცხნივ ($x_0 = -A_0$). ამის შემდეგ მოძრაობის მიმართულება ისევ შეიცვლება, წერტილი დაიწყებს მიახლოებას წონასწორობის მდებარეობასთან და T_0 მომენტში, ე. ი. ერთი სრული პერიოდის შემდეგ, ისევ გაივლის საწყის მდებარეობაზე. ამის შემდეგ მოძრაობა გამეორდება ისე, როგორც პირველ პერიოდში და ა. შ.



ნახ. 174.

174-ე ნახაზზე გრაფიკულად წარმოდგენილია გადახრის ცვლილება დროის მიხედვით. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია დრო, ხოლო ორდინატთა ღერძზე—გადახრა. ახლა ადვილად შეიძლება გამოვარკვიოთ φ_0 -ის მნიშვნელობა. თუ φ_0 ნული არ არის, მაშინ მოძრაობის განტოლებიდან

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

ცხადია, რომ საწყის მომენტში ნაწილაკი არ იმყოფება წონასწორობის მდებარეობაში, იგი გადახრილია ამ მდებარეობიდან შემდეგი მანძილით:

$$x_0 = A \sin \varphi_0.$$

როგორც ვხედავთ, φ_0 საზღვრავს რხევადი ნაწილაკის საწყის გადახრას ან საწყის მდებარეობას, ისე როგორც სიდიდე

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (\text{XIII, 13})$$

საზღვრავს გადახრას t მომენტში. \sin -ის არგუმენტს, ე. ი. (XIII, 13) სიდიდეს, ეწოდება რხევის ფაზა, ხოლო მის მნიშვნელობას საწყისი მომენტისათვის—საწყისი ფაზა. უნდა მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ ნაწილაკის გადახრა არ საზღვრავს ცალსახად რხევის ფაზას, ვინაიდან მოცემულ გადახრას ეთანადება ფაზის უამრავი მნიშვნელობა, განსხვავებული ერთმანეთისაგან 2π -ს ჯერადი სიდიდით. ვთქვათ, რომელიღაც t მომენტში ფაზა არის φ . ცხადია, რომ ერთი პერიოდის გავლის შემდეგ ფაზას მოემატება 2π , მაგრამ ნაწილაკის გადახრა იგივე იქნება, რაც პირველ მომენტში, ამიტომაც ჩვენ არ განვასხვავებთ ერთმანეთისაგან ფაზების

მნიშვნელობებს, რომლებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π სი-
დიდით და შემდეგში ჩავთვლით, რომ ამ შემთხვევაში ნაწილაკი
ერთსა და იმავე ფაზაში იმყოფება; ეს იმას ნიშნავს, რომ ფაზის
მნიშვნელობანი შეზღუდული იქნებიან პირობით

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

თუ ნაწილაკის ორი მდგომარეობის ფაზების სხვაობა არის $n\pi$ (სადაც
 n კენტი რიცხვია), ამბობენ რომ ამ მდგომარეობებს საწინააღმდე-
გო ფაზები ეთანადება. ეს სახელწოდება იმასთან არის დაკავშირე-
ბული, რომ ასეთ შემთხვევაში სათანადო გადახრები ტოლი და სა-
წინააღმდეგოდ მიმართული არიან. თუ ფაზების სხვაობა არის
 $2\pi n$, სადაც n მთელი რიცხვია, ამბობენ რომ ფაზები ერთნაირია.
ნახაზებზე მოყვანილია სხვადასხვა საწყისი ფაზის, ამპლიტუდისა
და სიხშირის მქონე რხევების გრაფიკები.

გამოვარკვეით ახლა როგორ არიან ამპლიტუდა და საწყისი
ფაზა დაკავშირებული საწყისი პირობებთან. როგორც ვიცით, საწყ-
ისი პირობები ჩვეულებრივად განისაზღვრებიან კოორდინატისა
და სიჩქარის მნიშვნელობით საწყისი მომენტისათვის. დავუშვათ,
რომ $t = 0$ მომენტში კოორდინატი (გადახრა) იყო x_0 , ხოლო სი-
ჩქარე v_0 , მაშინ ადვილად მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \sin \varphi_0, \\ v_0 &= A \omega_0 \cos \varphi_0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII, 14})$$

აქედან შეიძლება ვიპოვოთ ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა საწყისი
გადახრისა და სიჩქარის საშუალებით

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}, \quad (\text{XIII, 15})$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (\text{XIII, 16})$$

განვიხილოთ მარტივი მაგალითები: თუ ნაწილაკი საწყის მომენტში
წონასწორობის მდებარეობაში იყო ($x_0 = 0$) და მინიჭებული ჰქონ-
და საწყისი სიჩქარე v_0 (ე. ი. ნაწილაკი მოყვანილი იყო რხევაში
ბიძგით), საწყისი ფაზისა და ამპლიტუდისათვის მივიღებთ

$$\varphi_0 = 0,$$

$$A = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

შეიძლება რხევა აღიძრას შემდეგნაირადაც. ნაწილაკს გადაეხრით x_0 მანძილით წონასწორობის მდებარეობიდან და არავითარ ბიძგს არ მივცემთ ($v_0=0$); ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$\varphi_0 = \pi,$$

$$A = x_0.$$

ასევე შეიძლება გაირჩეს ყველა სხვა შემთხვევა.

ზოგ შემთხვევაში ხელსაყრელია რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების წარმოდგენა ისეთი სახით, რომ ნათლად ჩანდეს მოძრაობის კავშირი საწყისი პირობებთან; ამისათვის მოძრაობის განტოლებაში შემავალი სინუსი დავშალოთ როგორც ორი კუთხის ჯამის სინუსი. მივიღებთ

$$x = A \sin \omega_0 t \cdot \cos \varphi_0 + A \cos \omega_0 t \sin \varphi_0.$$

მაგრამ (XIII, 14) განტოლებების თანახმად $A \cos \varphi_0$ და $A \sin \varphi_0$ შეიძლება გამოვსახოთ საწყისი კოორდინატისა და სიჩქარის საშუალებით

$$A \sin \varphi_0 = x_0,$$

$$A \cos \varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

ჩასმა წინა განტოლებაში მოგვცემს

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (\text{XIII, 17})$$

რხევის განტოლების ამ სახის მოხერხებულობა იმაშია, რომ იგი ნათლად გვიჩვენებს მოძრაობის ხასიათს სხვადასხვა საწყისი პირობის შემთხვევაში.

§ 78. ჰარმონიული ოსცილატორის სიჩქარე, აჩქარება და ენერგია

რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლების გაწარმოებით ადვილად ვიპოვით მის სიჩქარესა და აჩქარებას, როგორც დროის ფუნქციებს. სიჩქარისათვის გვექნება

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (\text{XIII, 18})$$

ხოლო აჩქარებისათვის

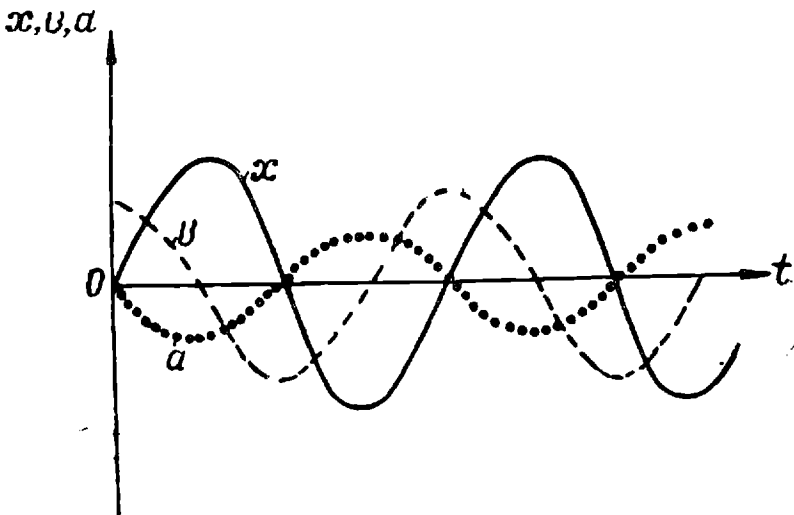
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (\text{XIII, 19})$$

მიღებული ფორმულების ანალიზისათვის და x -ის ფორმულასთან შედარებისათვის ხელსაყრელი იქნება, თუ მათ გადავწერთ ისე, რომ ორივე ფორმულა შეიცავდეს \sin -ს და დადებით ამპლიტუდას; ამისათვის, სათანადოდ უნდა შევცვალოთ \cos -ისა და \sin -ის არგუმენტები, მივიღებთ:

$$v = A_0 \omega_0 \sin \left((\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \right), \quad (\text{XIII, } 18')$$

$$a = A_0 \omega_0^2 \sin (\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (\text{XIII, } 19')$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სიჩქარე და აჩქარება ისეთივე პერიოდული ფუნქციებია დროისა, როგორც გადახრა. განსხვავება არის მხოლოდ საწყის ფაზებში და \sin -ის წინ მდგომ კოეფიციენტებში. (XIII, 18') ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა, ე. ი. სიჩქარის ამპლიტუდა არის $A \omega_0$, ხოლო მისი საწყისი ფაზა განსხვავდება გადახრის საწყისი ფაზისაგან $\frac{\pi}{2}$ სიდიდით. აჩქარების ამპლიტუდა (უდიდესი მნიშვნელობა) არის $A \omega_0^2$, ხოლო ფაზა π სიდიდით მეტია, ვიდრე გადახრის საწყისი



ნახ. 175.

ფაზა. (175-ე) ნახაზზე მოყვანილია გადახრის, სიჩქარისა და აჩქარების გრაფიკები ($\varphi_0 = 0$) შემთხვევისათვის. როგორც ვხედავთ, სიჩქარე წინ უსწრებს გადახრას პერიოდის მეოთხედით, ხოლო აჩქარება კი პერიოდის ნახევრით; მაგალითად, როდესაც გადახრა ნულია, ე. ი. წერტილი გადის წონასწორობის მდებარეობაზე, მა-

შინ სიჩქარე მაქსიმალურია, ხოლო უდიდესი გადახრის მდებარეობაში სიჩქარე ნულის ტოლია. აჩქარება იცვლება. ისე, როგორც გადახრა, მხოლოდ მიმართულება აქვს საწინააღმდეგო.

გამოვივალთ ახლა რხევადი ნაწილაკის კინეტიკური, პოტენციალური და სრული ენერგიები და გამოვარკვიოთ როგორ იცვლებიან ისინი რხევის დროს. კინეტიკური ენერგიისათვის გვექნება

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

ხოლო პოტენციალური ენერგიისათვის

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

სრული ენერგიისათვის მივიღებთ

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (\text{XIII, 20})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები დროის პერიოდული ფუნქციებია, მხოლოდ მათი პერიოდი არის რხევის პერიოდის ნახევარი $\frac{T_0}{2}$, ვინაიდან

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\},$$

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\}.$$

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ $\varphi_0 = 0$, მაშინ საწყის მომენტში ($t=0$) ნაწილაკს ექნება მხოლოდ კინეტიკური ენერგია $E_k = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$

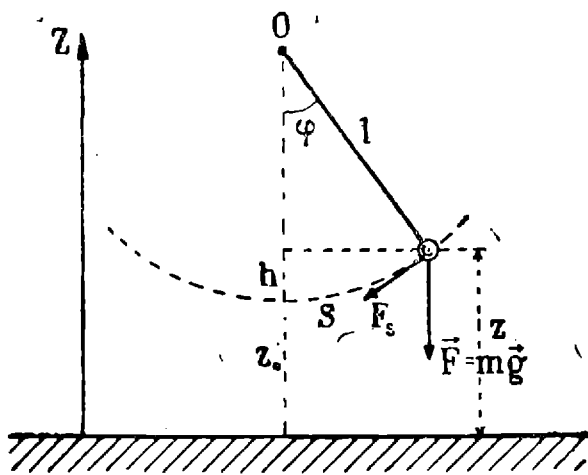
(ნაწილაკი უდიდესი სიჩქარით გადის წონასწორობის მდებარეობაზე). რაც უფრო შორდება ნაწილაკი 0 წერტილს, მით უფრო მცირდება კინეტიკური ენერგია და მატულობს პოტენციალური ენერგია. პერიოდის მეოთხედის შემდეგ (უდიდესი გადახრისას) კინეტიკური ენერგია ნული გახდება, ხოლო პოტენციალური ენერგია მიაღწევს მაქსიმუმს $E_k = 0$, $U = \frac{kA^2}{2}$. ცხა-

დია, რომ ეს მაქსიმალური პოტენციალური ენერგია საწყისი კინეტიკური ენერგიის ტოლი იქნება. პერიოდის მეორე მეოთხედში მოხდება შებრუნებული პროცესი. პოტენციალური ენერგია შემცირდება და მის ხარჯზე გაიზრდება კინეტიკური ენერგია. ჩვენ

ეხედავთ, რომ რხევის დროს წარმოებს პოტენციალური და კინეტიკური ენერგიების ერთმანეთში გადასვლა, რასაკვირველია, იმ შესლუღვით, რომ სრული ენერგია მუდმივი რჩება.

§ 79. მათემატიკური საქანი

როგორც მაგალითი რხევითი მოძრაობისა, განვიხილოთ ე. წ. მათემატიკური საქანი. ვთქვათ, m მასის სხეული დაკიდებულია ძაფის ან წვრილი ღეროს საშუალებით, რომელიც დამაგრებულია O წერტილში (ნახ. 176). ავარჩიოთ იმდენად მცირე ზომის სხეული, რომ შეიძლება მისი ნივთიერ წერტილად ჩათვალოს. გარდა ამისა, მივიღოთ, რომ ძაფის ან ღეროს გაჭიმვა ან დეფორმაცია არ ხდება და მათი მასა იმდენად მცირეა, რომ იგი შეიძლება უგულებელვუყვაოთ. ამ პირობებში m მასის ნივთიერ წერტილს, რო-



ნახ. 176.

მელსაც შეუძლია რხევა ვერტიკალური წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად, ეწოდება მათემატიკური საქანი.

გადავხაროთ საქანი წონასწორობის მდებარეობიდან φ კუთხით და გავუშვათ ხელი. ცხადია, რომ სიმძიმის ძალის გავლენით იგი დაიწყებს რხევას O წერტილის მახლობლად; ამ რხევის ხასიათის დასადგენად გამოვითვალოთ მისი პოტენციალური ენერგია გადახრილ მდგომარეობაში. ვინაიდან h სიმაღლეზე მყოფი სხეულის პოტენციალური ენერგია არის mgh , φ კუთხით გადახრილი საქანის პოტენციალური ენერგია იქნება

$$U = mg(z_0 + z) = U_0 + mgz,$$

სადაც $U_0 = mgz_0$ არის პოტენციალური ენერგია წონასწორობის

შდებარეობაში, ხოლო z — აწევის სიმაღლე. ნახაზიდან ადვილად ვიპოვიით, რომ

$$z = l(1 - \cos \varphi),$$

სადაც l არის საქანის სიგრძე. თუ შემოვიღებთ რკალის s სიგრძეს, ეს ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$z = l \left(1 - \cos \frac{s}{l} \right);$$

აქედან პოტენციალური ენერგიისათვის გვექნება

$$U = U_0 + mgl \left(1 - \cos \frac{s}{l} \right).$$

შემოვისაზღვროთ მცირე რხევებით, ე. ი. დაუშვათ, რომ s გადახრა ძალიან მცირეა საქანის l სიგრძესთან შედარებით $\left(\frac{s}{l} \ll 1 \right)$. \cos -ის დაშლა მწკრივად მოგვცემს

$$U = U_0 + \frac{mgl}{2} \frac{s^2}{l^2} + \dots \approx U_0 + \frac{mg}{2l} s^2 \quad (\text{XIII, 21})$$

ჩვენ შემოვისაზღვრეთ კვადრატული წევრით); აქედან ძალისათვის მივიღებთ:

$$F_s = - \frac{\partial U}{\partial s} = - m \frac{g}{l} s.$$

მოძრაობის განტოლება s რკალისათვის იქნება

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - m \frac{g}{l} s. \quad (\text{XIII, 22})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ საკმაოდ მცირე რხევებისათვის პოტენციალური ენერგია პროპორციულია გადახრის კვადრატისა, ხოლო ძალა პროპორციულია გადახრისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. უნდა გვახსოვდეს, რომ F_s არის ძალის გეგმილი რკალის გასწვრივ და არა მთელი ძალა, რომელიც მოქმედებს m მასის ნაწილაკზე. ვერტიკალურად ქვევით მიმართული ეს საერთო ძალა — mg შეიძლება დაიშალოს ორ მდგენლად. ერთი მათგანი — F_s მიმართულია რკალის გასწვრივ და იწვევს მოძრაობას, მეორე კი, მიმართული ძაფის გასწვრივ, ისპობა მისი რეაქციით.

მიღებული ფორმულების შედარება წრფივი რხევითი მოძრაობის ფორმულებთან გვიჩვენებს მათ სრულ მსგავსებას; განსხვავება მხო-

ლოდ იმაშია, რომ x -ის მაგიერ დგას რკალის სიგრძე s და k კოეფიციენტის მაგიერ — გამოსახულება $m \frac{g}{l}$. ამიტომაც შეიძლება გამოვიყენოთ წინათ მიღებული შედეგები. მოძრაობის განტოლება იქნება

$$s = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad k = m \omega_0^2 = m \frac{g}{l},$$

ხოლო სიხშირისათვის მივიღებთ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad (\text{XIII, 23})$$

აქედან რხევის პერიოდისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (\text{XIII, 24})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მცირე რხევების შემთხვევაში საქანი ასრულებს სინუსოიდურ რხევას, რომლის პერიოდი არ არის დამოკიდებული საქანის მასაზე და ამპლიტუდაზე. დამოუკიდებლობა მასისაგან საქანის საერთო თვისებაა (m შეიძლება შეიკვეცოს (XIII, 22) განტოლებაში), ხოლო დამოუკიდებლობა ამპლიტუდისაგან კი მართებულია მხოლოდ მცირე რხევებისათვის. თუ რხევის ამპლიტუდა იმდენად დიდია, რომ აღარ შეიძლება შემოვივსაზღვროთ კვადრატული წევრით პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში, პერიოდი დამოკიდებული იქნება ამპლიტუდაზე. მათემატიკური საქანის მცირე რხევების პერიოდის დამოუკიდებლობას ამპლიტუდისაგან ეწოდება რხევის იზოქრონიზმი. იგი სირველად შემჩნეული იყო გალილეის მიერ ტაძარში ჩამოკიდებული ჭადის რხევაზე დაკვირვების დროს.

საქანის რხევის განტოლების ამოხსნა სასრული (არამცირე) რხევის შემთხვევაში საკმარისად რთული ამოცანაა. ჩვენ მოვიყვანთ მიახლოებით ფორმულას იმ შემთხვევისათვის, როდესაც პოტენციალური ენერჯიის გამოსახულებაში შენარჩუნებულია მესამე ხარისხის წევრი. პერიოდისათვის ფორმულა ასეთია:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right), \quad (\text{XIII, 25})$$

სადაც α_0 არის კუთხური ამპლიტუდა, ე. ი. უდიდესი გადახრის სათანადო კუთხე; აქედან ადვილად ვიპოვიოთ, რომ შემასწორებელი

წევრი $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}$ აღწევს ერთ მეათასედს, როდესაც კუთხური ამპლიტუდა დაახლოებით 7° -ია. მისაღებია თუ არა მხედველობაში ეს შესწორება, დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი სიზუსტით ვითვლით პერიოდს.

§ 80. მიღვევადი რხევა. ლოგარითმული დეკაიმენტი

ზემოთ ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ ყოველ მექანიკურ მოძრაობას თან სდევს დისიპაციური პროცესი (ხახუნი), რომელიც იწვევს მექანიკური ენერგიის გარდაქმნას სითბურ ენერგიად. წონასწორობის მახლობლად რხევის შემთხვევაშიც აუცილებლად იქნება გარემოს წინააღმდეგობით, დეფორმაციით და სხვა მიზეზებით გამოწვეული ხახუნი.

დავუშვათ, რომ ხახუნის ძალა პირდაპირპროპორციულია სიჩქარისა და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ, მაშინ რხევადი ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება შემდეგი სახით დაიწერება:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}. \quad (\text{XIII, 26})$$

გავყოთ ეს განტოლება m -ზე და შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\gamma}{2m} = \delta, \quad (\text{XIII, 27})$$

სადაც ω_0 არის რხევის სიხშირე ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში. δ სიდიდეს ეწოდება მიღვევის კოეფიციენტი. (XIII, 26) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

ვენახოთ ახლა, ხომ არ შეიძლება ისეთი გარდაქმნის მოხდენა, რომ გარდაქმნილ განტოლებაში არ შევიდეს პირველი წარმოებულის მოვახდინოთ ამისათვის შემდეგი ჩასმა:

$$x = ye^{\lambda t},$$

სადაც y ახალი ცვლადია, ხოლო λ მუდმივი სიდიდეა. გაწარმოებო მოგვცემს

$$\frac{dx}{dt} = e^{\lambda t} \frac{dy}{dt} + \lambda e^{\lambda t} y; \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = e^{\lambda t} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\lambda e^{\lambda t} \frac{dy}{dt} + \lambda^2 e^{\lambda t} y.$$

მოძრაობის განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ

$$\left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2(\lambda + \delta) \frac{dy}{dt} + (\lambda^2 + 2\lambda\delta + \omega_0^2) y \right\} e^{\lambda t} = 0.$$

ეს განტოლება შეიძლება შევკვეცოთ $e^{\lambda t}$ სიდიდესზე, რომელიც არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. გარდა ამისა, ვინაიდან λ ნებისმიერი სიდიდეა, ყოველთვის შეიძლება მისი ისე შერჩევა, რომ პირველი წარმოებულის წინ მდგომი კოეფიციენტი გახდეს ნულის ტოლი; ამისათვის საჭიროა დავუშვათ, რომ

$$\lambda = -\delta. \quad (\text{XIII, 27})$$

მაშინ y -ისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\omega_0^2 - \delta^2) y = 0. \quad (\text{XIII, 28})$$

ამ განტოლებას ისეთივე სახე აქვს, როგორც განტოლებას მარტივი რხევისათვის ხახუნის გარეშე. ერთადერთი განსხვავება იმაშია, რომ ω_0^2 -ის მაგიერ დგას სიდიდე $\omega_0^2 - \delta^2$. აქ შესაძლებელია სამი სხვადასხვა შემთხვევა. შეიძლება ω_0 იყოს მეტი, ვიდრე δ . მაშინ $\omega_0^2 - \delta^2$ დადებითი იქნება და ამიტომაც (XIII, 28) განტოლების ამოხსნა შეიძლება ისევე, როგორც მოძრაობის განტოლების ხახუნის გარეშე. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამონახსნს ექნება ისეთივე სახე, როგორც ამონახსნს რხევისათვის ხახუნის გარეშე, მხოლოდ ω სიხშირისათვის გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (\text{XIII, 29})$$

მაშასადამე, y -ისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$y = A_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{სადაც } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

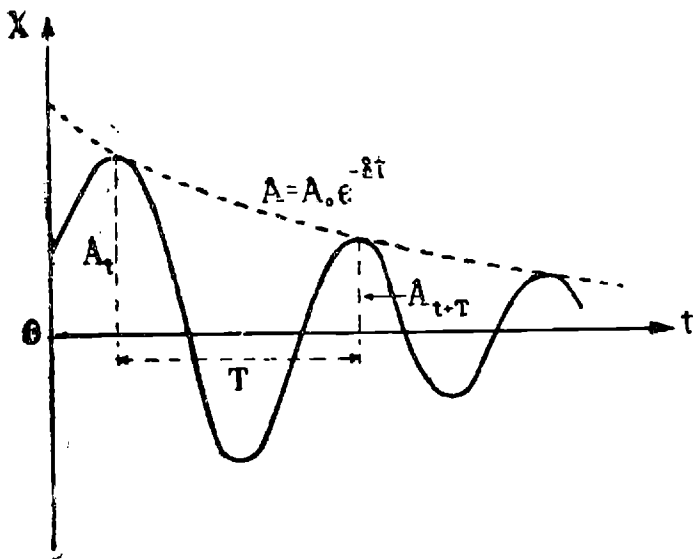
ჩასმა (XIII, 28) განტოლებაში და λ სიდიდის მნაშენელობის გამოყენება გვაძლევს

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi). \quad (\text{XIII, 30})$$

ასეთია რხევის განტოლება ხახუნის არსებობის შემთხვევაში. ზუსტად რომ ვთქვათ, ეს მოძრაობა არ არის პერიოდული, ვინაიდან x -ის მნიშვნელობა არასოდეს არ მეორდება. პერიოდულია მხოლოდ მეორე მამრავლი და მისი განმეორების პერიოდი იქნება

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (\text{XIII, 31})$$

(XIII, 30) ფორმულით გამოხატული მოძრაობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც მარტივი რხევა, რომლის ამპლიტუდა არის $A_0 e^{-\delta t}$, ხოლო სიხშირე არის ω . რხევის ამპლიტუდა კლებულობს ექსპონენციალურად დროის ზრდასთან ერთად. ω -ის მაქსიმალური მნიშვნელობები



ნახ. 177.

ვსაზრის მიხედვით $\sin(\omega t + \varphi) = 1$ პირობიდან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი მეორედებიან T დროის შემდეგ და ამიტომ T შეიძლება განვიხილოთ როგორც რხევის პერიოდი (ნახ. 177).

რხევას, რომელიც (XIII, 30) ფორმულით აიწერება, მიღებულია რხევა ეწოდება. მისთვის დამახასიათებელია ამპლიტუდის ექსპონენციალური შემცირება დროის განმავლობაში, გამოწვეული ხახუნის არსებობით. ხახუნი იწვევს არა მარტო ამპლიტუდის თანდათანობით შემცირებას, არამედ სიხშირის (პერიოდის) შეცვლასაც. როგორც (XIII, 31) ფორმულა გვიჩვენებს, ხახუნი ამცირებს რხევის სიხშირეს, ე. ი. ადიდებს პერიოდს. ეს თავისთავად გასაგებია, ვინაიდან წინააღმდეგობა ამცირებს მოძრაობის სიჩქარეს. გამოვარკვეოთ δ მიღების კოეფიციენტის აზრი. ამპლიტუდის ფორმულიდან განვიძიანარკობს, რომ A_0 არის ამპლიტუდა დროის საწყის მომენტში. ვთქვათ, დროს მივეციოთ მნიშვნელობა $\frac{1}{\delta}$, ე. ი.

დავუშვიოთ, რომ საწყისი მომენტიდან გავიდა $\frac{1}{\delta}$ დრო. მაშინ ამპლიტუდა იქნება

$$A_{\frac{1}{\delta}} = A_0 e^{-1},$$

ე. ი.

$$\frac{A_{\frac{1}{\delta}}}{A_0} = e^{-1}. \quad (\text{XIII, 32})$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\frac{1}{\delta}$ დროის განმავლობაში რხევის ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს. მაშასადამე, δ არის იმ დროის შებრუნებული სიდიდე, რომლის განმავლობაში რხევის ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს. აღვნიშნოთ ეს დრო τ ასოთი: $\tau = \frac{1}{\delta}$.

განვიხილოთ ერთი მნიშვნელოვანი სიდიდე, რომელსაც ხშირად იყენებენ რხევის მიღვეადობის დასახასიათებლად. ვთქვათ, t მომენტში ამპლიტუდა არის A_t . ერთი პერიოდის გავლის შემდეგ

$$A_{t+T} = A_0 e^{-\delta(t+T)}.$$

გამოვითვალოთ რამდენჯერ შემცირდება ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში. მივიღებთ

$$\frac{A_{t+T}}{A_t} = e^{-\delta T}.$$

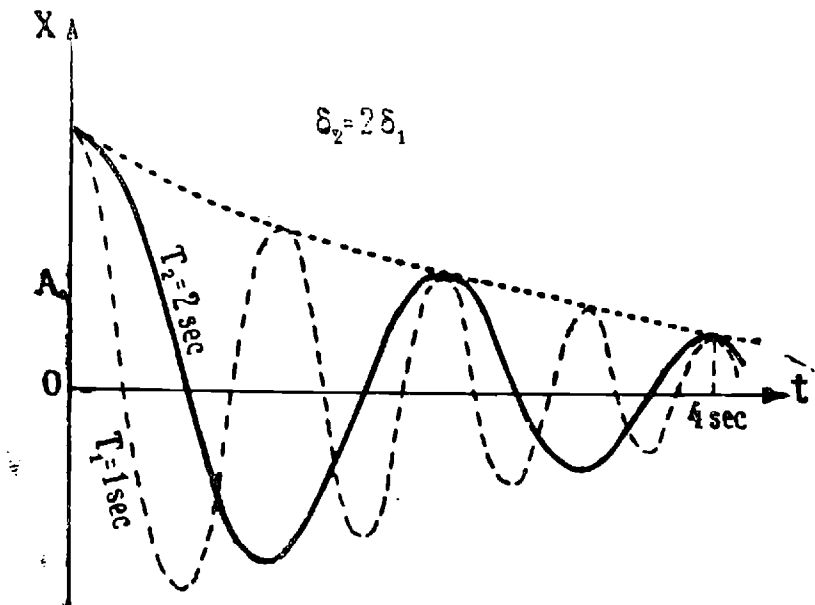
ავიღოთ ამ გამოსახულების ნატურალური ლოგარითმი და აღვნიშნოთ იგი d ასოთი

$$d = \ln \frac{A_{t+T}}{A_t} = -\delta T. \quad (\text{XIII, 33})$$

d სიდიდეს ეწოდება ლოგარითმიული დეკრემენტი. იგი განისაზღვრება როგორც ამპლიტუდის თანამიმდევრულ მაქსიმალურ მნიშვნელობათა შეფარდების ნატურალური ლოგარითმი. მისი აზრის გამოსარკვევად აღვნიშნოთ N -ით რხევათა რიცხვი, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს. მაგრამ δ სიდიდის განსაზღვრის თანახმად e -ჯერ ამპლიტუდა კლებულობს $\frac{1}{\delta}$ დროის განმავლობაში. ამიტომაც გვექნება

$$N = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{d}; \quad (\text{XIII, 34})$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ d არის რხევათა იმ რიცხვის
 შებრუნებული სიდიდე, რომლის შემდეგ ამპლიტუ-
 და კლებულობს e -ჯერ. როგორც δ , ისე d ახასიათებს რხე-
 ვის მიღვეადობას. ორივე უბასუხებს კითხვაზე, თუ რამდენად სწრა-
 ფად ხდება რხევის მიღვეა. მაგრამ ცხადია, რომ მიღვეადობის



ნახ. 178.

უფრო ბუნებრივი მახასიათებელი არის ლოგარითმული დეკრემენ-
 ტი. მართლაც, ვთქვათ, ორ ოსცილატორს, რომელთა რხევის პე-
 რიოდებია T_1 და T_2 , აქვთ ერთი და იგივე მიღვეის კოეფიციენ-
 ტი, ე. ი. ერთი და იგივე მიღვეის დრო τ . ორივე ოსცილატორი
 τ დროის განმავლობაში ამცირებს ამპლიტუდას e -ჯერ და პირვე-
 ლი შეხედვით ისეთი შთაბეჭდილებაა, რომ ორივე ოსცილატორის
 მიღვეადობა ერთნაირია. მაგრამ, ვინაიდან რხევის პერიოდები
 სხვადასხვაა, τ დროის განმავლობაში ამ ოსცილატორების მიერ
 სხვადასხვა რხევათა რაოდენობა იქნება შესრულებული. სახელ-
 დობრ, პირველი ოსცილატორი შეასრულებს $\frac{\tau}{T_1}$ რხევას, მეორე კი—

$\frac{\tau}{T_2}$. ვთქვათ, მაგალითად, $\tau = 4 \text{ sec}$, $T_1 = 1 \text{ sec}$ და $T_2 = 2 \text{ sec}$. მაშა-
 სადამე, სანამ ამპლიტუდა e -ჯერ შემცირდება, პირველი ოსცილა-
 ტორი 4 რხევას შეასრულებს, მეორე კი მხოლოდ 2 რხევას; აქე-

დან სავსებით ბუნებრივად გამომდინარეობს, რომ მეორე რხევა უფრო სწრაფად მიიღვეს, ვიდრე პირველი, რაც თავის გამოხატულებას იმაში პოულობს, რომ ლოგარითმული დეკრემენტი მეორე ოსცილატორს ორჯერ მეტი აქვს, ვიდრე პირველს (ნახ. 178).

§ 81. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ იმდენად მცირე ხახუნის შემთხვევა ($\delta^2 < \omega_0^2$), რომ მიუხედავად მიღვევადობისა, მოძრაობა ინარჩუნებდა პერიოდულ ხასიათს. გავარჩიოთ ახლა შემთხვევა იმდენად დიდი ხახუნისა, როცა მოძრაობა სრულიად კარგავს პერიოდულობის ნიშნებს. დავუშვათ, რომ ხახუნის ძალა იმდენად დიდია, რომ $\delta^2 = \omega_0^2$. მაშინ (XIII, 28) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

და მისი ამონახსნი იქნება

$$y = A_0 + B_0 t,$$

სადაც A_0 და B_0 მუდმივები განსაზღვრული უნდა იქნენ საწყისი პირობებიდან; აქედან x -ისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$x = (A_0 + B_0 t) e^{-\delta t}. \quad (\text{XIII, 35})$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ განსახილველ შემთხვევაში მოძრაობა აღარ არის პერიოდული. ამიტომაც მას აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა ეწოდება. მისი ხასიათის თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად ავიღოთ შემდეგი საწყისი პირობები: $t=0$, $x=x_0$, $v=0$; ამ პირობების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} A_0 &= x_0, \\ B_0 &= x_0 \delta; \end{aligned}$$

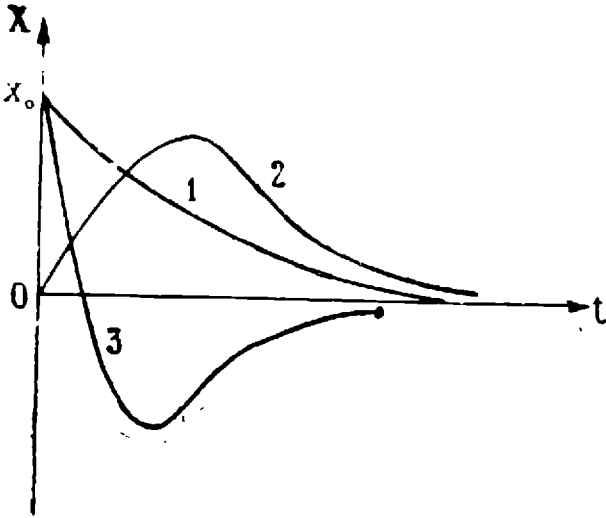
აქედან x -ისათვის მივიღებთ

$$x = x_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t}. \quad (\text{XIII, 36})$$

ამ მოძრაობის გრაფიკი წარმოდგენილია 179-ე ნახაზზე (1). საწყისი მდებარეობიდან x_0 მანძილით გადახრილი ნაწილაკი ასიმპტოტურად უახლოვდება ამ მდებარეობას (ექსპონენციალური კანონის თანახმად) და არავითარი გადახრა საწინააღმდეგო მიმართულებით არ ხდება. თუ ნაწილაკი ბიძგით არის გამოყვანილი წონასწორობის მდებარეობიდან (საწყისი პირობები: $x_0=0$, $v_0 \neq 0$), მივიღებთ

$$x = v_0 t e^{-\delta t}. \quad (\text{XIII, 37})$$

ამ მოძრაობის გრაფიკი იმავე ნახაზზეა ნაჩვენები (2). ნაწილაკი ჯერ შორდება წონასწორობის მდებარეობას, აღწევს უდიდეს გადახრას და შემდეგ, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, ასიმპტოტურად უახლოვდება საწყის მდებარეობას. იმავე ნახაზზე ნაჩვენებია მოძრაობის გრაფიკი იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყის მო-



ნახ. 179.

მენტში ნაწილაკი გადახრილია x_0 მანძილით და მას მინიჭებული აქვს წონასწორობის მდებარეობისაკენ მიმართული საწყისი სიჩქარე. ამ შემთხვევაში ნაწილაკი გადასცდება წონასწორობის მდებარეობას, მიაღწევს უდიდეს გადახრას და შემდეგ იწყებს ასიმპტოტურ მიახლოებას საწყისი მდებარეობისაკენ (3). ასევე შეიძლება განხილულ იქნეს მესამე შემთხვევა, როდესაც $\delta^2 > \omega_0^2$. ამოხსნას ამ შემთხვევაში შემდეგი სახე ექნება:

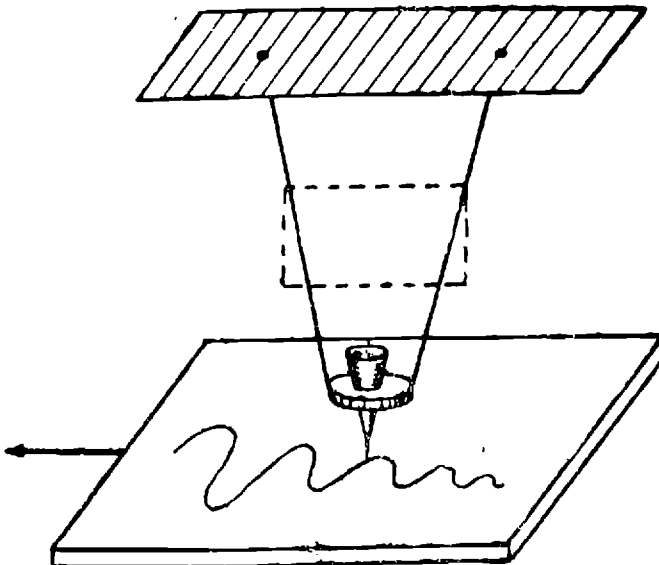
$$x = (A_0 e^{at} + B_0 e^{-at}) e^{-\delta t}, \quad (\text{XIII}, 38)$$

სადაც

$$a = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{XIII}, 39)$$

აქაც ჩვენ ვღებულობთ აპერიოდულ მიღევად მოძრაობას, რომლის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. 180-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მარტივი ხელსაწყო, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მიღევადი რხევის ხასიათის გამოკვლევა. რხევად ნაწილაკად განიხილება საქანი, რომელიც წარმოადგენს ორ ძაფზე ჩამოკიდებულ დისკოს. დისკოზე დამაგრებულია ძაბრი, რომელშიც ჩაყრი-

ლია ქვიშა. საქანის რხევის დროს ქვიშა იყრება დაბრიდან და კო-
ვეებს კვალს ჰორიზონტალურად მოძრავ დაფაზე. ქაერის ხახუნის
გასაძლიერებლად დაფებზე დამაგრებულია თხელი ფირფიტა. ფირ-
ფიტის ზომის ცვლით ჩვენ შეგვიძლია ადვილად განვახორციელოთ
მიღვეადი მოძრაობის სხვადასხვა შემთხვევა.



ნახ. 180.

§ 82. ჰარმონიული გარეშე ძალით გამოწვეული
ძრულეობითი რხევა. რეზონანსი

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ოსცილატორის ისეთი რხევა,
როდესაც ოსცილატორზე, გარდა შიგა ძალისა და ხახუნის ძალისა,
მოქმედებს კიდევ გარეშე პერიოდული ძალა. ასეთი, როგორც ამ-
ბობენ, იძულებითი რხევები ძალიან ხშირად გვხვდება ბუნებასა და
ტექნიკაში და მათი როლი ძალიან დიდია არა მარტო მექანიკურ
რხევებში, არამედ აკუსტიკაში, ოპტიკაში, ელექტრობაში და ფი-
ზიკის სხვა დარგებში.

განვიხილოთ ჯერ მარტივი შემთხვევა, როდესაც გარეშე ძალა
არის ჰარმონიული, ე. ი. გამოისახება ფორმულით

$$F = F_0 \sin \omega t, \tag{XIII, 40}$$

სადაც F_0 არის მისი ამპლიტუდა, ხოლო ω —რხევის სიხშირე. ოს-
ცილატორის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t.$$

m -ზე გაყოფით და წინა პარაგრაფის აღნიშვნების შემოღებით მივიღებთ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (\text{XIII, 41})$$

გამოვარკვეოთ ახლა, ხომ არ შეიძლება დავაკმაყოფილოთ ეს განტოლება ისეთი რხევით, რომლის სიხშირე ისეთივეა, როგორიც მაიძულებელი ძალის სიხშირე. დავწეროთ x შემდეგი სახით:

$$x = B \sin(\omega t + \psi) \quad (\text{XIII, 42})$$

და მოვძებნოთ B და ψ მუდმივების ისეთი მნიშვნელობები, რომ (XIII, 42) აკმაყოფილებდეს (XIII, 41) განტოლებას. ჩასმა (XIII, 41) განტოლებაში მოგვცემს

$$B \{-\omega^2 \sin(\omega t + \psi) + 2\delta\omega \cos(\omega t + \psi) + \omega_0^2 \sin(\omega t + \psi)\} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

ეს განტოლება მართებული უნდა იყოს დროის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. მარტივი განტოლებების მისაღებად შევარჩიოთ t -სათვის შემდეგი მნიშვნელობები:

1. $\omega t + \psi = 0$; ამ შემთხვევაში მივიღებთ

$$2B\delta\omega = \frac{F_0}{m} \sin \psi.$$

2. $\omega t + \psi = \frac{\pi}{2}$; ეს პირობა მოგვცემს

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos \psi.$$

ამ ორი განტოლების კვადრატში აყვანით და შეკრებით B სიდიდისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$B = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (\text{XIII, 43})$$

ხოლო პირველი განტოლების მეორეზე გაყოფით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას ψ -სათვის:

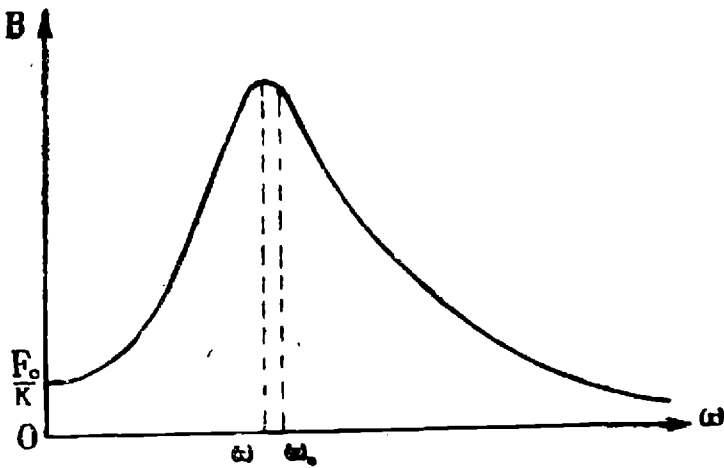
$$\tan \psi = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (\text{XIII, 44})$$

ასეთი მნიშვნელობები უნდა აქონდეთ B და ψ სიდიდეებს იმისათვის, რომ (XIII, 42) იყოს (XIII, 41) მოძრაობის განტოლების ამონახსნი.

რხევას, გამობატულს (XIII, 42) ფორმულით და დახასიათებულს იმით, რომ მისი სიხშირე ისეთივეა როგორც მაიძულებელი ძალის სიხშირე, ეწოდება იძულებითი რხევა. (XIII, 43) და (XIII, 44) ფორმულები გამოსახავენ იძულებითი რხევის ამპლიტუდას და საწყის ფაზას, როგორც მაიძულებელი ძალის სიხშირის ფუნქციას. განვიხილოთ ჯერ იძულებითი რხევის ამპლიტუდის დამოკიდებულება სიხშირეზე (ნახ. 181). როგორც (XIII. 43) ფორმულა და სათანადო გრაფიკი გვიჩვენებენ, სიხშირის ზრდასთან ერთად ამპლიტუდა იზრდება: დაწყებული $\omega = 0$ სათანადო ზღვრული მნიშვნელობიდან

$$B_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k},$$

აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას სიხშირის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, რის შემდეგ მცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ,



ნახ. 181.

როცა $\omega \rightarrow \infty$. გამოვარკვიოთ, თუ რა სიხშირისათვის ხდება ამპლიტუდა მაქსიმალური. ცხადია, რომ ამისათვის მინიმალური უნდა იყოს ფესვქვეშა გამოსახულება. მისი მინიმალური მნიშვნელობის მოსაძებნად გარდავქმნათ იგი შემდეგნაირად:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 = \{\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2)\}^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2).$$

მაიძულებელი ძალის სიხშირეზე დამოკიდებულია მხოლოდ პირველი წევრი. ვინაიდან $\omega_0^2 > \delta^2$ (განიხილება იმდენად სუსტი ხახუნი, რომ მოძრაობას ჰქონდეს რხევითი ხასიათი), მთელი გამოსახულება

ბა მაშინ იქნება მინიმალური, როდესაც ნულის ტოლი იქნება პირველი წევრი. ეს გვაძლევს შემდეგ მნიშვნელობას მაქსიმალური ამპლიტუდის სათანადო სიხშირისათვის, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ ω_r -ით:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (\text{XIII, 45})$$

სიხშირის ამ მნიშვნელობას ეწოდება რეზონანსული სიხშირე. თვით მოვლენას, როდესაც იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს მაიძულებელი ძალის სიხშირის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, ეწოდება რეზონანსი.

(XIII, 45) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ რეზონანსული სიხშირე არ თანხვდება არც ჰარმონიული ოსცილატორის საკუთარ სიხშირეს (ω_0) და არც მიღვეადი ოსცილატორის სიხშირეს ($\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$). იგი ორივეზე ნაკლებია. ცხადია, რომ ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში ($\delta = 0$), რეზონანსული სიხშირე ოსცილატორის საკუთარი სიხშირის ტოლი იქნება და ამპლიტუდის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$B = \frac{F_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (\text{XIII, 46})$$

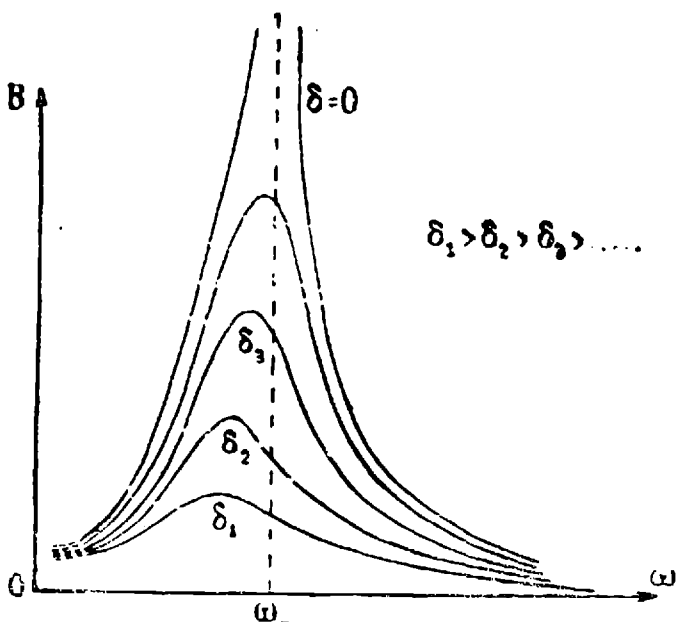
(აღებულია აბსოლუტური მნიშვნელობა, ვინაიდან ამპლიტუდა ყოველთვის დადებითი უნდა იყოს); ეს უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ხახუნის არარსებობის შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა უსასრულოდ დიდი ხდება, როდესაც მაიძულებელი ძალის სიხშირე უახლოვდება საკუთარ სიხშირეს, ე. ი. რეზონანსის დროს

$$B \rightarrow \infty, \quad \text{როცა } \omega \rightarrow \omega_r.$$

ფაქტობრივად ამპლიტუდის ასეთი უსასრულო გაზრდა არასოდეს არ გვექნება ჯერ ერთი იმიტომ, რომ როგორც მცირეც არ უნდა იყოს ხახუნი, იგი ყოველთვის იქნება. და მეორეც იმიტომ, რომ ამპლიტუდის საკმარისად გაზრდის შემდეგ აღარ გამოიყენება ჩვენ მიერ დაშვებული მიახლოება, რომ რხევა მცირე უნდა იყოს. 182-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ამპლიტუდის დამოკიდებულების გრაფიკი სიხშირეზე მიღვევის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. თვით ამპლიტუდის მაქსიმალური მნიშვნელობისათვის ადვილად მივიღებთ ფორმულას:

$$B_{max} = \frac{F_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (\text{XIII, 47})$$

მრავალ შემთხვევაში, ხახუნის სიმცირის გამო, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ განსხვავება რეზონანსულ სიხშირესა და საკუთარ სიხშირეს შორის იმდენად მცირეა, რომ რეზონანსულ სიხშირედ შეიძლება თვით ω_0 ჩავთვალოთ. ამიტომაც ხშირად ამბობენ, რომ რე-



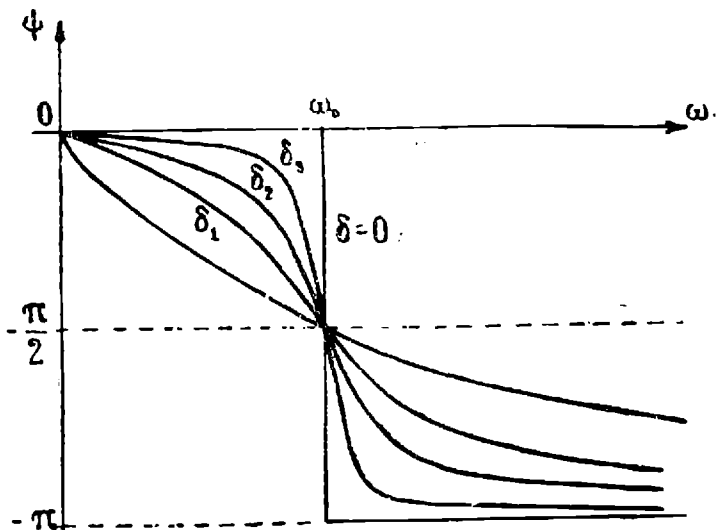
ნახ. 182.

ზონანსისათვის საჭიროა, რათა გარეშე ძალის სიხშირე თანხდეს ოსცილატორის საკუთარ სიხშირეს.

გამოვარკვეით ახლა როგორ არის დამოკიდებული იძულებითი რხევის ψ ფაზა მაიძულებელი ძალის სიხშირეზე. როგორც (XIII, 44) ფორმულა და 183-ე ნახაზი გვიჩვენებს, როდესაც სიხშირე იზრდება ნულიდან უსასრულობამდე, იძულებითი რხევის ფაზა იცვლება ნულიდან $-\pi$ მნიშვნელობამდე ისე, რომ საკუთარი სიხშირის ტოლი სიხშირისათვის იგი არის $\psi = -\frac{\pi}{2}$. რაც უფრო ნაკლებია მი-

ლევის კოეფიციენტი, მით უფრო მკვეთრია ფაზის ცვლილება ნულოვანი მნიშვნელობიდან $\psi = -\pi$ მნიშვნელობამდე. საკმარისად მცირე ხახუნის შემთხვევისათვის შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ როდესაც $\omega < \omega_0$, $\psi = 0$, ე. ი. გარე ძალა და გადანაცვლება ერთსა და იმავე ფაზაშია, ხოლო როცა $\omega > \omega_0$, $\psi = -\pi$, ე. ი. ძალა და გადანაცვლება საწინააღმდეგო ფაზაში არიან. საზოგადოდ კი შეიძლება ითქვას, რომ გადანაცვლება ყოველთვის აგვიანებს მაიძულებელ ძალასთან შედარებით. ფაზის საკითხი მჭიდროდ არის დაკავ-

შირებულ იძულებითი რხევის დროს დახარჯული ენერგიის საკითხთან. ცხადია, რომ ვინაიდან რხევა წარმოებს გარე ძალის გავლენით, ეს ძალა ასრულებს მუშაობას და აწვდის ოსცილატორს გარკვეულ ენერგიას. ენერგიის ცვლილება დროის ერთეულში ან, რაც იგივეა, სიმძლავრე შემდეგნაირად გამოითვლება:



ნ.ხ. 183.

$$W = F' \cdot v, \quad (\text{XIII}, 48)$$

სადაც v არის იძულებითი რხევის სიჩქარე. ვინაიდან

$$v = B\omega \cos(\omega t + \psi),$$

ნივილებთ

$$W = B \cdot F'_0 \omega \sin \omega t \cdot \cos(\omega t + \psi);$$

ეს ფორმულა ასე შეიძლება გადაიწეროს:

$$W = \frac{BF'_0\omega}{2} \{ \sin(2\omega t + \psi) - \sin \psi \}. \quad (\text{XIII}, 49)$$

გარე ძალის სიმძლავრე შედგება ორი წევრისაგან. მეორე წევრი მუდმივი და დადებითია, ვინაიდან $\sin \psi < 0$, პირველი წევრი. წარმოადგენს $\frac{T'}{2}$ პერიოდის მქონე სინუსოიდურ ფუნქციას, რომე-

ლიც იცვლის ნიშანს ყოველი მეოთხედი პერიოდის შემდეგ. მისი საშუალო მნიშვნელობა საკმაოდ დიდი დროისათვის ნულის ტო-

ლია, რის გამოც სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$\overline{W} = \frac{BF_0 \omega}{2} \sin \psi.$$

თუ ჩავსვამთ B -სა და $\sin \psi$ -ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\overline{W} = \frac{F_0^2 \delta}{4\delta^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2}. \quad (\text{XIII, 50})$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მაქსიმალური სიმძლავრე, ე. ი. გარედან გადაცემული ენერჯიის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღება მაშინ, როდესაც გარე ძალის სიხშირე თანხვედრა საკუთარ სიხშირეს ($\omega = \omega_0$); ამ შემთხვევაში სიმძლავრისათვის მივიღებთ

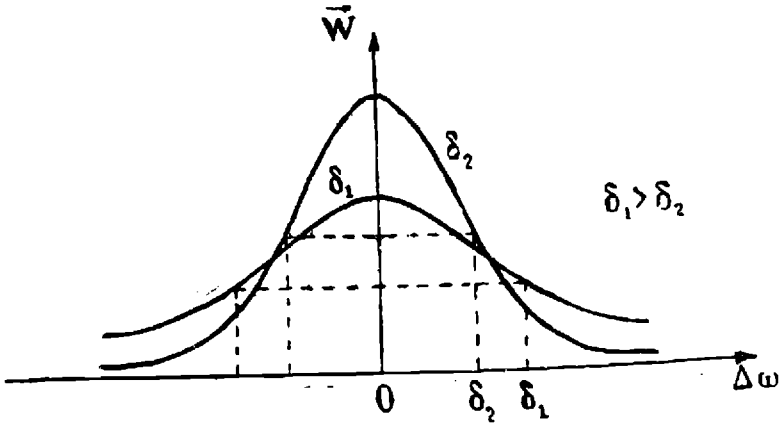
$$\overline{W} = \frac{F_0^2}{4\delta}. \quad (\text{XIII, 51})$$

მაშასადამე, მაქსიმალური საშუალო სიმძლავრე მიღების კოეფიციენტის უკუპროპორციულია.

გამოვარკვიოთ როგორ არის დამოკიდებული სიმძლავრე $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ სიდიდისაგან, ე. ი. როგორ იცვლება \overline{W} რეზონანსის მახლობლად. დაუშვათ, რომ $\Delta\omega \ll \omega_0$, მაშინ \overline{W} შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \cdot \frac{F_0^2 \delta}{\delta^2 + (\Delta\omega)^2}. \quad (\text{XIII, 52})$$

ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია 184-ე ნახაზზე. იგი სიმეტრიულადაა განლაგებული ორდინატთა ღერძის მიმართ და აღწევს მაქსიმუმს $\Delta\omega = 0$ მნიშვნელობისათვის. \overline{W} სიდიდის მნიშვნელობა ორჯერ მცირდება (მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით), როდესაც დაფშორდებით კოორდინატთა სათავეს მარცხნივ ან მარჯვნივ, $\Delta\omega = \pm$ მანძილით. 184-ე ნახაზზე მოყვანილია \overline{W} სიდიდის გრაფიკები მიღების კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. ჩვენ ვხედავთ, რომ δ სიდიდის შემცირებასთან ერთად მრუდის მაქსიმუმი იზრდება, ხოლო თვით მრუდი უფრო ციცაბო და ვიწრო ხდება. რაც უფრო დიდია რეზონანსის ინტენსიობა, მით უფრო ვიწროა ის შუალედი, რომელშიც ორდინატი დაახლოებით მაქსიმუმის ტოლია. ეს შედეგი ფრიად მნიშვნელოვანია: რაც უფრო ნაკლებია ხახუნი, მით უფრო ძნელია ოსცილატორის



ნახ. 184.

რხევა არ არის სრული მოძრაობა, რომელიც შეიძლება შეასრულოს ჩვენმა ოსცილატორმა. რომ არ ყოფილიყო მაიძულებელი ძალა, ოსცილატორი მაინც შეასრულებდა შიგა ძალებით გამოწვეულ და საწყის პირობებზე დამოკიდებულ რხევას. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს რხევა იქნება მიღევადი და გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0), \quad (\text{XIII, 53})$$

სადაც A_0 და φ_0 მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით. ამიტომაც სრული რხევა, რომელსაც ასრულებს ოსცილატორი შიგა და გარე ძალების გავლენით, იქნება ჯამი (XIII, 53) ფორმულით განსაზღვრული საკუთარი მიღევადი რხევისა და (XIII, 42) ფორმულით გამოსახული იძულებითი რხევისა

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi); \quad (\text{XIII, 54})$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, ვინაიდან საკუთარი რხევა მიღევადია და იგი თანდათან სუსტდება, ბოლოს პრაქტიკულად

დაგვრჩება მხოლოდ იძულებითი რხევა. თუ ხახუნი არ იქნება ($\delta=0$), ეს ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \sin \omega t. \quad (\text{XIII, 55})$$

ცხადია, რომ ამ ფორმულის გამოყენება არ შეიძლება რეზონანსის დროს, ვინაიდან მეორე წევრის მნიშვნელი ნულის ტოლი ხდება, როცა $\omega = \omega_0$. იმის გამოსარკვევად, თუ (დაწყებული საწყისი მომენტიდან) როგორ ვითარდება მოძრაობა, განვიხილოთ შემდეგი საწყისი პირობები: $t=0$, $x=x_0$ და $v=r_0$. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ $\omega \neq \omega_0$ და მხოლოდ შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\omega \rightarrow \omega_0$. არჩეული საწყისი პირობებისათვის ამონახსნი შემდეგი სახის იქნება:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\}. \quad (\text{XIII, 56})$$

უკანასკნელი წევრი შემდეგნაირად შეიძლება გარდაექმნათ:

$$\begin{aligned} & \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left\{ \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right\} = \\ & = \frac{F_0 t}{m|\omega_0 + \omega|} \frac{\sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t}{\frac{|\omega - \omega_0|}{2}} \cos \frac{\omega + \omega_0}{2} t + \\ & + \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

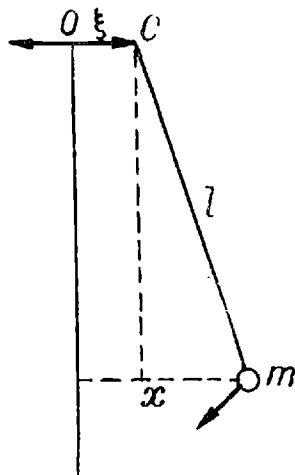
ადვილად გამოსარკვევია, რომ ზღვარზე $\omega \rightarrow \omega_0$ გადასვლის შემდეგ ამ წევრისათვის მივიღებთ

$$\frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

ამიტომაც (XIII, 56) ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (\text{XIII, 57})$$

პირველი ორი წევრი გამოხატავს ოსცილატორის საკუთარ რხევას, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს ეთანადება. მესამე წევრი კი არის იძულებითი რხევა, რომლის ამპლიტუდა იზრდება დროის პროპორციულად და უსასრულოდ დროის შემდეგ უნდა გახდეს უსასრულოდ დიდი, როგორც უნდა იყოს არამილევადი რხევის რეზონანსის დროს. ცხადია, რომ ეს შედეგი მართებულია მხოლოდ მცირე დროის შუალედისათვის, ვინაიდან დაშვებული მიახლოება მართებულია მხოლოდ მცირე რხევებისათვის.



ნახ. 185.

იძულებითი რხევის თვალსაჩინო მაგალითს იძლევა საქანი, რომლის დაკიდვის წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურად მოცემული პერიოდული კანონით (ნახ. 185). თუ x არის საქანის ტვირთის გადახრა, ხოლო ξ — დაკიდვის წერტილის გადახრა და ორივე ეს გადახრა ათვლილია უძრავი ვერტიკალური მიმართულებიდან. ტვირთზე მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ

$$F = -mg \frac{x - \xi}{l} \quad (\text{XIII, 58})$$

(დაშვებულია, რომ საქანის გადახრა მცირეა). მოძრაობის დინამიკური განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \frac{x - \xi}{l}.$$

ეს განტოლება ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi, \quad (\text{XIII, 59})$$

სადაც $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ არის უძრავი საქანის რხევის სიხშირე. თუ დავუშვებთ, რომ დაკიდვის წერტილის გადახრა იცვლება პერიოდულად შემდეგი კანონის თანახმად:

$$\xi = a \sin \omega t,$$

მივიღებთ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a \omega_0^2 \sin \omega t.$$

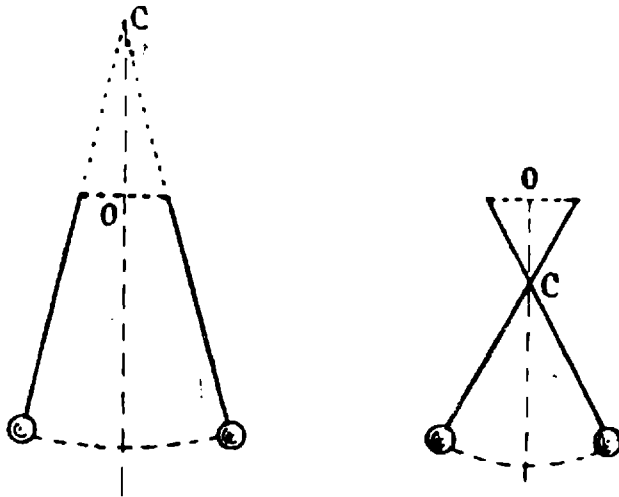
ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს, ვითომ დაკიდვის წერტილი უძრავია, მაგრამ საქანის ტვირთზე მოქმედებს $a\omega_0^2 \sin \omega t$ პერიოდული ძალა $a\omega_0^2$ ამპლიტუდით და ω სიხშირით (დაშვებულია, რომ ხახუნის ძალა არ არის). ამ განტოლების ამოხსნა, ე. ი. იძულებითი რხევის განტოლება იქნება

$$x = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi. \quad (\text{XIII, 60})$$

გამოვითვალოთ საქანის ტვირთის გადახრა დაკიდვის წერტილზე გამავალი ვერტიკალის მიმართ (ეს ვერტიკალი პერიოდულად ინაცვლებს); ამისათვის x -ს გამოვაკლოთ ξ , მივიღებთ

$$x - \xi = \frac{\omega^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \xi. \quad (\text{XIII, 61})$$

როგორც (XIII, 60) ფორმულა გვიჩვენებს, ტვირთისა და დაკიდვის წერტილის გადახრა, ერთმხრივ არის მიმართული, თუ $\omega_0 > \omega$, და ერთმანეთის საწინააღმდეგოა, თუ $\omega_0 < \omega$. ეს ორი შემთხვევა ნაჩვენებია 186-ე ნახაზზე. ეს ნახაზი გვიჩვენებს, რომ საქანი



ნახ. 186.

ირხევა ისე, ვითომ მისი დაკიდვის წერტილი იყოს არა O , არამედ C .

მიღებული შედეგები გამოყენებას პოულობს სეისმოლოგიაში, ე. ი. მეცნიერებაში მიწისძვრების შესახებ. მიწისძვრის რეგისტრაციისათვის გამოიყენება სეისმოგრაფი, რომელიც ფაქტობრივად სა-

ქანს წარმოადგენს. მისი ჩვენება დამყარებულია ფარდობით გან-
 ნაცვლებაზე, ვინაიდან მარეგისტრირებელი ხელსაწყო მიმაგრებუ-
 ლია დედამიწის ზედაპირთან და მასთან ერთად მოძრაობს. თუ
 საქანის საკუთარი სიხშირე საკმაოდ მცირეა მიწისძვრით გამოწ-
 ვეული რხევების სიხშირესთან შედარებით, ე. ი. $\omega_0 \ll \omega$, (XIII, 61)
 განტოლება გვიჩვენებს, რომ

$$x \approx \xi = -\xi,$$

ე. ი. საქანის ტვირთი თითქმის უძრავი რჩება. მაშასადამე, მოხ-
 დება მარეგისტრირებელი აპარატის განანაცვლება საქანის ტვირ-
 თის მიმართ და ამიტომ მიწისძვრით გამოწვეული საკმაოდ მაღა-
 ლი სიხშირეები რეგისტრირებული იქნება დაახლოებით ერთსა და
 იმავე მასშტაბში. ამიტომაც სეისმოგრაფის თავისუფალი რხევების
 პერიოდი უნდა იყოს საკმარისად დიდი. ჩვეულებრივად იგი 15—20
 სეკუნდის ტოლია.

§ 83. პარამეტრული რეზონანსი

რეზონანსის საინტერესო და თავისებურ შემთხვევას წარმოად-
 გენს ე. წ. პარამეტრული რეზონანსი. ეს რეზონანსი წარმოიშვება
 არა უშუალოდ გარეშე მაიძულებელი ძალის გავლენით, არამედ
 რხევითი სისტემის რაიმე დამახასიათებელი პარამეტრის პერიოდუ-
 ლი ცვლის გამო. ყველაზე მარტივ მაგალითს ასეთი რეზონანსისა
 წარმოადგენს საქანელას რხევის თანდათანობითი გაძლიერება მას-
 ზე მყოფი ადამიანის პერიოდული დაწევისა და აწევის გამო. ყვე-
 ლასათვის კარგად არის ცნობილი, რომ საქანელაზე ქანაობის დროს
 თუ პერიოდულად, რხევის ტაქტის შესაბამისად აიწევთ და დაი-
 წევთ, ქანაობა თანდათან გაძლიერდება მიუხედავად იმისა, რომ
 საქანელაზე არავითარი გარეშე ძალა არ მოქმედებს.

რის ცვლილებას იწვევს ადამიანის პერიოდულად აწევა და და-
 წევა საქანელაზე ქანაობისას? საქანელა წარმოადგენს ფიზიკურ სა-
 ქანს, რომლის მასების ცენტრის მდებარეობა და, მაშასადამე, დაყ-
 ვანილი სიგრძე დამოკიდებულია მასზე მყოფი ადამიანის მდებარე-
 ბაზე. მისი აწევის დროს მასების ცენტრი ზევით იწევს, ე. ი.
 დაყვანილი სიგრძე კლებულობს, ხოლო დაწევის დროს—მატულობს.
 ამგვარად ხდება დაყვანილი სიგრძის პერიოდული ცვლილება. ჩვე-
 ნი მიზანია გამოვარკვიოთ, თუ როგორ მოქმედებს ეს ცვლილება
 საქანის რხევის ამპლიტუდაზე.

მსჯელობის გასამარტივებლად განვიხილოთ მათემატიკური სა-
 ქანი, რომლის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. საქანის ძაფი გაყ-

რილია ვიწრო ხვრელში ისე, რომ პერიოდული მოძრაობის შედეგად ამ ძაფის ბოლოს საქანის სიგრძე ასევე პერიოდულად იცვლება. ვთქვათ, დაყვანილი სიგრძე იცვლება γ სიხშირით l_0 სიგრძის მახლობლად

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} (1 - \varepsilon \sin \gamma t).$$

ჩასმა მათემატიკური საქანის მოძრაობის დინამიკურ განტოლებაში მოგვცემს

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} (1 - \varepsilon \sin \gamma t) s = 0,$$

სადაც ε მცირე სიდიდეა ერთთან შედარებით ($\varepsilon \ll 1$), რაც იმას ნიშნავს, რომ სიგრძის ცვლილება მცირეა საწყის სიგრძესთან შედარებით. ვადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{g}{l_0} \varepsilon \sin \gamma t \cdot s; \quad (\text{XIII, 62})$$

ამ განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისათვის მივიღოთ მხედველობაში, რომ ε ძალიან მცირეა. თუ მარჯვენა მხარეში მყოფ წევრს უგულებელვყოფთ, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = 0,$$

რომლის ამონახსნი ჩვენთვის უკვე ცნობილია

$$s = A \sin \omega_0 t, \quad (\text{XIII, 63})$$

სადაც

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

არის საკუთარი რხევის სიხშირე. (XIII, 62) განტოლების მიახლოებით სახეს მივიღებთ, თუ s -ის მნიშვნელობას (XIII, 63) განტოლებიდან ჩავსვამთ (XIII, 62) განტოლების მარჯვენა მხარეში

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{Ag}{l_0} \varepsilon \sin \gamma t \cdot \sin \omega_0 t.$$

სინუსების ნამრავლი წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sin \gamma t \sin \omega_0 t = \frac{1}{2} \cos(\gamma - \omega_0) t - \frac{1}{2} \cos(\gamma + \omega_0) t,$$

გვექნება

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l_0} s = \frac{Ag}{2l_0} \varepsilon \cos(\gamma - \omega_0)t - \frac{Ag}{2l_0} \varepsilon \cos(\gamma + \omega_0)t; \quad (\text{XIII, 64})$$

ამ განტოლებას აქვს იძულებითი რხევის განტოლების სახე. მაიძულელებელი ძალა შედგება ორი პერიოდული ძალისაგან $\gamma - \omega_0$ და $\gamma + \omega_0$ სიხშირეებით. მაშასადამე, გვექნება ორი რეზონანსული სიხშირე: პირველი, როდესაც $\gamma - \omega_0$ თანხვედბა საკუთარ სიხშირეს

$$\gamma - \omega_0 = \omega_0,$$

ხოლო მეორე, როდესაც $\gamma + \omega_0$ თანხვედბა ω_0 . მეორე შემთხვევა ვერ განხორციელდება, თუ $\gamma \neq 0$, ამიტომ რჩება პირველი რეზონანსული სიხშირე

$$\gamma = 2\omega_0. \quad (\text{XIII, 65})$$

როგორც ვხედავთ, დაყვანილი სიგრძის პერიოდული ცვლილების დროს წარმოიშვება რეზონანსი, როდესაც სიგრძის ცვლის სიხშირე ორჯერ მეტია, ვიდრე საქანის საკუთარი სიხშირე. უფრო ზუსტი გამოთვლები რომ ჩავვეტარებინა, აღმოჩნდებოდა, რომ პარამეტრული რეზონანსი წარმოიშვება მაშინაც, როდესაც პარამეტრის

ცვლილების სიხშირე არის $\frac{2\omega_0}{n}$, სადაც n ნებისმიერი მთელი და-

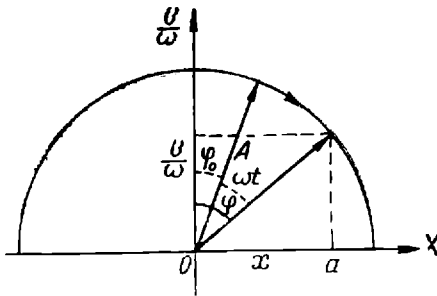
დებითი რიცხვია. მაგრამ ამასთან ერთად ირკვევა, რომ რაც უფრო მეტია n , მით უფრო ნაკლებია ამპლიტუდის გაძლიერება. ამიტომაც ძირითადი პარამეტრული რეზონანსი გვაქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ერთი სრული რხევის განმავლობაში ადამიანი იწვევს ზევით და ქვევით 4-ჯერ. როგორ უნდა ხდებოდეს საქანის სიგრძის ცვლილება იმისათვის, რომ წარმოიშვას პარამეტრული რეზონანსი? ცხადია, საქანის სიგრძე უნდა კლებულობდეს წონასწორობის წერტილზე გავლის დროს და მატულობდეს უდიდესი გადახრის წერტილებში. წონასწორობის წერტილში საქანის ტვირთის აწევის დროს გარეშე ძალა ასრულებს მუშაობას და აღიღებს პოტენციალურ ენერგიას. უდიდესი გადახრის წერტილში დაწევის დროს თვით საქანი ასრულებს მუშაობას (პოტენციალური ენერგია კლებულობს). მაგრამ აწევის დროს შესრულებული მუშაობა, ე. ი. საქანისადმი გადაცემული ენერგია მეტია, ვიდრე დაწევის დროს წართმეული ენერგია, ვინაიდან საქანის ძაფი წონასწორობის მდებარეობაში მეტად არის დაჭიმული, ვიდრე გადახრის წერტილებში. საქანს პერიოდულად გადაეცემა ენერგია, რომელიც იწვევს რხევის ამპლიტუდის გადიდებას.

§ 84. რხევითი მოძრაობის გრაფიკული წარმოდგენა

რხევითი მოძრაობა, ისე როგორც ყოველი მოძრაობა, შეიძლება გრაფიკულად წარმოვადგინოთ. ამისათვის ჩვეულებრივად იღებენ ორ ურთიერთმართობ ღერძს; ერთ-ერთ მათგანზე გადაზომივენ დროს, ხოლო მეორეზე—კოორდინატს, სიჩქარეს ან აჩქარებას. ასე მიიღება გზის, სიჩქარის ან აჩქარების გრაფიკები. რომელთა სახე ჰარმონიული რხევისათვის მოცემულია 175-ე ნახაზზე. ყველა ისინი გამოიხატებიან სხვადასხვა ზომის და საწყისი ფაზის მქონე სინუსოიდის საშუალებით. მაგრამ, გარდა ასეთი გრაფიკული წარმოდგენისა, არსებობს კიდევ რხევის სხვა სახის გრაფიკული წარმოდგენა, რომელიც ძალიან ხშირად გამოიყენება რხევითი მოძრაობის განხილვისას, განსაკუთრებით ელექტროტექნიკასა და რადიოტექნიკაში. რხევითი მოძრაობის დამახასიათებელ სიდიდეებად იღებენ ამპლიტუდასა და ფაზას. ჰარმონიულ რხევას წარმოადგენენ შემდეგი სახით:

$$x = A \sin \varphi,$$

სადაც A არის ამპლიტუდა, ხოლო $\varphi = \omega t + \varphi_0$ — ფაზა (φ_0 არის საწყისი ფაზა). მოძრაობის გრაფიკულად წარმოსადგენად განიხილავენ სიბრტყეზე ორ ურთიერთმართობ ღერძს. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია x კოორდინატი (ნახ. 187). ამპლიტუდა გამოისახება A სიდიდის მონაკვეთით, რომელიც გავლებულია კოორდინატთა სათავიდან და რომლის დახრილობის კუთხე ორდინატთა ღერძთან არის φ .



ნახ. 187.

ყოველივე ეს იმას ნიშნავს, რომ რხევითი ნაწილაკის მდგომარეობა გამოხატულია a წერტილით, რომლის A და φ პოლარული კოორდინატები წარმოადგენენ რხევის ამპლიტუდასა და ფაზას.

დროის ცვალებადობასთან ერთად იცვლება ფაზა და ვინაიდან ჰარმონიული რხევის შემთხვევაში ამპლიტუდა მუდმივია, გამომსახველი წერტილი შემოაწერს წრეხაზს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. φ ფაზის მნიშვნელობა $t=0$ მომენტისათვის მოგვცემს საწყის ფაზას. ვინაიდან ω მუდმივი სიდიდეა, გამომსახველი წერტილის ბრუნვა თანაბარი იქნება. რისი გამომხატველი იქნება ორდინატთა ღერძზე გადაზომი-

ლი მონაკვეთი? ეს მონაკვეთი გამოსახულია ფორმულით $A \cos \varphi$. მეორე მხრივ, x -ის გაწარმოება t -ს მიმართ მოგვცემს სიჩქარეს

$$v = \omega A \cos \varphi.$$

ამიტომაც ორდინატთა ღერძზე გადაზომილი ყოფილა შემდეგი სიდიდე:

$$y = \frac{v}{\omega} = A \cos \varphi.$$

მაშასადამე, განსახილველ დიაგრამაზე აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია კოორდინატი, ხოლო ორდინატთა ღერძზე — სიჩქარის პროპორციული სიდიდე. ტრაექტორიის¹ განტოლება იქნება

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1, \quad (\text{XIII, } 66)$$

რაც გამოხატავს A -რადიუსიან წრესაზს. ზოგჯერ ორდინატთა ღერძზე გადაზომილს არა $\frac{v}{\omega}$ სიდიდეს, არამედ თვით სიჩქარეს, მაშინ (x, v) კოორდინატებში (XIII, 66) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} = 1.$$

ეს უკვე არის ელიფსის განტოლება, რომლის ნახევარღერძებია A და $A\omega$.

სიბრტყეს, რომელზე გატარებულ კოორდინატთა ღერძებზედაც გადაზომილია კოორდინატი და სიჩქარის პროპორციული სიდიდე, ეწოდება ფაზური სიბრტყე². მოძრაობის გამომსახველ წერტილს და მრუდს ეწოდებათ სათანადო³ ფაზური წერტილი და ფაზური მრუდი.

როგორც ვხედავთ, ჰარმონიული მოძრაობის ფაზური მრუდი წარმოადგენს ელიფსს, რომლის შემოვლა წარმოებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

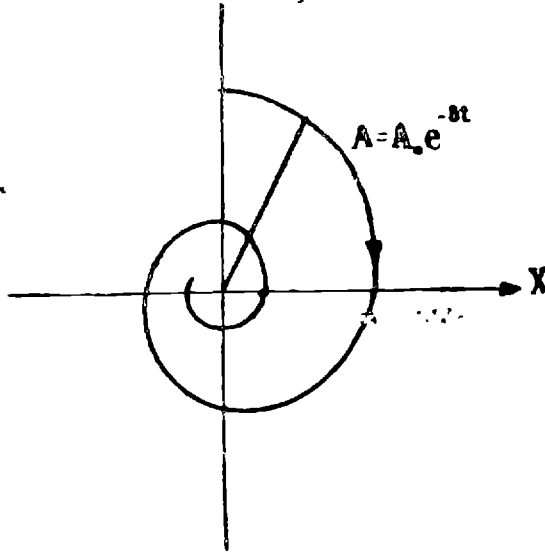
განვიხილოთ ახლა მიღევადი რხევის გრაფიკული წარმოდგენა. როგორც ვიცით, მიღევადი რხევის განტოლებას შემდეგი სახაქვს:

¹ ტრაექტორიის ქვეშ აქ ვგულისხმობთ არა ნამდვილ ტრაექტორიას, არამედ გამომსახველი წერტილის მიერ შემოწერილ მრუდს.

² როგორც ვნახავთ შემდეგში, მოლეკულური (სტატისტიკური) ფიზიკის განხილვის დროს, ფაზურ სიბრტყეში კოორდინატთა ღერძებზე გადაზომილი იქნება კოორდინატი და იმპულსი.

$$x = A e^{-\beta t} \sin \varphi,$$

სადაც $\varphi = \omega t$, თუ დავუშვებთ, რომ საწყისი ფაზა ნულის ტოლია, ეს რხევა იმით განსხვავდება ჰარმონიული რხევისაგან, რომ მისი ამპლიტუდა ($A e^{-\beta t}$) ექსპონენციალურად კლებულობს დროის განმავლობაში. ამის სათანადოდ მისი გამომსახველი წერტილის და-



ნახ. 188.

შორება კოორდინატა სათაგიდან ასევე შემცირდება და მოძრაობის გრაფიკი წარმოგვიდგება ხვიის სახით, რომელიც თანდათან უახლოვდება კოორდინატა სათავეს (ნახ. 188).

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში ორდინატა ლერძზე აღარ იქნება გადაზომილი ნაწილაკის სიჩქარე, ე. ი. ეს გრაფიკი არ იქნება ფაზური მრუდი.

§ 85. ჰარმონიული რხევების შეკრება

როგორც ბუნებაში, ისე ტექნიკაში მრავლად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც აღებული ნივთიერი ნაწილაკი ერთდროულად ასრულებს ორ ან რამდენიმე ჰარმონიულ რხევას. ისმის კითხვა—როგორია ამ რხევათა შეკრების შედეგი. ჩვენ განვიხილავთ ორ მარტივ შემთხვევას—პირველს, როდესაც იკრიბება ერთი წრფის გასწვრივ მიმართული ჰარმონიული რხევები და მეორეს, როდესაც ხდება ურთიერთმართობი რხევის შეკრება.

1. ერთმხრივ მიმართული და ტოლი სიხშირის ჰარმონიული რხევების შეკრება ვთქვათ, ნაწილაკი ერთდროულად ასრულებს

OX ღერძის გასწვრივ მიმართულ ორ ჰარმონიულ რხევას, (ნახ. 189). წარმოვიდგინოთ, მაგალითად, რომ m ნაწილაკი ირხევა O_1 წერტილის მახლობლად და იმავე დროს თვით O_1 წერტილი ირხევა O წერტილის მიმართ. თუ ნივთიერი წერტილის გადახრას O_1 წერტილიდან აღვნიშნავთ x_1 -ით, ხოლო O_1 წერტილის გადახრას O წერტილის მიმართ — x_2 -ით, საერთო გადახრა m ნივთიერი წერტილისა O წერტილიდან იქნება ამ გადახრების ჯამი

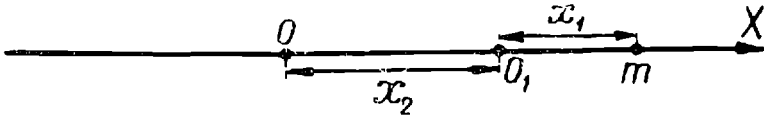
$$x = x_1 + x_2.$$

დავუშვათ, რომ ორივე რხევას აქვს ერთნაირი სიხშირე, მაგრამ სხვადასხვა ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა, ე. ი. მათი განტოლებები

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

გამოსარკვევია, თუ როგორია ასეთი რხევების შეკრების შედეგად მიღებული მოძრაობის ხასიათი. ჩასმა x -ის ფორმულაში გვაძლევს



ნახ. 189.

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{XIII, 67})$$

გამოვარკვიოთ, ხომ არ წარმოადგენს ამ ფორმულით გამოხატული მოძრაობა ისევ ჰარმონიულ რხევას უკვე განსხვავებული ამპლიტუდით და საწყისი ფაზით. ამისათვის დავწეროთ x შემდეგი სახით:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{XIII, 68})$$

და მოვძებნოთ A და φ სიდიდეების ის მნიშვნელობები, რომელთა საშუალებით დროის ყოველი მომენტისათვის დაკმაყოფილდება ტოლობა

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{XIII, 69})$$

რადგანაც ეს ტოლობა მართებული უნდა იყოს დროის ყოველი მომენტისათვის, t -ს მნიშვნელობა ნებისმიერად შეიძლება ავარჩიოთ. ვთქვათ, $t=0$, მაშინ (XIII, 69) ტოლობიდან მივიღებთ

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2.$$

შეგარჩიოთ ახლა t ისე, რომ ωt ტოლი იყოს $\frac{\pi}{2}$ -ისა, მაშინ მივიღებთ

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2;$$

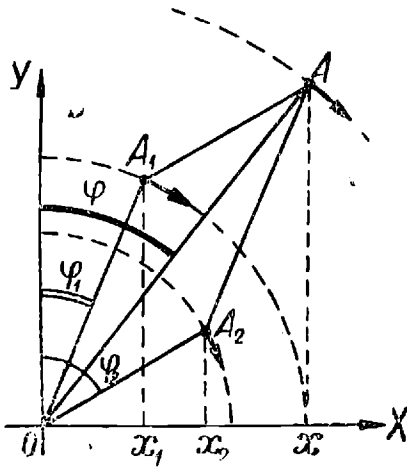
ამ ორი ტოლობიდან ადვილად გამოვითვლით A და φ სიდიდეების მნიშვნელობებს

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (\text{XIII, } 70)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (\text{XIII, } 71)$$

როგორც ვხედავთ, ორი, ტოლი სიხშირის, მაგრამ სხვადასხვა ამპლიტუდის და საწყისი ფაზის მქონე რხევის შეკრება გვაძლევს იმავე სიხშირის ჰარმონიულ რხევას (ფორმ. XIII, 68), რომლის ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა მოცემულია (XIII, 70) და (XIII, 71) ფორმულებით.

(XIII, 70) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ საერთო რხევის ამპლიტუდა დამოკიდებულია შესაკრები რხევების ამპლიტუდებზე და საწყისი ფაზათა სხვაობაზე; ამ დამოკიდებულების უფრო თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად მივმართოთ რხევების გრაფიკულ წარმოდგენას. წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვხატეთ ჰარმონიული რხევა ვექტორით, რომლის სიგრძე ამპლიტუდის ტოლია, ხოლო ორდინატთა ღერძისადმი დახრილობის კუთხე ფაზის ტოლია. ამ ვექტორის პროექცია აბსცისთა ღერძზე გვაძლევს ნაწილაკის x გადახრას. გამოვიყენოთ ეს გრაფიკული წარმოდგენა რხევების შეკრებისათვის. 190-ე



ნახ. 190.

ნახაზზე წარმოდგენილია ორივე შესაკრები რხევა \vec{OA}_1 და \vec{OA}_2 ვექტორებით, რომელთა დახრილობის კუთხეები ორდინატთა ღერძისადმი არის φ_1 და φ_2 (შეკრებას ვაწარმოებთ $t=0$ მომენტში). ავავსოთ \vec{OA}_1 და \vec{OA}_2 ვექტორებზე პარალელოგრამი და გავავლოთ \vec{OA} ვექტორი, რომელიც არის ამ ვექტორების ჯამი. ადვილად შეგვიძლია ორდინატთა ღერძებისადმი მისი დახრილობის კუთხე φ ასოთი. თუ

შის გეგმილს აბსცისთა ღერძზე x -ით აღვნიშნავთ, ნახაზი გვიჩვენებს, რომ

$$x = x_1 + x_2,$$

საიდანაც მივიღებთ

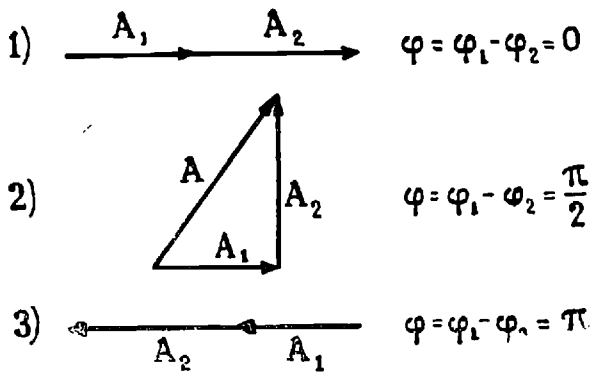
$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2.$$

დაგეგმილება ორდინატთა ღერძზე მოგვცემს

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2.$$

ეს სწორედ ის ტოლობებია, რომლებიც საზღვრავენ საერთო რხევის ამპლიტუდას და საწყის ფაზას. როგორც ვხედავთ, მარეზულტირებელი რხევის ამპლიტუდა მიიღება შესაკრები რხევების ამპლიტუდების გეომეტრული წევრებით, ხოლო საწყისი ფაზა გამოიხატება ამ ამპლიტუდის ორდინატთა ღერძისადმი დახრილობის კუთხით.

ახლა უკვე ნათელია, თუ რატომ არის დამოკიდებული მარეზულტირებელი რხევის ამპლიტუდა შესაკრები რხევების საწყისი



ნახ. 191.

ფაზების სხვაობაზე. ეს ფაზათა სხვაობა გვიხსნის ამპლიტუდების გამომსახველი ვექტორების ურთიერთდახრას და ცხადია, რომ ვექტორების ჯამი დამოკიდებული იქნება ამ ურთიერთდახრაზე. 191-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მარეზულტირებელი ამპლიტუდის სიდიდე შესაკრებ რხევათა საწყისი ფაზების სხვაობისაგან დამოკიდებულებით: 1) თუ $\varphi = \varphi_2$, ამპლიტუდების გამომსახველი ვექტორები ერთნაირი მიმართულებისაა და ამიტომ

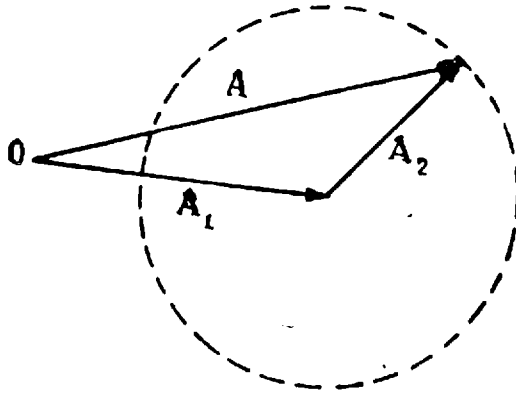
$$A = A_1 + A_2,$$

რაც უშუალოდ (XIII, 70) ფორმულიდანაც გამომდინარეობს.

2) თუ საწყის ფაზათა სხვაობა $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლია, \vec{OA}_1 და \vec{OA}_2 ვექტორები ურთიერთმართობი არიან და A -სათვის მივიღებთ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2.$$

იგივე გამომდინარეობს (XIII, 70) ფორმულიდან.



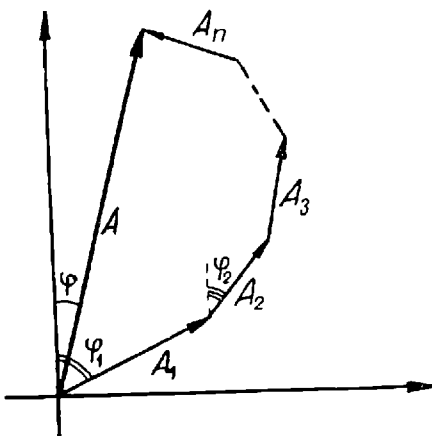
ნახ. 192.

3) თუ საწყისი ფაზები საწინააღმდეგოა, ე. ი. თუ $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, მივიღებთ

$$A = |A_1 - A_2|.$$

ანალოგიურად შეიძლება განხილულ იქნეს სხვა შემთხვევები. 192-ე ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ფაზათა სხვაობის ცვლასთან ერთად ვექტორის ბოლო წერტილი შემოწერს A_2 რადიუსის წრეხაზს \vec{OA}_1 ვექტორის ბოლო წერტილის ირგვლივ.

ადვილად მისახვედრია თუ რა შედეგს მოგვცემს არა ორი, არამედ რამდენიმე, მაგალითად n ჰარმონიული, რხევის შეკრება, თუ მათი ამპლიტუდებია A_1, A_2, \dots, A_n , ხოლო საწყისი ფაზები $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. მარეზულტირებელი რხევა ისევე ჰარმონიული და იმავე სიხშირის იქნება როგორც შესაკრები რხევები, და მისი ამპლიტუდა მიიღე-



ნახ. 193.

ბა როგორც გეომეტრიული ჯამი $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$ ვექტორებისა (ნახ. 193). (XIII, 70, 71) ფორმულების ანალოგიური ფორმულები იქნება:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2 A_1 A_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + 2 A_{n-1} A_n \cos(\varphi_{n-1} - \varphi_n),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + \dots + A_n \sin \varphi_n}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + \dots + A_n \cos \varphi_n}.$$

2. ორი ერთმხრივ მიმართული და მცირედ განსხვავებული სიხშირეების მქონე რხევის შეკრება. როდესაც შესაკრები რხევების სიხშირეები ტოლი არ არის, მარეზულტირებელი რხევა საზოგადოდ უკვე აღარ არის მარტივი ჰარმონიული რხევა. მაგრამ, როდესაც შესაკრები რხევების სიხშირეები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, შეიძლება მარეზულტირებელი რხევა განვიხილოთ მიახლოებით როგორც ჰარმონიული რხევა ნელა ცვლადი ამპლიტუდით. მართლაც, ვთქვათ, იკრიბება ორი რხევა ω_1 და ω_2 სიხშირეებით:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

მეორე განტოლება შეიძლება ასე დავწეროთ:

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_2(t)),$$

სადაც

$$\varphi_2(t) = \varphi_2 - \Delta\omega \cdot t.$$

ამ განტოლებას ისეთი სახე აქვს, თითქოს იგი გამოხატავდეს ω_1 სიხშირის ჰარმონიულ რხევას. სინამდვილეში, რასაკვირველია, ეს ასე არ არის, ვინაიდან ამისათვის საჭირო იქნებოდა, რომ მისი საწყისი ფაზა $\varphi_2(t)$ მუდმივი ყოფილიყო. მიუხედავად ამისა შევკრიბოთ რხევები ისე, როგორც ეს ზემოთ გავაკეთეთ. საერთო „ამპლიტუდისათვის“ მივიღებთ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos\{\varphi_2(t) - \varphi_1\}, \quad (\text{XIII, 72})$$

ხოლო „საწყისი ფაზისათვის“

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2(t)}. \quad (\text{XIII, 73})$$

საერთო რხევის განტოლება იქნება

$$x = A \sin(\omega_1 t + \varphi(t)). \quad (\text{XIII, 74})$$

ცხადია, რომ ეს რხევა არ წარმოადგენს მარტივ ჰარმონიულ რხევას, ვინაიდან ცვალებადია, ე. ი. დროზე დამოკიდებულია როგორც „ამპლიტუდა“, ისე „საწყისი ფაზა“.

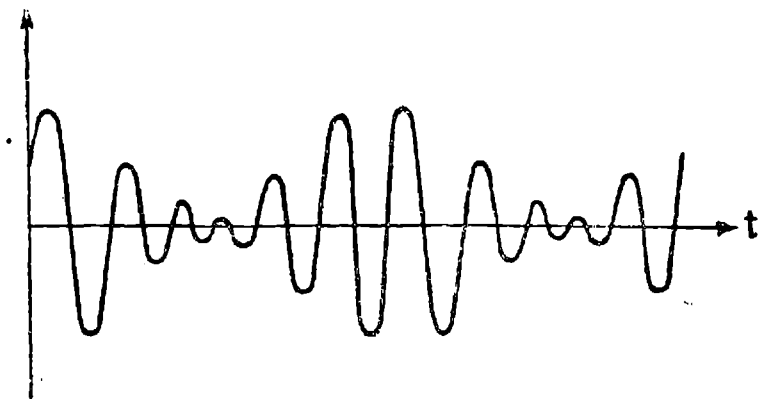
განვიხილოთ ახლა ის კერძო შემთხვევა, როდესაც სიხშირეთა სხვაობა ძალიან მცირეა შესაკრებ სიხშირეებთან შედარებით, ე. ი. დაეუშვათ, რომ

$$\Delta\omega \ll \omega_1.$$

განვიხილოთ „ამპლიტუდის“ გამოსახულებაში შემავალი დროზე დამოკიდებული სიდიდე

$$\cos\{\varphi_2(t) - \varphi_1\} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \Delta\omega t).$$

ვინაიდან $\Delta\omega$ ძალიან მცირეა, ამ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის პერიოდი ძალიან დიდი იქნება შესაკრები რხევების პერიოდთან შედარებით, ე. ი. ის იქნება ძალიან ნელა ცვლადი ფუნქცია; ეს იმას ნიშნავს, რომ სანამ $\cos(\varphi_2(t) - \varphi_1)$ და, მაშასადამე, $A \cdot \cos$ შესამჩნევად შეიცვლება, მარეზულტირებელი x მრავალ რხევას შეასრულებს. ასევე ნელა ცვლადი ფუნქცია იქნება $\text{tg}\varphi(t)$ და ამიტომ გარკვეული დროის განმავლობაში შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მარეზულტირებელი რხევა არის ჰარმონიული რხევა $\omega_1 \approx \omega_2$ სიხშირით. დიდი დროის განმავლობაში „ამპლიტუდისა“ და „საწყისი ფაზის“ ცვალებადობა შესამჩნევი იქნება. როგორც (XIII, 72) ფორმულა გვიჩვენებს, „ამპლიტუდა“ არის პერიოდული ფუნქცია $\Delta\omega$ სიხშირით და $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ პერიოდით. 194-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მცირედ განსხვავებული სიხშირის მქონე ორი რხევის შეკრების შედეგი იმ



ნახ. 194.

შემთხვევაში, როდესაც ამპლიტუდები ტოლია. მარეზულტირებელი რხევის ამპლიტუდა პერიოდულად იცვლება 0 და $2A_1$ მნიშვნელო-

ბათა შორის (ზოგად შემთხვევაში ცვლილება წარმოებს $|A_1 - A_2|$ და $A_1 + A_2$ ფარგლებში).

ამპლიტუდის სიდიდის პერიოდულ ცვლილებას, გამოწვეულს მახლობელი სიხშირის რხევების შეკრებით, ეწოდება ძგერა. განსაკუთრებით კარგად ჩანს ასეთი ძგერა ორი კამერტონის ერთდროულად რხევის დროს, თუ მათი სიხშირეები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. კარგად ისმის ბგერის პერიოდული გაძლიერება და შესუსტება.

პ. ჯერადი სიხშირის მქონე რხევების შეკრება. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც იკრიბება რამდენიმე რხევა ჯერადი სიხშირეებით. ცალკეული რხევების განტოლებები იქნება

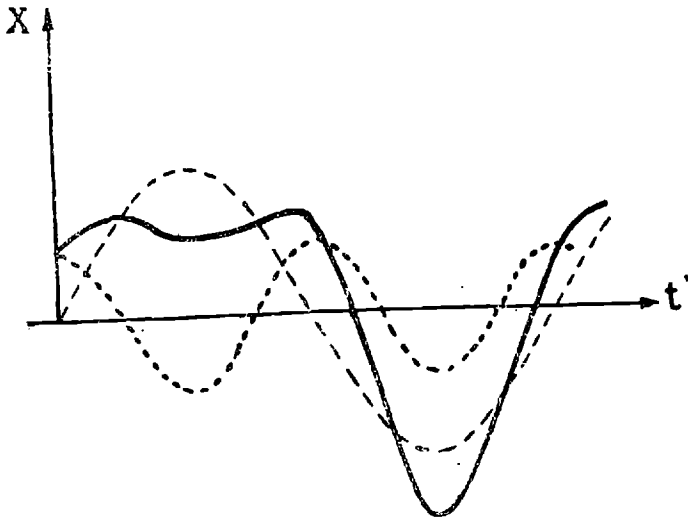
$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \quad \dots$$

$$\dots, \quad x_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

სათანადო პერიოდები იქნება

$$\frac{2\pi}{\omega}, \quad \frac{2\pi}{2\omega}, \quad \dots, \quad \frac{2\pi}{n\omega}.$$

ცხადია, რომ ყველაზე ნაკლები პერიოდი აქვს უკანასკნელ (n -ურ) რხევას, ხოლო ყველაზე დიდი — პირველ რხევას. გასაგებია აგრეთ-



ნახ. 195.

ვე, რომ ყოველი რხევა ისევ დაუბრუნდება თავის საწყის პნიშვნელობას $\frac{2\pi}{\omega}$ პერიოდის განმავლობაში (პირველი რხევა — ერთხელ, მეორე — ორჯერ და ა. შ.); აქედან გამომდინარეობს, რომ მარეზულტირებელი რხევა

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

იქნება პერიოდული მოძრაობა $\frac{2\pi}{\omega}$ პერიოდით. მაგრამ მისი ხასია-

თი დამოკიდებული იქნება ცალკეული რხევების ამპლიტუდებზე და საწყის ფაზებზე. 195-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მარეზულტირებელი რხევა (მთლიანი ხაზი), რომელიც მიღებულია შემდეგი ორი რხევის შეკრებით (პუნქტირირიანი მრუდები)

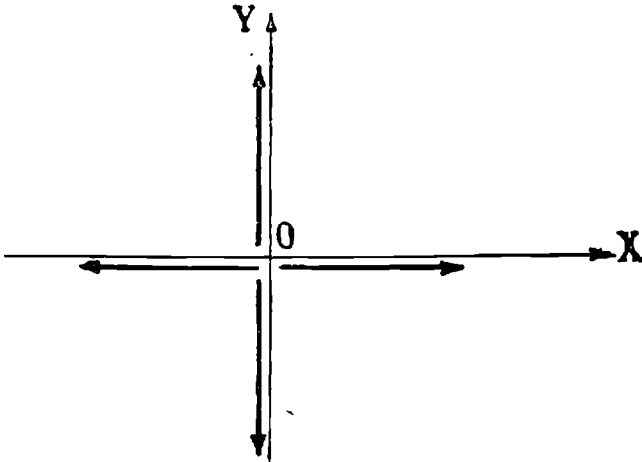
$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{A}{2} \sin(2\omega t + \varphi_2)$$

და

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

4. ურთიერთმართობი და ტოლი სიხშირის რხევების შეკრება.

ბუნებასა და ტექნიკაში ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც აღებული ნივთიერი ნაწილაკი ან სხეული ასრულებს ორ ან რამდენიმე სხვადასხვა მიმართულების რხევას. ჩვენი მიზანია გამოვარკ-



ნახ. 196.

ვით როგორი სახე აქვს ასეთი რხევების შეკრების შედეგად მიღებულ მოძრაობას. სიმარტივისათვის ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი ურთიერთმართობი რხევის შეკრებას.

ვთქვათ, ნივთიერი წერტილი ასრულებს ერთდროულად ორ რხევას OX და OY ღერძების გასწვრივ, O წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად (ნახ. 196). ვთქვათ აგრეთვე, რომ ამ რხევებს

აქვე ერთნაირი სიხშირე, მაგრამ სხვადასხვა ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა.

ცხადია, რომ ამ ორი რხევის შედეგად ნაწილაკი იმოდრავებს XOY სიბრტყეში, მაგრამ საზოგადოდ მისი მოძრაობა არ იქნება წრფივი რხევა. დავწეროთ ამ ორი რხევის განტოლება:

$$\begin{aligned}x &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\y &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}\tag{XIII, 75}$$

ჯერ გამოვარკვეოთ როგორი სახე აქვს მარეზულტირებელი მოძრაობის ტრაექტორიას. ამისათვის (XIII, 75) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დრო, რისთვისაც გადავწეროთ ისინი ასეთი სახით:

$$\begin{aligned}\frac{x}{A_1} &= \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1, \\ \frac{y}{A_2} &= \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2\end{aligned}$$

გავამრავლოთ პირველი განტოლება $\sin \varphi_2$ -ზე, მეორე $\sin \varphi_1$ -ზე და გამოვაკლოთ პირველს მეორე, მივიღებთ

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \sin \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\tag{XIII, 76}$$

პირველი განტოლების გამრავლებით $\cos \varphi_2$ -ზე, ხოლო მეორისა $\cos \varphi_1$ -ზე, და პირველისათვის მეორის გამოკლებით ასევე მივიღებთ

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\tag{XIII, 77}$$

(XIII, 76) და (XIII, 77) განტოლებების კვადრატში აყვანით და შეკრებით საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).\tag{XIII, 78}$$

ასეთია ტრაექტორიის განტოლება. ადვილად გამოსარკვევია, რომ ის არის ელიფსის განტოლება, რომლის ცენტრი მოთავსებულია კოორდინატთა სათავეში, ე. წ. წონასწორობის მდებარეობაში. მისი სახე და ორიენტაცია დამოკიდებულია საწყისი ფაზათა სხვაობაზე.

განვიხილოთ სხვადასხვა კერძო შემთხვევა.

ა) საწყის ფაზათა სხვაობა 2π -ს ჯერადია: $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$, სადაც n მთელი რიცხვია, მაშინ (XIII, 78) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = 0.$$

იმის გამოსარკვევად, თუ რას გამოხატავს ეს განტოლება, გადავწეროთ ის შემდეგი სახით:

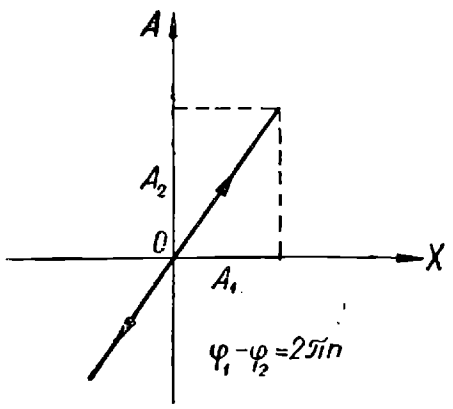
$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

ეს კი არის წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და რომლის კუთხური კოეფიციენტი არის $\frac{A_2}{A_1}$. ჩვენ ვხე-

დავთ, რომ ამ შემთხვევაში რხევების შეკრებამ მოგვცა ისევ წრფი-



ნახ. 197.

ვი რხევა, გარკვეული კუთხით დახრილი შესაკრები რხევებისადმი. ამ რხევას ისეთივე ფაზა აქვს, როგორც შესაკრებ რხევებს, ხოლო მისი ამპლიტუდა არის $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ (ნახ. 197).

ბ) საწყის ფაზათა სხვაობა უდრის π -ს კენტ რიცხვს: $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$, სადაც n მთელი რიცხვია. (XIII, 78) განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = 0$$

ან

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$y = - \frac{A_2}{A_1} x.$$

ეს არის ისევ წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით $-\frac{A_2}{A_1}$.

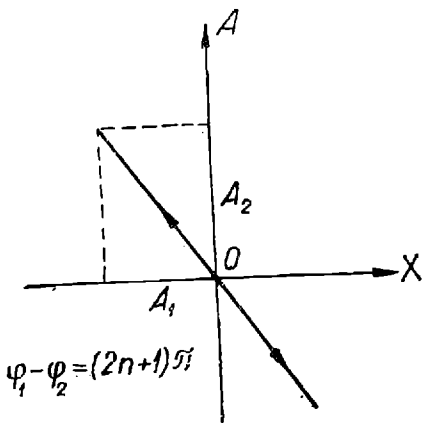
ეს წრფე გადის კოორდინატთა სათავეზე და მდებარეობს მეორე და მეოთხე მეოთხედებში (ნახ. 198).

გ) საწყის ფაზათა სხვაობა არის $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ამ

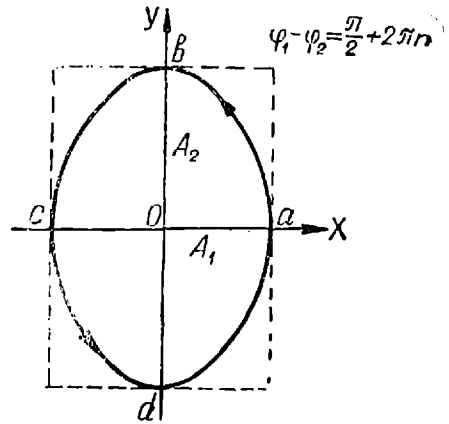
შემთხვევაში განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

ეს არის ელიფსის განტოლება A_1 და A_2 ნახევარღერძებით, რომლებიც მიმართული არიან OX და OY ღერძების გასწვრივ (ნახ. 199). ნაწილაკი მოძრაობს ამ ელიფსზე საათის ისრის მოძრაობის



ნახ. 198.



ნახ. 199.

საწინააღმდეგო მიმართულებით. ასეთი ხასიათის მოძრაობა იმით არის გამოწვეული, რომ რხევა OX ღერძის გასწვრივ წინ უსწრებს რხევას OY ღერძის გასწვრივ პერიოდის მეოთხედით, ე. ი. როდესაც ნაწილაკი აირველი რხევის გავლენით მიაღწევს a წერტილს, მხოლოდ მაშინ იწყება გადახრა OY ღერძის დადებითი მიმართულებით. ცხადია, რომ შესაკრები რხევების ამპლიტუდების ტოლობის შემთხვევაში ($A_2 = A_1$) ელიფსი გადაიქცევა წრეხაზად.

დ) საწყის ფაზათა სხვაობა არის $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. ტრაექტორიის განტოლება ისევ იქნება

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

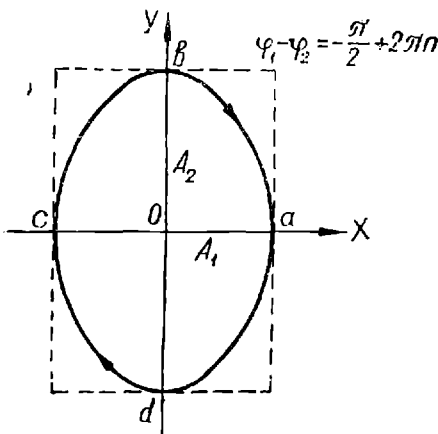
ე. ი. მოძრაობა ისევ ელასტურ იწარმოება, მაგრამ ვინაიდან ახლა OX ღერძის გასწვრივ რხევა ჩამორჩება რხევას OY ღერძის გასწვ-

რივ, მოძრაობა ელიფსზე იწარმოებს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 200). როდესაც ნაწილაკი OY ღერძის გასწვრივ მიაღწევს b წერტილს, მხოლოდ მაშინ იწყება გადახრა OX ღერძის გასწვრივ.

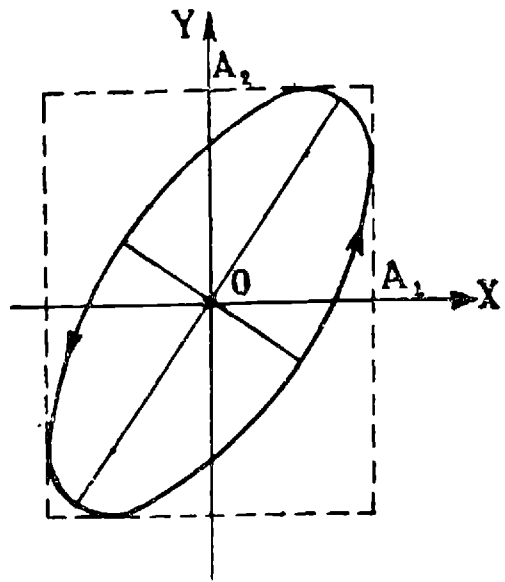
ე) განვიხილოთ დასასრულ შემთხვევა, როდესაც $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ტრაექტორიის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \sqrt{2} \frac{x}{A_1} \frac{y}{A_2} = \frac{1}{2}.$$

ეს არის განტოლება ელიფსისა, რომლის მთავარი ღერძები დახრილია კოორდინატთა ღერძების მიმართ გარკვეული კუთხით. 201-ე და 202-ე ნახაზებზე ნაჩვენებია ამ ელიფსების მდებარეობა და მათზე მოძრაობის მიმართულება. მოძრაობას ელიფსზე, რომე-



ნახ. 200.



ნახ. 201.

ლიც მიიღება ორი ურთიერთმართობი ჰარმონიული რხევის შეკრებით, ეწოდება ელიფსური რხევა. კერძო შემთხვევაში ეს რხევა შეიძლება წრფივ ან წრიულ რხევაზე იქნეს დაყვანილი.

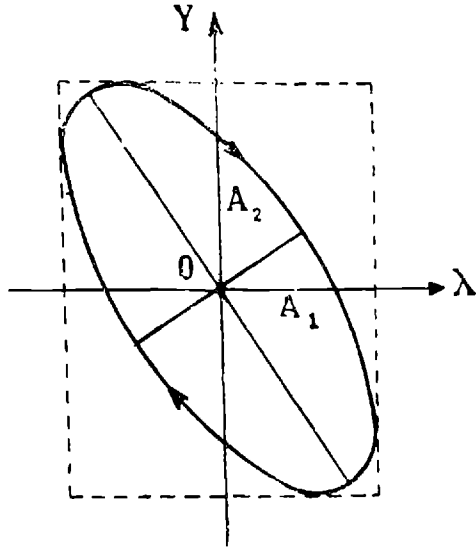
ბ. ურთიერთმართობი და ჯერადი სიხშირის რხევების შეკრება. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შესაკრები რხევების სიხშირეები ჯერადია, ე. ი. შეეფარდებიან ერთმანეთს როგორც მთელი რიცხვები. სათანადო განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$x = A_1 \sin(m \omega t + \varphi_1),$$

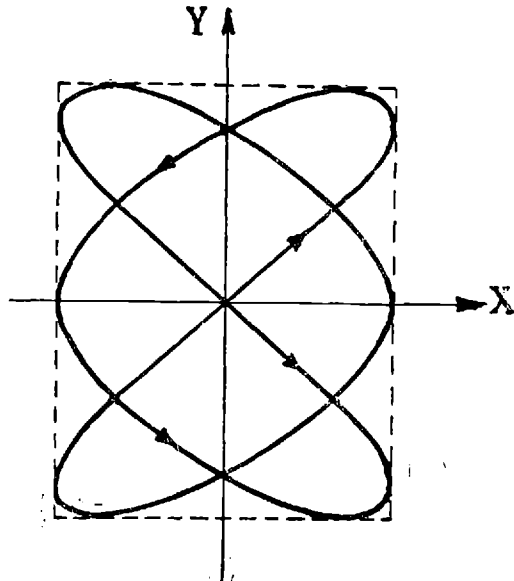
$$y = A_2 \sin(n \omega t + \varphi_2).$$

(XIII, 79)

პირველი რხევის სიხშირე არის $\omega_1 = m\omega$, მეორისა — $\omega_2 = n\omega$. მათი
 შეფარდება არის $\frac{m}{n}$, სადაც m და n მთელი რიცხვებია. ადვილად



ნახ. 202.

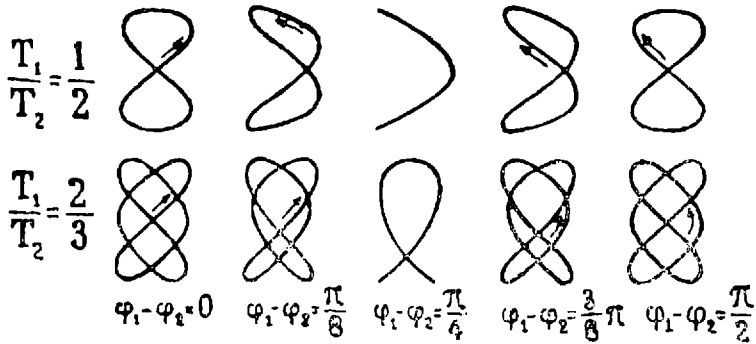


ნახ. 203.

შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ამ რხევების შედეგად მიღებული
 მოძრაობა პერიოდული მოძრაობაა. მართლაც, როგორც x , ისე y
 იღებენ $t_0 + T$ მომენტში იმავე მნიშვნელობას, რაც მათ ჰქონდათ

t_0 მომენტში, სადაც $T = \frac{2\pi}{\omega}$. იმისდა მიხედვით, თუ როგორია n

და n რხევების შეფარდება, მივიღებთ სხვადასხვა სახის ჩაკეტილ მრუდებს (ნახ. 203); ამ მრუდებს ლისაჟუს ფიგურები ეწოდებათ. მათი განტოლების გამოყენას ჩვენ არ შევუდგებით, აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ სიხშირეების შეფარდება ადვილად მიიღება შემდე-



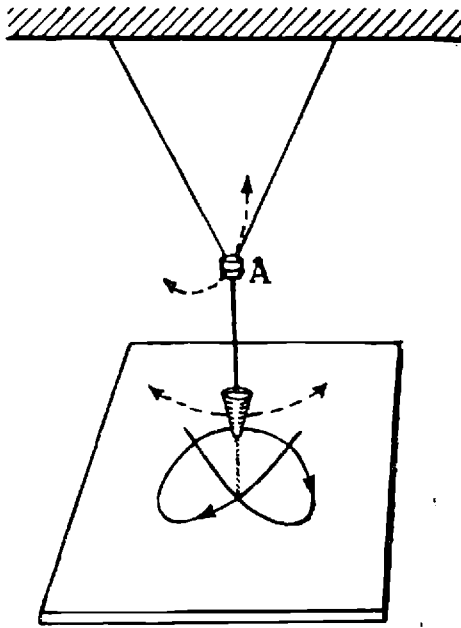
ნახ. 204.

გი წესით: აღებული უნდა იქნეს ყველაზე სიმეტრიული მრუდი მოცემული საწყის ფაზათა სხვაობისათვის და უნდა დავითვალოთ რამდენჯერ ეხება მრუდი მის ირგვლივ შემოწერილი მართკუთხედის გვერდებს, რომლებიც კოორდინატთა ღერძების პარალელურია. თუ OX ღერძის პარალელურ გვერდს მრუდი შეეხო n -ჯერ, ხოლო OY ღერძის პარალელურ გვერდს m -ჯერ, OX და OY ღერძების გასწვრივი რხევების სიხშირეების შეფარდება იქნება $\frac{m}{n}$. მა-

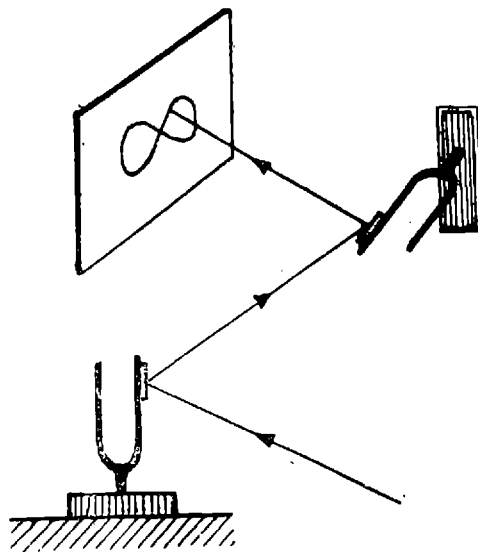
გალითად, 204-ე ნახაზზე მრუდი ეხება ვერტიკალურ გვერდს 3-ჯერ, ხოლო ჰორიზონტალურ გვერდს — 2-ჯერ. ამიტომ სიხშირეთა შეფარდება იქნება $\frac{3}{2}$. სიხშირეთა მოცემული შეფარდებისათვის, თუ საწყის ფაზათა სხვაობა იცვლება, მრუდი იცვლის თავის სახეს, როგორც ეს ნაჩვენებია 204-ე ნახაზზე.

ლისაჟუს ფიგურების განხორციელება მრავალი საშუალებით არის შესაძლებელი. ყველაზე მარტივია ორმაგი საქანი (ნახ. 205), რომელსაც შეუძლია სხვადასხვა სიხშირით რხევა ორი ურთიერთმართობი მიმართულებით. საქანზე ჩამოკიდებული ძაბრიდან იყრება ქვიშა, რომლის კვალიც ჰორიზონტალურ დაფაზე გვაძლევს ლისაჟუს ფიგურებს. სიხშირეთა შეფარდების ცვლილება შესაძლებელია საქანის სიგრძის ცვლით A რგოლის საშუალებით.

206-ე ნახაზზე მოყვანილია დანადგარის სქემა, რომელმაც ლისაჟუს ფიგურების ოპტიკური მეთოდით მიღების საშუალებას იძლევა.



ნახ. 205.



ნახ. 206.

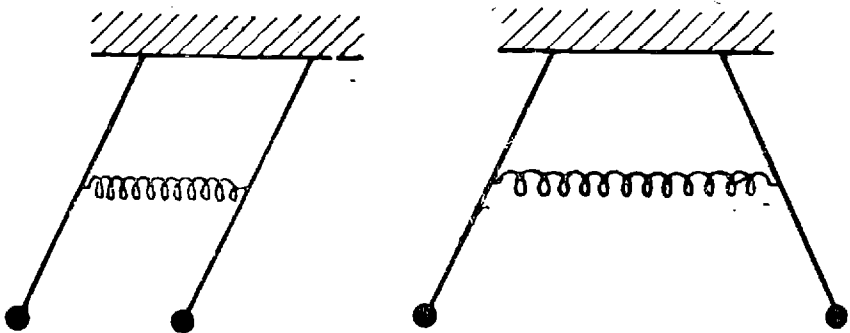
ორ ურთიერთმართობულად რხევად კამერტონზე დამაგრებული სარკეებიდან არეკლილი სინათლის სხივი ეკრანზე იძლევა ლისაჟუს

ფიგურას, რომლის სახე დამოკიდებულია კამერტონების რხევათა სიხშირეების შეფარდებაზე.

თუ შესაკრებ რხევათა სიხშირეების შეფარდება რაციონალური არ არის, მაშინ ტრაექტორია აღარ იქნება ჩაკეტილი და ლისაყუს ფიგურების მაგიერ მივიღებთ მრუდს, რომელიც მთლიანად ავსებს სიბრტყია გარკვეულ არეს.

§ 86. ბმული რხევები

განვიხლოთ ახლა რხევები, რომლებიც შეიძლება შეასრულოს რამდენიმე ნაწილისაგან შემდგარმა სისტემამ. თუ ნაწილაკებს შორის არავითარი ურთიერთქმედება არ არის, მაშინ ისინი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შეასრულებენ რხევებს, რომელთა ხასიათი უკვე გამოკვეთილი იყო წინა პარაგრაფებში. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როდესაც ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედებაა და ეს ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ნაწილაკების მდებარეობაზე ან სიჩქარეზე, მათი რხევის ხასიათი შეიცვლება და ერთი ნაწილაკის რხევა დამოკიდებული იქნება მეორე ნაწილაკის რხევაზე. ამ შემთხვევაში



ნახ. 207.

ვევაში ამბობენ, რომ ნაწილაკები ასრულებენ ბმულ რხევებს. ბმული რხევების მარტივ მაგალითს წარმოადგენენ ორი ისეთი საქანის რხევები, რომლებიც დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ზამბარით (ნახ. 207).

თუ საქანებს შეუძლიათ რხევა მხოლოდ ნახაზის სიბრტყეში, ყოველ მათგანს ექნება ერთი თავისუფლების ხარისხი, მთელ სისტემას კი ექნება ორი თავისუფლების ხარისხი. მათი მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება s_1 და s_2 გადახრებით წონასწორობის მდებარეობიდან. ყოველ მათგანზე, გარდა სიმძიმის ძალისა, მოქმედებს კიდევ ზამბარის გაჭიმვით გამოწვეული ძალა, რომელიც მით უფ-

რო მეტია, რაც უფრო მეტადაა გაჭიმული ზამბარა. მეორე მხრივ, ცხადია, რომ ზამბარის გაჭიმვა პროპორციულია გადახრების სხვაობისა და ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ საქანებზე მოქმედი დამატებითი ძალები გამოისახება შემდეგი ფორმულებით:

$$F_1 = -\lambda(s_1 - s_2), \quad (\text{XIII}, 80)$$

$$F_2 = -\lambda(s_2 - s_1).$$

ცხადია, ეს ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოა. მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \omega_0^2 s_1 = -\lambda(s_1 - s_2), \quad (\text{XIII}, 81)$$

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \omega_0^2 s_2 = -\lambda(s_2 - s_1).$$

ω_0 არის ორივე საქანის საკუთარი სიხშირე (აღებულია ერთისა და იმავე სიგრძის საქანები). სწორედ ის გარემოება, რომ ყოველი საქანის რხევის განტოლებაში შედის მეორე საქანის გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან არის იმის მაჩვენებელი, რომ მათი რხევები ბმულია. ვთქვათ, მეორე საქანი დავამაგრეთ წონასწორობის მდებარეობაში ($s_2 = 0$). მაშინ პირველი საქანის რხევის განტოლება იქნება

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \lambda) s_1 = 0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ პირველი საქანი ამ შემთხვევაში ირხევა $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda}$ სიხშირით. ასეთივე სიხშირე ექნება მეორე საქანს. ცალკეული ნაწილაკების რხევებს, როდესაც სხვა ნაწილაკები დამაგრებული არიან მათი წონასწორობის მდებარეობებში, ეწოდებათ პარციალური რხევები. ჩვენ შემთხვევაში ორივე პარციალურ რხევას ერთი და იგივე სიხშირე აქვს, საზოგადოდ კი პარციალურ რხევებს შეიძლება სხვადასხვა სიხშირე ჰქონდეთ.

როგორი იქნება ნაწილაკების რხევები, თუ არც ერთი მათგან დამაგრებული არ არის? ცხადია, რომ ამ რხევების ხასიათი დამოკიდებულია ბმაზე და საწყის პირობებზე. ხომ არ შეიძლება ისეთი საწყისი პირობები შევარჩიოთ, რომ ყოველი ნაწილაკი ასრულებდეს მარტივ ჰარმონიულ რხევას? ამისათვის საჭიროა, რომ ყოველ განტოლებაში შედიოდეს მხოლოდ სათანადო ნაწილაკის გადახრა. მაგალითად, პირველ განტოლებაში უნდა შედიოდეს მხოლოდ s_1 ;

ამისათვის, ცხადია, რომ s_2 უნდა იყოს s_1 -ის პროპორციული, მართლაც, თუ

$$s_2 = ns, \quad (\text{XIII, 82})$$

პირველი განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \{\omega_0^2 + \lambda(1-n)\} s_1 = 0. \quad (\text{XIII, 83})$$

ეს კი არის მარტივი ჰარმონიული რხევის განტოლება, რომლის სიხშირე არის

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda(1-n)}.$$

მეორე ნაწილაკის რხევის განტოლება იქნება

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \left\{ \omega_0^2 + \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\} s_2 = 0. \quad (\text{XIII, 84})$$

ესეც არის $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right)}$ სიხშირის მქონე ჰარმონიული რხევის განტოლება.

მაშასადამე, როდესაც ერთი ნაწილაკის გადახრა მეორე ნაწილაკის გადახრის პროპორციულია, ორივე ნაწილაკი შეასრულებს ჰარმონიულ რხევას, მაგრამ მათი სიხშირეები განსხვავებული იქნება. სიხშირეების განსხვავება გამოიწვევს იმას, რომ დროთა განმავლობაში პროპორციულობა s_2 -სა და s_1 -ს შორის დაირღვევა და ნაწილაკების რხევები აღარ იქნება ჰარმონიული; იმისათვის, რომ ორივე ნაწილაკი ასრულებდეს ჰარმონიულ რხევას, აუცილებელია მათი სიხშირეები ტოლი იყოს. გამოვარკვეოთ n რიცხვის რა მნიშვნელობებისათვის იქნება შესრულებული ეს პირობა. ცხადია, ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა

$$\lambda(1-n) = \lambda \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

ე. ი.

$$n^2 = 1, \quad n = \pm 1,$$

საიდანაც ვღებულობთ ორ შესაძლებლობას

$$s_2 = s_1 \quad (\text{XIII, 85})$$

და

$$s_2 = -s_1 \quad (\text{XIII, 86})$$

მხოლოდ ამ ორ შემთხვევაში იქნება ორივე ნაწილაკის (საქანის) რხევა სტაციონარული ჰარმონიული რხევა. პირველ შემთხვევაში ორივე ნაწილაკი ყოველთვის ერთი და იმავე სიდიდით და ერთნაირი მიმართულებით არის გადახრილი (ნახ. 207). მეორე შემთხ-

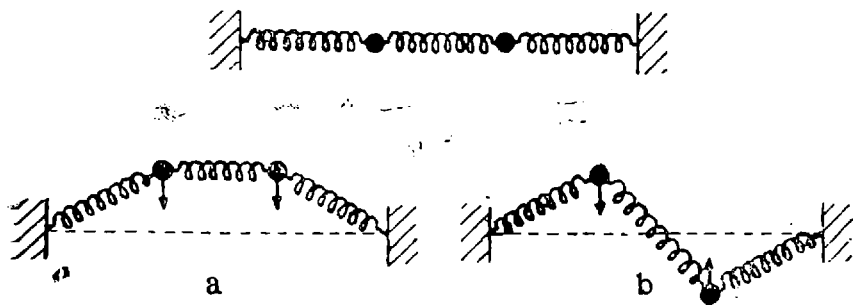
გვერდში გადახრა ერთისა და იმავე სიდიდისაა, მაგრამ საწინააღმდეგო მიმართულებით. პირველ რხევას (როცა $s_2 = s_1$) ეწოდება სიმეტრიული, მეორეს (როცა $s_2 = -s_1$) — ანტისიმეტრიული. რხევებს, როდესაც ყოველი ნაწილაკი ასრულებს სტაციონარულ ჰარმონიულ რხევას, ეწოდება ნორმალური რხევები. ჩვენ შემთხვევაში გვაქვს ორი ნორმალური რხევა — სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული. სიმეტრიული რხევის სიხშირე უდრის ნაწილაკის საკუთარ სიხშირეს

$$\omega_s = \omega_0 \quad (\text{XIII, 87})$$

და ნაკლებია, ვიდრე პარციალური სიხშირე. ანტისიმეტრიული რხევის სიხშირე არის

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\lambda} \quad (\text{XIII, 88})$$

და მეტია, ვიდრე პარციალური სიხშირე. ეს გასაგებიცაა, რადგან სიმეტრიული რხევის დროს ზამბარა არ არის გაჭიმული, ე. ი. ბმის არ მოქმედებს, ხოლო ანტისიმეტრიული რხევის დროს ზამბარა



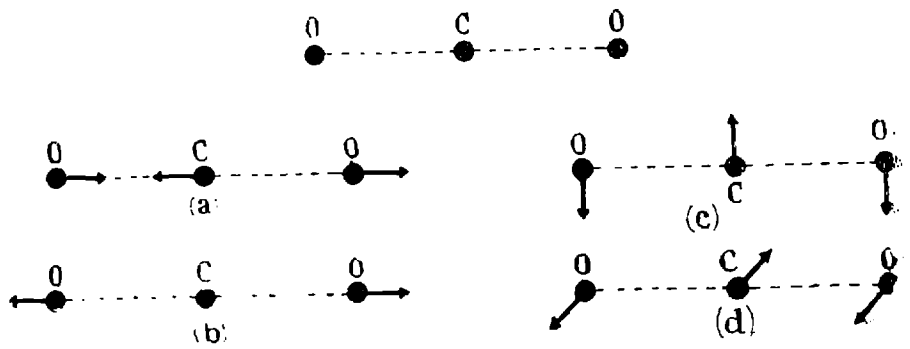
ნახ. 208.

მაქსიმალურად იჭიმება და იკუმშება, რაც იწვევს წონასწორობის მდებარეობისაკენ დამაბრუნებელი ძალის გადიდებას.

ბმული რხევების მაგალითს წარმოადგენს ორი ბურთულას რხევა, როდესაც ისინი დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ზამბარით (ნახ. 208). შუა ზამბარა წარმოადგენს ბმას. ნახაზზე ნაჩვენებია ნორმალური რხევები. 208 a ნახაზზე წარმოდგენილია სიმეტრიული რხევა, როდესაც ორივე ბურთულა ყოველთვის ერთი და იმავე სიდიდითა და მიმართულებით არის გადახრილი. ამ შემთხვევაში შუა ზამბარის დაჭიმულობა უცვლელია და ბურთულები ირხევიან საკუთარი სიხშირეებით. 208 b ნახაზზე გამოსახულია ანტისიმეტრიული რხევა, როდესაც ბურთულები ყოველთვის ერთი სიდიდით, მაგრამ საწინააღმდეგო მიმართულებით არიან გადახრილნი.

ამ შემთხვევაში შუა ზამბარა ყველაზე მეტად იჭიმება და იკუმშება და სათანადო სიხშირეც მეტია.

საზოგადოდ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის შემთხვევაში ყოველთვის არსებობენ ნორმალური რხევები და მათი რიცხვი უდრის რხევითი მოძრაობის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია თანამედროვე ატომურ-მოლეკულური ფიზიკისათვის მოლეკულების შემადგენელი ატომების რხევების განხილვა და სათანადო ნორმალური რხევების მოძებნა. ატომები მოლეკულაში დაკავშირებულია ერთმანეთთან მიზიდვისა და განზიდვის ძალებით (ბმები) და ამიტომ მათ არ შეუძლიათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი რხევების შესრულება—ერთი ატომის რხევა გავლენას ახდენს სხვა ატომების რხევებზე. 209-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სამატომიანი წრფივი მოლეკულის (მაგალითად, CO_2 -ის) ნორმალური რხევები. სამატომიან მოლეკულას სულ აქვს 9 თავისუფლების ხარისხი (ყოველ ატომს, გან-

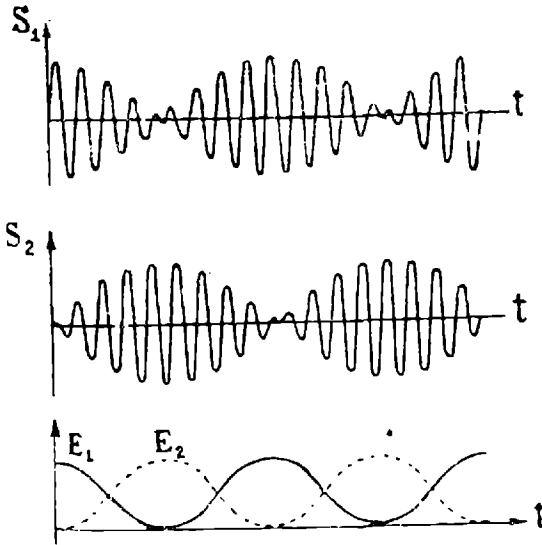


ნახ. 209.

ხილულს როგორც წერტილს, აქვს 3 თავისუფლების ხარისხი). ამ თავისუფლების ხარისხებიდან სამი გადატანილია (ინერციის ცენტრის სამი გადატანითი ხარისხი). გარდა ამისა, მოლეკულას, როგორც მყარ სხეულს, შეუძლია ორი ბრუნვა ატომების განლაგების ხაზის მართობი ღერძების ირგვლივ. რხევისათვის რჩება 4 თავისუფლების ხარისხი. 209-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ოთხი ნორმალური რხევა: 1. (209 a) ნორმალური რხევა ანტისიმეტრიულია მოლეკულის ცენტრის მიმართ—ერთი ჟანგბადის ატომი რომ უახლოვდება ცენტრს, მეორე შორდება; 2. (209 b) ნორმალური რხევა სიმეტრიულია; 3. (209 c) და (209 d) ნორმალური რხევები წარმოადგენენ ურთიერთმართობ სიბრტყეში წარმოებულ გამლუნავ რხევებს (ამ რხევების დროს ატომები აღარ მდებარეობენ ერთ სწორ ხაზ-

ზე). მათი სიხშირეები ტოლია. ანტისიმეტრიულ რხევას უფრო მეტი სიხშირე აქვს, ვიდრე სიმეტრიულს.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როდესაც საწყისი პირობები ისეთია, რომ სისტემა არ ასრულებს ნორმალურ რხევას. ცხადია, ამ შემთხვევაში ნაწილაკების რხევა აღარ იქნება სტაციონარული და არც ჰარმონიული. თუ, მაგალითად, ერთი საქანი საწყის მომენტში წონასწორობის მდებარეობაშია, ხოლო მეორე საქანი მაქსიმალურად გადახრილია, ჩვენ დავინახავთ, რომ მეორის რხევის განმავლობაში პირველი საქანიც იწყებს თანდათანობით რხევის გაძ-



ნახ. 210.

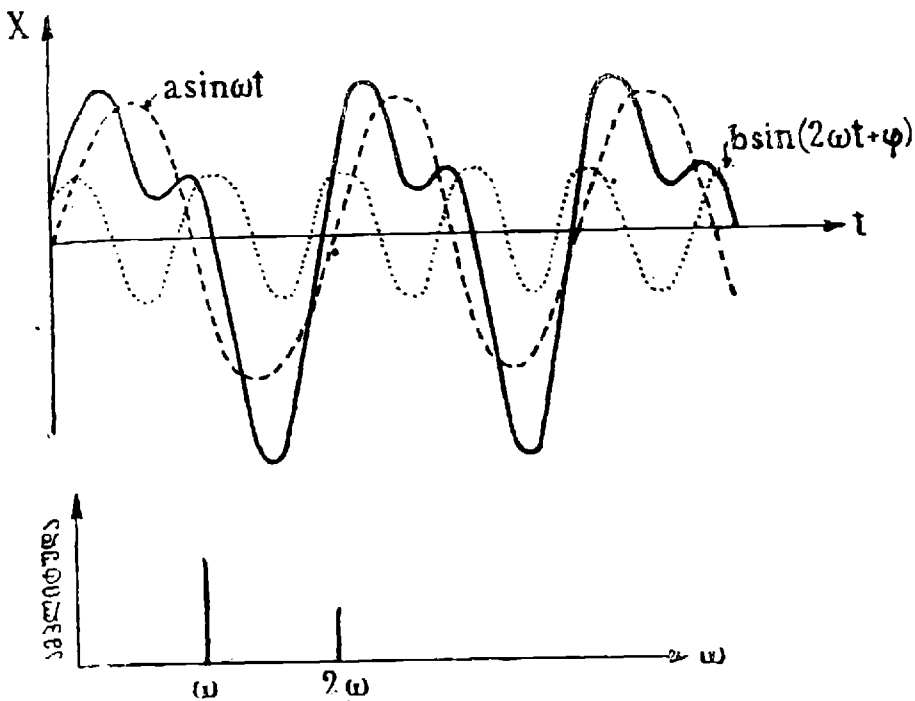
ლიერებას. მეორე საქანის რხევის ამპლიტუდა თანდათან მცირდება, პირველის ამპლიტუდა კი სათანადოდ იზრდება. ბოლოს, დადგება მომენტი, როდესაც მეორე საქანი გაჩერდება, ხოლო პირველის რხევა მაქსიმალური სიძლიერის იქნება. შემდეგ დაიწყება შებრუნებული პროცესი: შესუსტდება პირველი საქანის რხევა და ისევ გაძლიერდება მეორე საქანის რხევა. ეს გადაცემა მოძრაობისა ერთი საქანიდან ან საზოგადოდ ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე განუწყვეტლად იწარმოებს, სანამ ხახუნის ძალების გავლენით მოძრაობა საერთოდ არ შეწყდება. 210-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ნაწილაკების რხევების გრაფიკები განსახილველი მოძრაობის შემთხვევაში. ნათლად ჩანს ერთი ნაწილაკის რხევის შესუსტება და მეორის რხევის გაძლიერება. ასეთი რხევების დროს წარმოებს ენერგიის გადაცემა ერთი ნაწილაკიდან მეორეზე და შებრუნებით.

§ 87. ნაზისმიერი მოძრაობის დაშლა ჰარმონიულ რხევებად

რხევების შეკრების განხილვის დროს ჩვენ გამოვარკვეით, რომ რამდენიმე ჰარმონიული რხევის შეკრება გვადლევს საკმაოდ რთული ხასიათის პერიოდულ მოძრაობას, რომლის სახე დამოკიდებულია შესაკრები რხევების სიხშირეზე, ამპლიტუდაზე და საწყის ფაზაზე სხვაობაზე. ბუნებრივად ისმის კითხვა, ხომ არ შეიძლება ნაწილაკის ნებისმიერი მოძრაობა წარმოვიდგინოთ როგორც რამდენიმე ჰარმონიული რხევის ჯამი. ვინაიდან ნებისმიერი მოძრაობის განტოლება გამოისახება ფორმულით

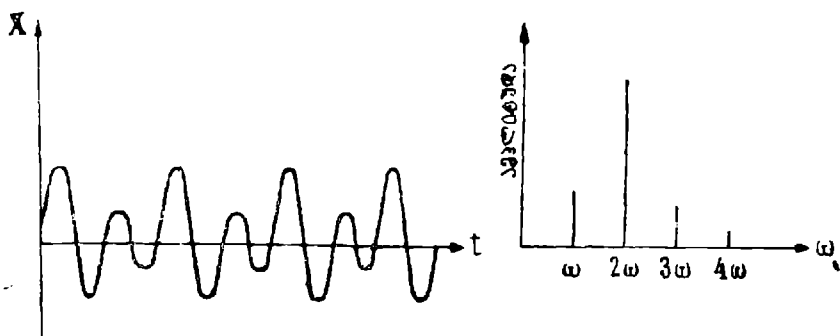
$$x = f(t),$$

დასმული საკითხი დაიყვანება შემდეგ მათემატიკურ ამოცანაზე. შეიძლება თუ არა ნებისმიერი ფუნქცია წარმოვადგინოთ ჰარმო-



ნახ. 211.

ნიული, ე. ი. ტრაგონომეტრიული ფუნქციების ჯამის სახით. უმაღლესი მათემატიკის კურსებში მტკიცდება, რომ ყოველი პერიოდული ფუნქცია, ე. ი. ფუნქცია, რომელიც გარკვეული პერიოდის შემდეგ იმეორებს თავის მნიშვნელობას, შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ჯამის სახით (დაშლა ფურიეს მწკრივად); მაგალითად, 211-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ფუნქცია



ნახ. 212.

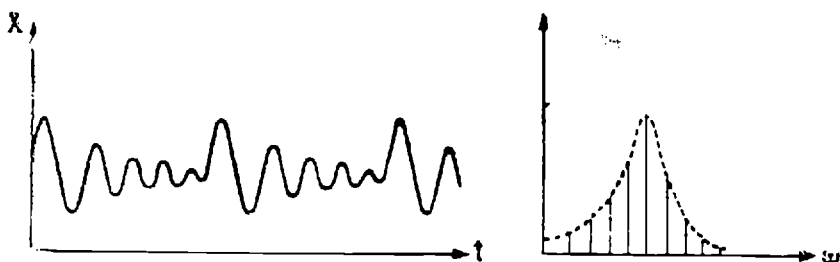
შირის (ჩვენ შემთხვევაში გაორკეცებული სიხშირის) მქონე რხევას ეწოდება ჰარმონიული ობერტონი. ნახაზზე მოყვანილია დასაშლელი მოძრაობის სპექტრი, ე. ი. გრაფიკი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა სიხშირისა და ამპლიტუდის ჰარმონიული რხევისაგან შედგება განსახილველი მოძრაობა. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია სიხშირე, ხოლო ორდინატთა ღერძზე—ამპლიტუდა. როგორც ვხედავთ, განსახილველი მოძრაობის სპექტრი შედგება ორი ხაზისაგან—ერთის სიხშირეა ω , მეორისა— 2ω .

ასევე შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ნებისმიერი პერიოდული მოძრაობა. იგი ყოველთვის შეიძლება დაიშალოს ჰარმონიულ რხევებად, რომელთა სიხშირეები არის ძირითადი ტონის სიხშირის ჯერადი: ω , 2ω , 3ω , ... თვით ძირითადი ტონის სიხშირე თანხვდება დასაშლელი მოძრაობის სიხშირეს: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, სადაც T არის

მისი პერიოდი. რაც უფრო მეტად განსხვავდება განსახილველი მოძრაობა ჰარმონიული მოძრაობისაგან, მით უფრო რთულია მისი სპექტრი, ე. ი. ჰარმონიული მოძრაობების მით უფრო მეტ რაოდენობად იშლება იგი. ჰარმონიულ ობერტონებს სხვადასხვა ამპლიტუდა აქვთ და შეიძლება რომელიმე მათგანის ამპლიტუდა მეტი იყოს, ვიდრე ძირითადი ტონის ამპლიტუდა; მაგალითად, 212-ე ნახაზზე მოყვანილია პერიოდული მოძრაობა და მისი სპექტრი, რო-

მელიც შედგება ოთხი ხაზისაგან ω , 2ω , 3ω და 4ω სიხშირეებით. კიდევ უფრო რთულია საექტრი პერიოდული რხევისა, რომელიც მოცემულია 213-ე ნახაზზე. მისი მონაკვეთი, რომელიც მეორდება T პერიოდის შემდეგ, ძალიან წააგავს მიღვევად რხევას; მისი სპექტრი შედგება სხვადასხვა ამპლიტუდის მქონე ჰარმონიული მდგენლებისაგან. ამპლიტუდების ბოლო წერტილებზე გავლებული პუნქტირის ხაზი გვიჩვენებს ამპლიტუდის ცვალებადობას სიხშირის მიხედვით.

როგორც ვხედავთ, ყოველი პერიოდული მოძრაობა შეიძლება დაიშალოს ჰარმონიულ რხევებად, რომელთა სიხშირეები ერთმანეთის ჯერადია, ამპლიტუდების სიდიდე კი დამოკიდებულია მოძ-



ნახ. 213.

რაობის ხასიათზე. შესაძლებელია შემთხვევები, როდესაც ზოგიერთი ჰარმონიული ობერტონის ამპლიტუდა ნულის ტოლია, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ამ სიხშირის ჰარმონიული რხევა არ შედის დაშლაში (არის შემთხვევები, როდესაც ძირითადი ტონიც კი არ შედის დაშლაში).

ბუნებრივად ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით წარმოვადგინოთ არაპერიოდული მოძრაობა? განვიხილოთ, მაგალითად, არაპერიოდული მოძრაობა, რომლის განტოლება არის

$$x = A(1 - \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (\text{XIII, 89})$$

ეს მოძრაობა შეიძლება ჩავთვალოთ ω სიხშირის „ჰარმონიულ“ რხევად, რომლის ამპლიტუდა

$$A(1 - \sin \Omega t)$$

თვითონ იცვლება პერიოდული კანონის მიხედვით. ეს რხევა შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$x = A \sin \omega t + \frac{A}{2} \sin(\omega + \Omega)t - \frac{A}{2} \sin(\omega - \Omega)t, \quad (\text{XIII, 90})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ იგი შედგება სამი ჰარმონიული რხევისაგან, სიხშირეებით ω , $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$, რომლებიც არ არიან ერთმანეთის ჯერადი. ეს თვისება, რომ მისი შემადგენელი ჰარმონიული რხევების სიხშირეები არ არიან ერთმანეთის ჯერადი, დამახასიათებელია ყოველი არაპერიოდული რხევისათვის. ნებისმიერი არაპერიოდული მოძრაობის ზოგად შემთხვევაში მისი შემადგენელი ჰარმონიული რხევების რიცხვი შეიძლება უსასრულოდ დიდი იყოს, ხოლო სათანადო სიხშირეები შეიძლება ნებისმიერად ახლოს იყვნენ ერთმანეთთან; მაგალითად, მიღვეადი აპერიოდული რხევა, რომლის განტოლებაა

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

შეიცავს უსასრულოდ მახლობელი სიხშირეების მქონე ჰარმონიული რხევების უსასრულო რიცხვს. სათანადო სპექტრი იქნება უწყვეტი.

გრავიტაციული ურთიერთქმედება

**§ 88. გრავიტაციული ურთიერთქმედების ხასიათი
და ნიუტონის კანონი**

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ სხეულთა ურთიერთქმედების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს სახეს ე. წ. გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას. მას ხშირად აგრეთვე მსოფლიო მიზიდულობას უწოდებენ. თუმცა ამ ურთიერთქმედებით გამოწვეული მოვლენები (სხეულების ვარდნა დედამიწაზე, გასროლილი სხეულების მოძრაობა, პლანეტების და სხვა ციური სხეულების მოძრაობა, ზღვების მიმოქცევა და მრავალი სხვა) დიდი ხანია ცნობილი იყო ადამიანისათვის, მხოლოდ მე-17 საუკუნეში დიდი ინგლისელი ფიზიკოსის ი. ნიუტონის მიერ პირველად იქნა გამორკვეული მისი უნივერსალური ხასიათი და დადგენილი მისი განმსაზღვრელი კანონი. მას შემდეგ, რაც ნიუტონმა დაადგინა მექანიკის ზოგადი კანონები და გამოარკვია ძალასა და აჩქარებას შორის არსებული კავშირი, მის წინაშე შემდეგი კითხვა დაისვა — ხომ არ არსებობს კავშირი დედამიწაზე სხეულის ვარდნის გამომწვევ ძალასა (სიმძიმის ძალას) და იმ ძალას შორის, რომელიც ამოძრავებს ციურ სხეულებს გარკვეულ ორბიტებზე და, კერძოდ, მთვარეს დედამიწის ირგვლივ? დაკვირვებებისა და გამოთვლების საფუძველზე ნიუტონმა დაამტკიცა, რომ ეს ძალები ერთია და, იმავე ბუნებისაა და გამოთქვა მოსაზრება, რომ ეს ურთიერთქმედება ყველა სხეულებს შორის არსებობს. ამ ძალას მან მსოფლიო მიზიდულობის, ანუ გრავიტაციული, ძალა უწოდა (გრავიტას ლათინურად სიმძიმეს ნიშნავს). გრავიტაციული ძალის დამოკიდებულება სხეულების დამახასიათებელი სიდიდეებისა (მასის, ფორმის, სხეულის შიგნით მასების განაწილების) და მანძილისაგან ნებისმიერი სახის სხეულებისათვის საკმაოდ რთულია. ყველაზე მარტივ სახეს ეს დამოკიდებულება ღებულობს ნივთიერი წერტილების შემთხვევაში, როდესაც სხეულების ზომები იმდენად მცირეა

მათ შორის მანძილთან შედარებით, რომ შესაძლებელია მათი უგულვებელყოფა. ამ შემთხვევისათვის ნიუტონმა შემდეგი კანონი ჩამოაყალიბა:

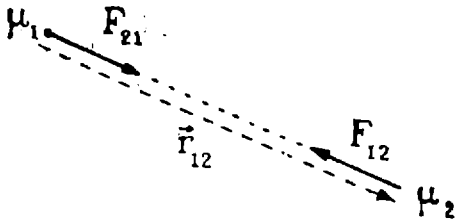
ყოველი ორი ნივთიერი წერტილი მიიზიდება ერთიმეორისაკენ ძალით, რომელიც ამ წერტილებს გრავიტაციული მასების პირდაპირპროპორციული და მათ შორის მანძილის უკუპროპორციულია.

ჩვენ მიერ მოყვანილ ჩამოყალიბებაში, ნიუტონის მიერ ჩამოყალიბებისაგან განსხვავებით, გამოყენებულია გრავიტაციული მასის ცნება. ეს ცნება პირველად გვხვდება და ამიტომ საჭიროა მისი შინაარსის გარკვევა. მოძრაობის კანონების განხილვისას ჩვენ შემოვიღეთ ე. წ. ინერტული მასის ცნება, რომელიც ახასიათებს სხეულების ინერციულობას, ე. ი. მათ თვისებას მეტად თუ ნაკლებად შეიცვალონ სიჩქარე მათზე გარეშე სხეულების მოქმედების შედეგად. მაშასადამე, ინერტული მასა სხეულის სრულიად გარკვეული თვისების დამახასიათებელია: სხეულის მასა მით უფრო მეტია, რაც უფრო ნაკლებად იცვლის იგი სიჩქარეს გარეშე ძალის მოქმედების გავლენით. მსოფლიო მიზიდულობა, ანუ გრავიტაციული ურთიერთქმედება, არავითარ კავშირში არ არის ინერციულობასთან. იგი სხეულების სულ სხვა თვისების გამომხატველია. იგი გვიჩვენებს როგორი ძალით იზიდავს ერთი სხეული მეორეს ან როგორი ძალით მიიზიდება ამ მეორე სხეულის მიერ. ამიტომაც გრავიტაციული ურთიერთქმედების დამახასიათებელი სიდიდე, რომელსაც ჩვენ გრავიტაციული მასა ვუწოდებთ, შეიძლება არ იყოს იგივე, რაც სხეულის ინერტული მასა. იგი უნდა გვიხასიათებდეს სხეულის თვისებას მიიზიდოს სხვა სხეულები ან მიიზიდულ იქნეს სხვა სხეულის მიერ. მაშასადამე, თავისთავად არსაიდან არ გამომდინარეობს, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასები ერთი და იგივეა. მხოლოდ ცდების საშუალებით შეიძლება გაირკვეს მათ შორის არსებული კავშირი. ამ კავშირს ჩვენ შემდეგ დავადგენთ. მისი არსებობა კარგად იყო ცნობილი კლასიკური ფიზიკისათვის, მაგრამ ამავე დროს იგი წარმოადგენდა ფრიალ უცნაურ ფაქტს, სრულიად გაუგებარს იმდროინდელი მეცნიერების თვალსაზრისით.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ნიუტონის კანონი მათემატიკურად. განსახილველი წერტილების გრავიტაციული მასები იყოს μ_1 და μ_2 , ხოლო მათ შორის მანძილი— r . მაშინ გრავიტაციული ძალის სიდიდისათვის ნიუტონის კანონის თანახმად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$F = \gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}, \quad (\text{XIV}, 1)$$

სადაც γ არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია ამ ფორმულაში შემავალი სიდიდეების ერთეულების არჩევაზე. მას გრავიტაციული მუდმივა ეწოდება. მოყვანილი ფორმულა არ გამოხატავს სრულად გრავიტაციული ურთიერთქმედების ხასიათს. მართლაც, გრავიტაციული



ნახ. 214.

ძალა მიზიდვის ხასიათისაა და იგი მოქმედებს წერტილების შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ. იმისათვის, რომ დავწეროთ ფორმულა, რომელიც განსაზღვრავს გრავიტაციულ ძალას როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით, შემდეგნაირად მოვიქცეთ. გავავლოთ μ_1 მასის

მქონე წერტილიდან μ_2 მასის მქონე წერტილისაკენ \vec{r}_{12} რადიუს-ვექტორი (ინდექსები გვიჩვენებენ, რომ ეს ვექტორი მიმართულია პირველი წერტილიდან მეორისაკენ). ასევე შეიძლება განიმართოს \vec{r}_{21} რადიუს-ვექტორი, მიმართული მეორე წერტილიდან პირველი წერტილისაკენ. ცხადია, რომ (ნახ. 214)

$$\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}.$$

ანალოგიური აღნიშვნები შემოვიღოთ გრავიტაციული ძალებისათვის, რომლებიც პირველ და მეორე წერტილებზე მოქმედებენ. \vec{F}_{12} იყოს ძალა, რომლითაც პირველი ნაწილაკი მოქმედებს მეორეზე, ხოლო \vec{F}_{21} ძალა, რომლითაც მეორე ნაწილაკი მოქმედებს პირველზე. მაშინ ნიუტონის კანონი შემდეგი სახით დაიწერება:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = -\gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (\text{XIV}, 2)$$

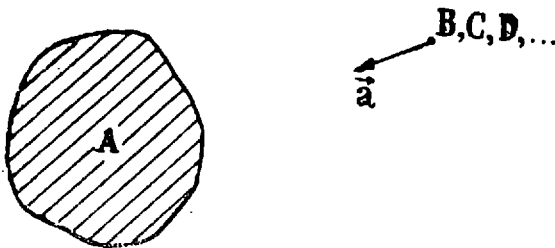
ნიშანი მინუსი იმის მაჩვენებელია, რომ \vec{F}_{12} ძალა \vec{r}_{12} რადიუს-ვექტორის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, ე. ი. რომ მეორე ნაწილაკზე მოქმედი ძალა პირველი ნაწილაკისაკენაა მიმართული (მიზიდვა). აგრეთვე \vec{F}_{21} მიმართულია \vec{r}_{21} -ის საწინააღმდეგოდ. თუკი ჩვენ გვინტერესებს ძალის სიდიდე და არა მიმართულება, საკმარისია დავწეროთ წინა ფორმულები სკალარული სახით. მივიღებთ

$$F_{12} = \gamma \frac{\mu_1 \mu_2}{r_{12}^2} = F_{21},$$

ე. ი. მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულობას. მაშასადამე, (XIV,2) ფორმულა წარმოადგენს ნიუტონის კანონის სრულ გამოხატულებას—იგი გვიჩვენებს მიზიდვის მიმართულებასა და სიდიდეს. სანამ გამოვარკვევდეთ რა ერთეულებით უნდა გაიზომოს გრავიტაციული მასა და როგორია გრავიტაციული მუდმივა, განვიხილოთ გრავიტაციული ურთიერთქმედების ერთი მნიშვნელოვანი თვისება, რომელიც მკვეთრად ასხვავებს მას სხვა სახის ურთიერთქმედებებისაგან (ელექტრომაგნიტური, ბირთვული) და რომელიც საშუალებას მოგვცემს დავაკავშიროთ ერთიმეორესთან გრავიტაციული და ინერტული მასები.

§ 89. გრავიტაციული აჩქარების დამოუკიდებლობა სხეულისაგან. გრავიტაციული და ინერტული მასები

უკვე გალილეის მიერ იყო შემჩნეული, რომ თუ არ მივიღებთ მხედველობაში ჰაერის წინააღმდეგობას, ყველა სხეული ერთი და იმავე აჩქარებით ვარდება დედამიწაზე. როგორც შემდეგი ზუსტი ცდებით გამოირკვა, ვარდნილი სხეულების აჩქარება (დედამიწის მოცემულ ადგილას) სრულებით არ არის დამოკიდებული სხეულების მასებზე, მათ გვარობასა და შემადგენლობაზე. დამტკიცდა, რომ ეს თვისება დამახასიათებელია ყოველი გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის და არა მხოლოდ დედამიწაზე ვარდნილი სხეულებისათვის. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ, რაიმე A სხეულის გავლენით მისგან გარკვეულ მანძილზე მყოფი B ნივთიერი



ნახ. 215.

წერტილი ღებულობს \vec{a} აჩქარებას (ნახ. 215). მოვაცილოთ ახლა A სხეულს B წერტილი და მის მაგიერ იმავე ადგილას მოვათავსოთ სხვა C წერტილი. დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ C წერტილის აჩქარება ისეთივე იქნება, როგორც B წერტილისა. საზოგადოდ რა წერტილიც არ უნდა მოვათავსოთ მოცემულ ადგილას, აჩქარება

ყოველთვის ერთი და იგივე იქნება (უცვლელი A სხეულის შემთხვევაში). გრავიტაციული ურთიერთქმედების ამ შესანიშნავი თვისების დამამტკიცებელ მარტივ ცდას წარმოადგენს ნიუტონის ცნობილი ცდა. სხვადასხვა სხეულის ერთი და იმავე აჩქარებით ვარდნისა ჰაერამოტუმბულ მიწის მიღში. შემდეგში ჩვენ აღვწერთ ზოგიერთ ცდას, რომელიც ნათლად და დიდი სიზუსტით ამტკიცებს გრავიტაციული ურთიერთქმედების ამ თვისებას. გამოჭარკვიოთ რა შედეგს იძლევა გრავიტაციული ურთიერთქმედების ეს თვისება. ვთქვათ, A სხეულის გრავიტაციული მასა არის μ_A . B , C და ა. შ. სხეულების გრავიტაციული და ინერტული მასები იყოს μ_B და m_B , μ_C და m_C და ა. შ. მაშინ ძალები, რომლებითაც A სხეული მოქმედებს B , C და ა. შ. სხეულებზე იქნება (სკალარულად)

$$F_B = \gamma \frac{\mu_A \mu_B}{r^2}, \quad F_C = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{r^2} \text{ და ა. შ.,}$$

სადაც r არის მანძილი B , C და ა. შ. სხეულებიდან A სხეულამდე (ყველასათვის ერთი და იგივე). როგორც ვხედავთ ძალები დამოკიდებულია B , C და ა. შ. სხეულების გრავიტაციულ მასებზე. მაგრამ თუ ვიცით, რა ძალები მოქმედებენ სხეულებზე, შეიძლება გამოვთვალოთ სათანადო აჩქარებანი. ამისათვის ძალები უნდა გაგყოთ სათანადო ინერტულ მასებზე. მივიღებთ

$$a_B = \frac{F_B}{m_B} = \gamma \frac{\mu_A \mu_B}{m_B r^2}, \quad a_C = \frac{F_C}{m_C} = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{m_C r^2}, \dots \text{ (XIV,3)}$$

ზემომოყვანილი თვისების შედეგად ყველა სხეული (B , C , ...) ერთსა და იმავე აჩქარებებს ღებულობს, ე. ი.

$$a_B = a_C = \dots, \text{ (XIV,4)}$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\gamma \frac{\mu_A \mu_B}{m_B r^2} = \gamma \frac{\mu_A \mu_C}{m_C r^2} = \dots,$$

ე. ი.

$$\frac{\mu_B}{m_B} = \frac{\mu_C}{m_C} = \dots \text{ (XIV,5)}$$

მივიღეთ, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასების შეფარდება ყველა სხეულისათვის ერთი და იგივეა—გრავიტაციული მასა

ინერტული მასის პროპორციულია. შებრუნებულად, თუ გრაფიტაციული მასა ინერტული მასის პროპორციულია, ყველა სხეულს ერთი და იგივე აჩქარება ექნება. მართლაც, თუ ერთ სხეულს ორჯერ მეტი გრაფიტაციული მასა აქვს, ვიდრე მეორეს, მაშინ მასზე მოქმედი ძალა ორჯერ მეტი იქნება, ვიდრე მეორეზე მოქმედი. მაგრამ გრაფიტაციული და ინერტული მასების პროპორციულობის თანახმად პირველ სხეულს ორჯერვე მეტი ინერტული მასა ექნება. ამიტომ მისი აჩქარება ისეთივე იქნება, როგორც მეორე სხეულისა.

გრაფიტაციულ და ინერტულ მასათა შორის პროპორციულობის კოეფიციენტი უნივერსალური მუდმივაა, იგი არ არის დამოკიდებული არც სხეულის მასაზე, არც მის გვარობასა და შემადგენლობაზე. მისი რიცხვითი მნიშვნელობა მხოლოდ გრაფიტაციული და ინერტული მასების ერთეულების შერჩევაზე იქნება დამოკიდებული. ინერტული მასის ერთეული ჩვენ უკვე არჩეული გვაქვს—ეს არის გრამი. გრაფიტაციული მასის ერთეული ჯერ არ აგვირჩევია. ცხადია, რომ მისი არჩევა ნებისმიერია, ე. ი. ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი სხეული ავირჩიოთ გრაფიტაციული მასის ეტალონად. მაგრამ ყველაზე უფრო ხელსაყრელია ასეთ ეტალონად ავარჩიოთ ინერტული მასის ეტალონი, ე. ი. მივიღოთ, რომ ერთეულოვანი გრაფიტაციული მასა აქვს ერთეულოვანი ინერტული მასის მქონე სხეულს. ცხადია, რომ ასეთი არჩევის შემდეგ გრაფიტაციული მასა რიცხობრივად ინერტული მასის ტოლი გახდება და შეიძლება ყველა სხეულისათვის მივიღოთ

$$\mu = 1. \quad (\text{XIV}, 6)$$

ჩვენ სწორედ ასეც მოვიქცევით, ე. ი. ჩავთვლით, რომ გრაფიტაციული მასა ინერტული მასის ტოლია.

ზემოთქმული გვიჩვენებს, რომ სხეულის ორი, პირველი შეხედვით ერთმანეთისაგან განსხვავებული თვისება—ინერცია და გრაფიტაცია (სიმძიმე) მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ერთიმეორესთან. რამდენადაც უფრო მეტად ინერტულია სხეული, მით უფრო ძლიერად მიიზიდება იგი სხვა სხეულების მიერ ან თვითონ მიიზიდავს მათ.

ჩვენ იმდენად შევეჩვიეთ გრაფიტაციული ურთიერთქმედების ამ თვისებას, რომ სრულებითაც არ გვიკვირს ეს. მაგრამ სხვა სახის ურთიერთქმედებებთან შედარება გვიჩვენებს, რომ ეს თვისება სრულებით არ არის თავისთავად ცხადი. მოვიგონოთ, მაგალითად, როგორი მდგომარეობაა ელექტრული ურთიერთქმედების შემთხვევაში. ცნობილია, რომ ორი სხეული m_1 და m_2 ინერტული მასებით

შეიძლება მოქმედებდნენ ერთმანეთზე ელექტრულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მათ აქვთ ელექტრული მუხტები. ვთქვათ, ეს მუხტებია e_1 და e_2 , მაშინ კულონის კანონის თანახმად მათ შორის მოქმედი ძალა შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

მსგავსად იმისა როგორც გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში, გრავიტაციული მასების როლს ამ შემთხვევაშიც ასრულებენ მუხტები. რაც უფრო მეტია ერთი ნაწილაკის მუხტი, მით უფრო მეტი ძალით მიიზიდება (ან განიზიდება) იგი მეორე დამუხტული ნაწილაკის მიერ. მაგრამ, გრავიტაციული ურთიერთქმედებისაგან განსხვავებით ეს დიდი ელექტრული მუხტი სრულებითაც არ ნიშნავს დიდ ინერტულ მასას. არავითარი უშუალო კავშირი ელექტრულ მუხტსა და ინერტულ მასას შორის არ არსებობს. ასეთივე მდგომარეობაა ყველა სხვა ურთიერთქმედების შემთხვევაში. მხოლოდ გრავიტაციული ურთიერთქმედება გამოირჩევა იმ განსაკუთრებული თვისებებით, რომ მისი სიძლიერის დამახასიათებელი სიდიდე (გრავიტაციული მასა) ინერტული მასის პირდაპირპროპორციულია.

ყოველივე ზემოთქმული ცხადყოფს გრავიტაციული ურთიერთქმედების განსაკუთრებულ ხასიათს—მის მჭიდრო კავშირს ინერციულობასთან. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კლასიკური ფიზიკისათვის ეს კავშირი სრულიად გაუგებარია. მხოლოდ აინშტაინის ზოგადმა ფარდობითობის თეორიამ გამოარკვეა ამ კავშირის ღრმა საფუძველი და დაადგინა, რომ მატერიალური სხეულების ორი თვისება—გრავიტაცია და ინერცია მატერიის ერთი თვისების ორ მხარეს გამოხატავს. ფიზიკის ზოგად კურსში შეუძლებელია ამ საკითხის დაწვრილებით განხილვა, მისი სირთულის გამო, და ამიტომაც ჩვენ მასზე მეტს აღარ შევჩერდებით.

მას შემდეგ, რაც გამორკვეულია, რომ ერთეულების სათანადო შერჩევით გრავიტაციული მასა შეიძლება ინერტულ მასას გავუტოლოთ, ნიუტონის კანონი ჩვეულებრივ სახეს მიიღებს

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (\text{XIV}, 7)$$

სადაც m_1 და m_2 უკვე ნაწილაკთა ინერტული მასებია. შემდეგში ჩვენ ყოველთვის ამ ფორმულას გამოვიყენებთ. ახლა უკვე აღვიღოთ γ გრავიტაციული მუდმივის განსაზღვრა. თუ წინა ფორმულას სკალარულად დავწერთ, მივიღებთ

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

ვთქვათ, განხილულია ერთიმეორისაგან ერთი სანტიმეტრის მანძილით დაშორებული თითო გრამ-მასის მქონე ორი ნაწილაკი, ე. ი. მივიღოთ, რომ $m_1 = m_2 = 1 \text{ gr}$ და $r_{12} = 1 \text{ cm}$. მაშინ წინა ფორმულა მოგვცემს

$$\gamma = F_{12}.$$

მაშასადამე, გრავიტაციული მუდმივა იზომება იმ ძალით, რომლითაც მიიზიდებიან ერთმანეთისაკენ ერთი სანტიმეტრით დაშორებული და თითო გრამ-მასის მქონე ორი ნაწილაკი. დაკვირვებები და გაზომვები γ -სათვის შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობას იძლევიან:

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \text{ gr}^{-2} \approx \frac{1}{15\,000\,000} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2 \text{ gr}^{-2}.$$

გრავიტაციული მუდმივის ასეთი მცირე მნიშვნელობა (CGS სისტემაში) გვიჩვენებს, რომ ყოველდღიური ცხოვრების პირობებში გრავიტაციული ურთიერთქმედება თითქმის შეუმჩნეველია (გარდა დედამიწის მიზიდვისა). მართლაც, ადვილად შეიძლება გამოვითვალოთ, რომ ძალა, რომლითაც ერთიმეორისაკენ მიიზიდებიან, მაგალითად, თითო კილოგრამი მასის მქონე სხეულები, ერთ სანტიმეტრის მანძილზე იზომება დინის მეასედებით. ასეთი მცირე ძალის შემჩნევა საკმაოდ ძნელია. მხოლოდ დიდი მასის სხეულების შემთხვევაში (ვარსკვლავები, პლანეტები და სხვა) ხდება გრავიტაციული ურთიერთქმედება მნიშვნელოვანი და განმსაზღვრელი მათი მოძრაობისა.

ექსპერიმენტებს, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება γ -ს გაზომა, ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ.

§ 90. გრავიტაციული და ინერტიული მასების პროპორციულობის დამამტკიცებელი ცდები

პირველი ცდა, რომელიც მიზნად ისახავდა გრავიტაციულ და ინერტიულ მასებს შორის კავშირის გამორკვევას, ჩატარებული იყო თვით ნიუტონის მიერ; ამისათვის მან შეარჩია საქანის რხევის პროცესი. განვიხილოთ საქანი, რომლის სიგრძე არის l , ხოლო მასა m (ინერტიული მასა). აღენიშნოთ მისი გრავიტაციული მასა μ -თი. გადავხაროთ საქანის ძაფი φ კუთხით და გამოვითვალოთ მასზე მოქმედი სიმძიმის ძალის ის მდგენელი, რომელიც აბრუნებს

მას წონასწორობის მდებარეობისაკენ (ნახ. 216), როგორც ნახაზი გვიჩვენებს, ეს ძალა იქნება

$$F = -\mu g \sin \varphi.$$

ცხადია, რომ იგი პროპორციულია საქანის ბირთვის გრავიტაციული მასისა. მცირე გადახრებისათვის $\sin \varphi$ შეიძლება შევცვალოთ თვით φ კუთხით და მივიღებთ

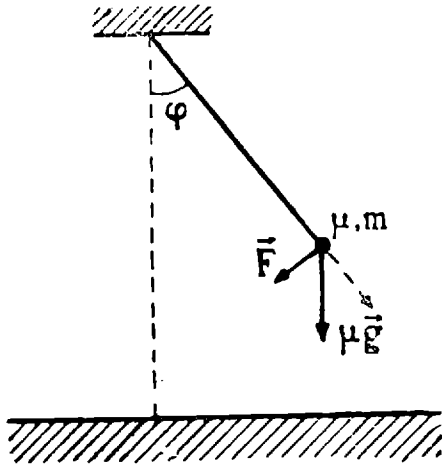
$$F = -\mu g \varphi. \quad (\text{XIV}, 8)$$

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ეს ძალა ტოლი უნდა იყოს საქანის ბირთვის ინერტული მასის ნამრავლისა აჩქარებაზე და ამიტომ მოძრაობის დინამიკური განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\mu g \varphi.$$

რადგან $s = l\varphi$, მივიღებთ

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\mu g \varphi$$



ნახ. 216.

ან

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\mu g}{ml} \varphi = 0. \quad (\text{XIV}, 9)$$

რხევითი მოძრაობის განხილვიდან ჩვენ ვიცით, რომ ეს განტოლება არის ჰარმონიული რხევის განტოლება. რხევის პერიოდისათვის გვექნება

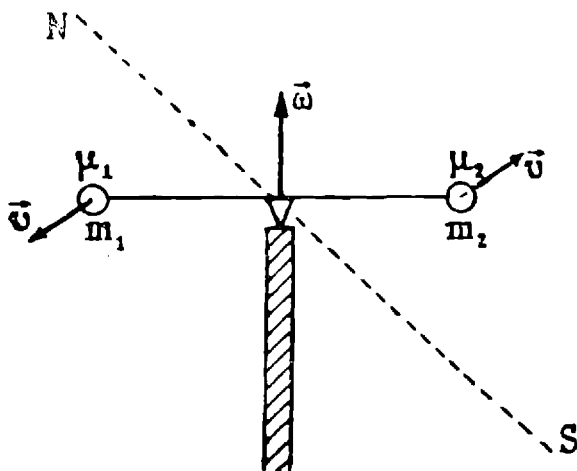
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{\mu g}}. \quad (\text{XIV}, 10)$$

ასეთი უნდა იყოს მათემატიკური საქანის რხევის პერიოდი თუ, რასაკვირველია, თავიდანვე არ არის ჩათვლილი, რომ გრავიტაციული და ინერტული მასები ტოლია. ჩვენ ვხედავთ, რომ საქანის პერიოდი მუდმივი სიგრძის და მუდმივი g -ს შემთხვევაში დამოკიდებული უნდა იყოს ინერტული და გრავიტაციული მასების შეფარდებაზე. სწორედ ამ გარემოებით ისარგებლა ნიუტონმა ინერტულ და გრავიტაციულ მასებს შორის კავშირის გამოსარკვევად. მან დაამზადა სხვადასხვა მასალისა და მასის, მაგრამ ერთისა და იმავე სიგრძის საქანები და ექსპერიმენტულად გაზომა მათი რხევის პერიოდები. აღმოჩნდა, რომ იმ სიზუსტით, რომლითაც მას შეეძლო.

გაზომვების წარმოება, ყველა საქანის პერიოდი ერთი და იგივეა. აქედან ნათლად გამომდინარეობდა, რომ ინერტული და გრავეტაციული მასების შეფარდება არ არის დამოკიდებული სხეულის გვარობასა და მასაზე.

იგივე ცდები, გაცილებით უფრო დიდი სიზუსტით, გაიმეორა ცნობილმა გერმანელმა ასტრონომმა ბესელმა (XIX საუკუნის პირველი ნახევარი) და მიიღო იგივე შედეგი: ინერტული და გრავეტაციული მასების შეფარდება ყველა სხეულისათვის ერთი და იგივეა.

კიდევ უფრო ზუსტად შეამოწმა ეს შედეგი ცნობილმა უნგრელმა ფიზიკოსმა და გეოფიზიკოსმა ეტვეშმა XIX საუკუნის ბოლოს. ამისათვის მან გამოიყენა თავისი გრეხითი სასწორი. გრეხითი სასწორის ბერკეტის ბოლოებზე მან მოათავსა სხვადასხვა ნივთიერების,



ნახ. 217.

შაგრამ ტოლი გრავეტაციული მასის (წონის) სხეულები (ნახ. 217). როგორც ვიცით, ბერკეტის ბრუნვის დროს ამ სხეულებზე იმოქმედებენ მათი ინერტული მასის პროპორციული კორიოლისის ძალები. თუ ინერტული მასა გრავეტაციული მასის პროპორციული არ არის და მათი შეფარდება ნივთიერების გვარობაზეა დამოკიდებული, ბირთვებზე მოქმედი კორიოლისის ძალები ტოლი არ იქნება და ეს განსხვავება შეიძლება შეიმჩნეს ცდის ჩატარების დროს. ეტვეშის გრეხითი სასწორის დიდი მგრძნობიარობის გამო ინერტული და გრავეტაციული მასების პროპორციულობა შემოწმებულ იქნა ძალიან დიდი სიზუსტით (10^{-8}) და ამიტომ ეტვეშის ცდები ითვ-

ლება აღნიშნული პროპორციულობის დამამტკიცებელ ძირითად ცდებად.

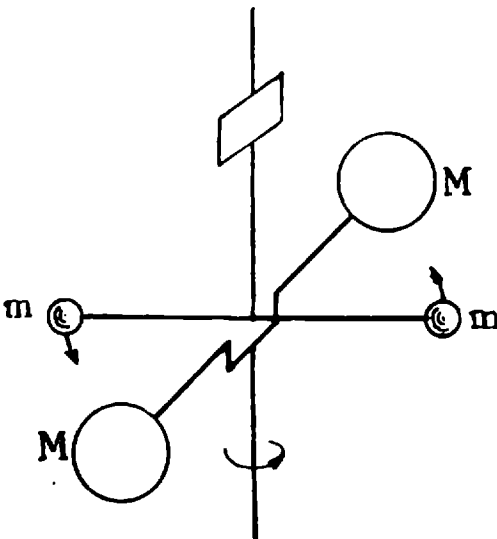
ინერტული და გრავიტაციული მასების ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გავზომოთ სხეულების ინერტული მასები აწონის, ე. ი. მათი წონების შედარებით. თუ არ მივიღებთ მხედველობაში დედამიწის ბრუნვით გამოწვეულ ცენტრიდანულ ძალას, წონა, ე. ი. ძალა რომლითაც სხეული აწვება საყრდენს (ჩვენს შემთხვევაში სასწორის თეთვს), დედამიწის მიზიდვის ძალის ტოლი იქნება. თუ გრავიტაციული ველის დაძაბულობას \vec{g} -თი აღვნიშნავთ, წონისათვის მივიღებთ

$$\vec{P} = \mu \vec{g},$$

სადაც μ არის სხეულის გრავიტაციული მასა. თუ სასწორის თეთვებზე ორი სხვადასხვა სხეულის მოთავსების შემდეგ სასწორი წონასწორობაში დარჩა, სხეულების წონები ტოლი ყოფილა და ამიტომ ტოლი ყოფილა მათი გრავიტაციული მასები. ვინაიდან ინერტული მასები გრავიტაციულის ტოლია, მივიღებთ ინერტული მასების ტოლობას.

§ 91. გრავიტაციული მუდმივის მისპერიმენტული განსაზღვრა

გრავიტაციული მუდმივის რიცხვითი მნიშვნელობა პირველად ექსპერიმენტულად განსაზღვრული იყო ინგლისელი ფიზიკოსის კე-



ნახ. 218.

ვენდიშის მიერ XVIII საუკუნის ბოლოს; ამისათვის მან გამოიყენა გრეხითი სასწორი, რომელიც ახლა ძალიან ხშირად გამოიყენება სუსტი ძალების გასაზომად; ამ სასწორის ძირითად ნაწილს შეადგენს მსუბუქი ბერკეტი, რომლის ბოლოებზე მოთავსებულია ტოლი მასის ლითონის ბირთვები (ნახ. 218). ბერკეტი დაკიდებულია წვრილ ძაფზე, რომელზედაც მიმაგრებულია მსუბუქი სარკე სინათლის

სხივის არეკლისათვის და ძაფის გრეხის კუთხის გაზომვისათვის. მეორე ბერკეტზე დაკიდებული იყო გაცილებით უფრო მეტი მასის ბირთვები; ამ ბერკეტის მობრუნება შესაძლებლობას იძლევა

დაეუახლოვოთ დიდი მასის ბირთვები მცირე მასის ბირთვებს. საწყის მდებარეობაში დიდი ბირთვების შემაერთებელი ხაზი მართობი იყო მცირე ბირთვების შემაერთებელი ხაზისა და ამიტომ ბირთვების მიზიდვა არაერთარ გაელენას არ ახდენდა ბერკეტის მდებარეობაზე. ბერკეტის შემობრუნებით დიდი მასები უახლოვდებიან მცირე მასებს, რაც ცხადია, გამოიწვევს m ბერკეტის მობრუნებას გარკვეული კუთხით. ეს მობრუნების კუთხე განისაზღვრება პირობით, რომ M და m მასების გრაფიტაციული მიზიდვის ძალა ტოლი იყოს ძაფის გრეხის დრეკადობის ძალისა. ვთქვათ, კუთხე, რომელზედაც მობრუნდა ბერკეტი, არის φ . თუ მგრეხავი ძალების მომენტს აღვნიშნავთ N -ით, შეიძლება დავწეროთ თანაფარდობა

$$N = k\varphi,$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია (პროპორციულობა გრეხის მომენტსა და გრეხის კუთხეს შორის, მცირე გრეხის შემთხვევაში არის შედეგი ჰუკის კანონისა, რომელსაც ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ სხეულების მექანიკური თვისებების გარჩევის დროს, მეორე ნაწილში). მეორე მხრივ, გრეხის მომენტი გამოითვლება როგორც მომენტი ღერძის მიმართ m მასებზე მოქმედი გრაფიტაციული ძალებისა. თუ ამ ძალებს F -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$N = F \cdot l,$$

სადა l არის ბერკეტის სიგრძე და იმავე დროს ძალთა წყვილის მხარი. აქედან M და m მასებს შორის მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ

$$F = \frac{k}{l} \varphi.$$

თვით F ძალა გამოითვლება ნიუტონას კანონიდან, თუ ცნობილია M და m მასები და მათ შორის მანძილი (ბერკეტის მობრუნების შემდეგ):

$$F = \gamma \cdot \frac{Mm}{r^2}$$

(r არის მანძილი M და m ბირთვების ცენტრებს შორის). შედარება წინა ფორმულასთან გვაძლევს

$$\gamma = \frac{kr^2}{lMm} \varphi. \quad (\text{XIV}, 11)$$

ყველა სიდიდე ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში შეიძლება გაიზომოს ექსპერიმენტულად, გარდა k კოეფიციენტისა, რომლის განსა-

ზღვრისათვის საჭიროა დამატებითი ცდის ჩატარება; ამისათვის მოვაშორეთ m მასებს დიდი მასები და მოვიყვანოთ გრეხით რხევაში ბერკეტი, ე. ი. განვიხილოთ ძაფზე დაკიდებული ბერკეტი როგორც გრეხითი საქანი. რხევითი მოძრაობისადმი მიძღვნილ თავში ჩვენ უკვე განვიხილეთ გრეხითი რხევები და გამოვიყვანეთ რხევის პერიოდი.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}},$$

სადაც I არის ინერციის მომენტი. თუ არ მივიღებთ მხედველობაში მსუბუქი ბერკეტის მასას, ინერციის მომენტი ორი m ბირთვისა ბრუნვის ღერძის მიმართ იქნება

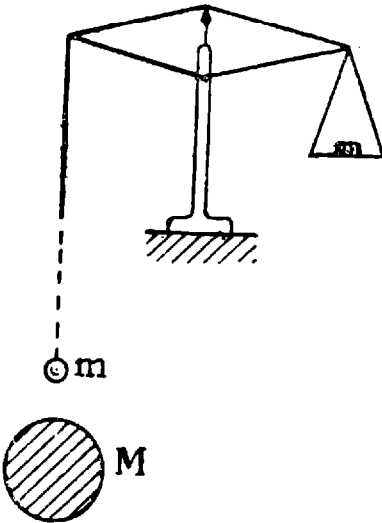
$$I = 2ml^2.$$

აქედან k -სათვის მივიღებთ

$$k = \frac{8\pi^2 ml^2}{T^2}.$$

რხევის პერიოდი ადვილად შეიძლება მოიძებნოს ექსპერიმენტულად, რაც საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ k , მისი მნიშვნელობის ჩასმით

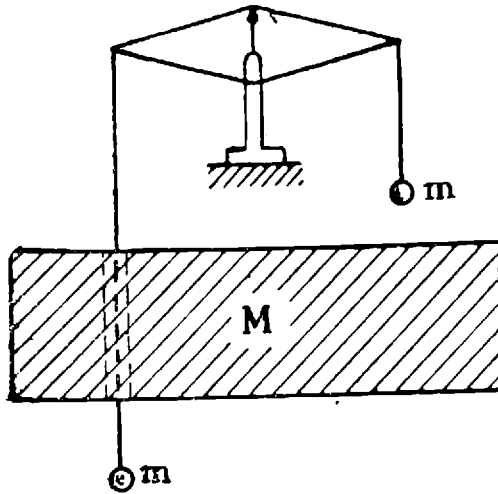
(XIV, 11) ფორმულაში გამოვიტვივით γ გრავიტაციულ მუდმივას. კავენდიშმა თავისი გაზომვების შედეგად მიიღო γ -სათვის შემდეგი მნიშვნელობა: $\gamma = 6,72 \cdot 10^{-8}$. კავენდიშის მეთოდით γ -ს განსაზღვრა მრავალჯერ იყო განმეორებული შემდეგში სხვა მეცნიერების მიერ. გამოყენებული იყო აგრეთვე სხვა მეთოდები; მაგალითად, ჟოლის მიერ XIX საუკუნის 80-იან წლებში გამოყენებულ იქნა შემდეგი მეთოდი. გრძნობიერი სასწორის ქვეშ მოთავსებული იყო $5\frac{1}{2}$ ტონის ტყვიის ბირთვი, რომელიც იზიდავდა სასწორზე გაწონასწორებულ ტვირთს (ვერცხლისწყლის ბირთვს) (ნახ. 219). დამატებითი მიზიდვა ტყვიის ბირთვით იწვევდა წონასწორობიდან სასწორის გადახრას, რისი გაზომვაც ადვილი შესაძლებელი იყო.



ნახ. 219.

კიდევ უფრო ზუსტი გაზომვები ჩაატარეს რიხარცმა და კრიგარმენტელმა 1896 წელს. გრძნობიერი სასწორის ბერკეტზე ჩამო-

კიდებული იყო 1 სკ მასის მქონე ორი ტვირთი. ერთ-ერთი მათგანი მოთავსებული იყო ძალიან დიდი ზომის ტყვიის ნაჭრის ზემოთ, ხოლო მეორე—მის ქვემოთ (ნახ. 220). ტყვიის ეს ნაჭერი



ნახ. 220.

ადიდებდა მის ზემოთ მოთავსებული ტვირთის წონას და ამცირებდა მის ქვემოთ მოთავსებული ტვირთის წონას. წონათა სხვაობის გაზომვა გრავიტაციული მუდმივის გამოთვლის საშუალებას იძლეოდა.

§ 92. გრავიტაციული ურთიერთქმედების კოტენციალური ენერჯია

როგორც ვიცით, ყოველი ურთიერთქმედება ხასიათდება გარკვეული სახის პოტენციალური ენერჯიით, რომელიც, ისევე როგორც ძალა, შეიძლება გამოვიყენოთ ამ ურთიერთქმედების დასახსიათებლად. ვინაიდან ჩვენთვის ცნობილია ზოგადი კავშირი ძალასა და პოტენციალურ ენერჯიას შორის, ძალის გამოხატულებიდან შეიძლება ვიპოვოთ სათანადო პოტენციალური ენერჯია. გამოთვლების გასამარტივებლად შევცვალოთ აღნიშვნები. ერთ-ერთი ნაწილაკის მასა აღვნიშნოთ M -ით და დავუშვათ, რომ იგი კოორდინატთა სათავეშია მოთავსებული. მეორე ნაწილაკი m მასით მოთავსებული იყოს კოორდინატთა სათავიდან გავლებული \vec{r} რადიუს-ვექტორის ბოლოში (ნახ. 221). მაშინ m მასის ნაწილაკზე მოქმედი ძალისათვის მივიღებთ

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r}. \quad (\text{XIV}, 12)$$

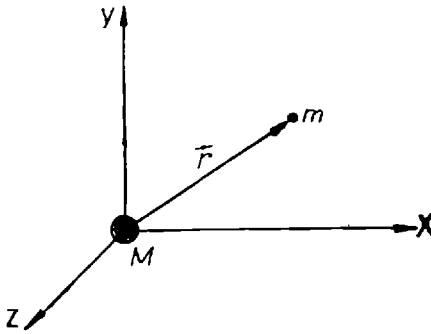
თუ ამ ძალას დავაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ

$$F_x = -\gamma \frac{Mm}{r^3} x, \quad F_y = -\gamma \frac{Mm}{r^3} y, \quad F_z = -\gamma \frac{Mm}{r^3} z. \quad (\text{XIV},13)$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ ძალის გეგმილი რაიმე ღერძზე შემდეგი ფორმულით არის დაკავშირებული პოტენციალურ ენერგიასთან:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (\text{XIV},14)$$

ე. ი. ძალის გეგმილი რაიმე ღერძზე არის პოტენციალური ენერჯიის წარმოებული ამ ღერძის გასწვრივ, აღებული უარყოფითი ნიშნით.



ნახ. 221.

მაშასადამე, ჩვენ უნდა მოვინახოთ m მასის კოორდინატების ისეთი $U(x, y, z)$ ფუნქცია, რომ მისი უარყოფითი წარმოებული, მაგალითად x კოორდინატის მიმართ, გვაძლევდეს F_x ძალას (ფორმ. XIV,14). დავამტკიცოთ, რომ ამისათვის პოტენციალური ენერჯია შემდეგი სახის უნდა იყოს:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \quad (\text{XIV},15)$$

მართლაც, გამოვითვალოთ U -ს წარმოებული x -ის მიმართ, მხოლოდ მივიღოთ მხედველობაში, რომ U დამოკიდებულია x კოორდინატზე r -ის საშუალებით, რომლისთვისაც გვაქვს ფორმულა

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{XIV},15')$$

გაწარმოება მოგვცემს

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}.$$

მეორე მხრივ, (XIV,15') ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

აქედან

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma \frac{Mm}{r^3} x,$$

საიდანაც ძალისათვის (XIV,14) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\gamma \frac{Mm}{r^3} x,$$

რაც ეთანხმება (XIV,13) ფორმულას. ანალოგიურ გამოსახულებებს მივიღებთ F_y -ისა და F_z -ისათვის. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ, თუ

პოტენციალური ენერგია გამოისახება ფორმულით $U = -\gamma \frac{Mm}{r}$,

ძალისათვის მივიღებთ ნიუტონის ფორმულას, მაგრამ ჩვენ რომ პოტენციალური ენერგიისათვის აგველო გამოსახულება

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} + A, \quad (\text{XIV},16)$$

სადაც A მუდმივი სიდიდეა, იგივე შედეგს მივიღებდით. მაშასადამე, ძალისა და პოტენციალური ენერგიის დამოკიდებულების ფორმულიდან ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ მხოლოდ ის, რომ პოტენციალური ენერგიას უნდა ჰქონდეს (XIV,16) სახე, მაგრამ ვერ გამოვარკვევთ, თუ როგორია A მუდმივა. მისი მნიშვნელობის მოსაძებნად უნდა გამოვიყენოთ პირობა, რომელიც ჩვენ წინათ უკვე განვიხილეთ პოტენციალური ენერგიის განმარტებასთან დაკავშირებით და რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: პოტენციალური ენერგია უნდა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილი უსასრულოდ იზრდება. მაშასადამე გვაქვს პირობა, რომ

$$U \rightarrow 0,$$

როდესაც

$$r \rightarrow \infty.$$

(XIV,16) ფორმულა U -სათვის მხოლოდ მაშინ დააკმაყოფილებს ამ პირობას, თუ $A=0$ და ამიტომ საბოლოოდ პოტენციალური ენერგიისათვის მივიღებთ

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

როგორც ვხედავთ, ორი ნაწილაკის გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია მასების პირდაპირპროპორციულია და მანძილის უკუპროპორციული.

(XIV,15) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია ყოველთვის უარყოფითია, ვინაიდან ნაწილაკების ინერტული მასები და მათ შორის მანძილი დადებითი სიდიდეებია. გამოფარკვიოთ რა ფიზიკური აზრი აქვს უარყოფით პოტენციალურ ენერგიას. პოტენციალურ ენერგიასა და მუშაობას შორის კავშირის თანახმად პოტენციალური ენერგია იზომება იმ მუშაობით, რომელიც უნდა შესრულდეს გარეშე ძალების მიერ, რათა უსასრულოდ დაშორებული ნაწილაკები დაუახლოვდნენ ერთმანეთს r მანძილით (ე. ი. იმ მდებარეობაში გადავიდნენ, რომლისთვისაც ვსაზღვრავთ პოტენციალურ ენერგიას)

$$U = A_{\infty}^r, \quad (\text{XIV},17)$$

სადაც აღნიშვნა A_{∞}^r გვიჩვენებს, რომ მუშაობა სრულდება უსასრულობიდან r მანძილამდე ნაწილაკების დაახლოების დროს. ცხადია, რომ თუ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება განზიდვის ხასიათისაა (ყველა მანძილზე), მაშინ გარეშე ძალებმა დადებითი მუშაობა უნდა შეასრულონ ნაწილაკების დაახლოებისათვის. ამიტომაც ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია დადებითია (ყველა მანძილზე). თუ ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება მიზიდვის ხასიათისაა (და სწორედ ასეთია გრავიტაციული ურთიერთქმედება), საწინააღმდეგო შედეგს მივიღებთ. ამ შემთხვევაში ნაწილაკების დაახლოებისათვის გარეშე ძალებმა უარყოფითი მუშაობა უნდა შეასრულონ, ე. ი. მუშაობა უნდა შესრულდეს მათ საწინააღმდეგოდ. ამიტომაც A_{∞}^r უარყოფითია და უარყოფითია აგრეთვე პოტენციალური ენერგია.

პოტენციალური ენერგიის უარყოფითი მნიშვნელობა მეორენაირად ასე შეიძლება გავიგოთ. უსასრულოდ დაშორებისას პოტენციალური ენერგია ნულია. მაგრამ იმისათვის, რომ m მასის ნაწილაკი უსასრულოდ დავაშოროთ M მასის ნაწილაკს, საჭიროა შევასრულოთ მუშაობა მიზიდვის ძალის საწინააღმდეგოდ, ე. ი. საჭიროა გავზარდოთ სისტემის პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლ მნიშვნელობამდე, მაშასადამე, საწყის მდებარეობაში (სასრული მანძილისათვის) პოტენციალური ენერგია უარყოფითი უნდა იყოს.

დავუბრუნდეთ ახლა წინანდელ აღნიშვნებს, ე. ი. ნაწილაკების მასები იყოს m_1 და m_2 , ხოლო მათ შორის მანძილი r_{12} . მაშინ პოტენციალური ენერგიისათვის გვექნება

$$U_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (\text{XIV},18)$$

ჩვენ შემდეგში გამოვიყენებთ ან (XIV,15) ან (XIV,18) ფორმულას იმისდა მიხედვით, თუ რომელი მათგანი უფრო ხელსაყრელი იქნება გამოთვლებისათვის.

მას შემდეგ, რაც მოძებნილია ორი ნაწილაკის გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია, შეიძლება დაიწეროს ორი ნაწილაკისაგან შემდგარი იზოლირებული სისტემის სრული ენერგიის გამოსახულება. როგორც ყოველთვის იგი იქნება კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი.

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}. \quad (\text{XIV,19})$$

§ 93. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა

განვიხილოთ ახლა ზოგადი შემთხვევა, როდესაც სისტემა შედგება გრავიტაციულად ურთიერთქმედი n ნაწილაკისაგან m_1, m_2, \dots, m_n მასებით. მანძილები ნაწილაკებს შორის აღვნიშნოთ ისევე, როგორც წინათ. მაგალითად, r_{12} იქნება მანძილი პირველ და მეორე ნაწილაკს შორის, r_{23} — მანძილი მეორე და მესამე ნაწილაკს შორის და ა. შ. საზოგადოდ მანძილი i -ურ და k -ურ ნაწილაკებს შორის იქნება r_{ik} . მაშინ, როგორც ცდა გვიჩვენებს, სისტემის სრული პოტენციალური ენერგია იქნება

$$U = - \sum_{i>k=1}^n \gamma \frac{m_i m_k}{r_{ik}}, \quad (\text{XIV,20})$$

ე. ი. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემის გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია არის ჯამი წყვილ-წყვილად აღებული ნაწილაკების პოტენციალური ენერგიებისა; მაგალითად, სამი ნაწილაკის შემთხვევაში გვექნება

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

(XIV,20) ფორმულაში i და k ინდექსები იღებენ ყველა მნიშვნელობას 1-დან n -მდე, მხოლოდ იმ პირობით, რომ i უნდა იყოს k -ზე მეტი. მაგალითად, თუ $k=1$, i შეიძლება იყოს 2, 3, ..., თუ $k=2$, i შეიძლება იყოს 3, 4, ... ეს შეზღუდვა შემდეგი გარემოებით არის გამოწვეული. მაგალითად, როდესაც $k=2$, i -ს რომ შესძლებოდა 1-ის მნიშვნელობის მიღება, გვექნებოდა ისეთივე წევრი, რომელსაც მივიღებდით, როდესაც $k=1$ და $i=2$, ე. ი. პირველი

და მეორე ნაწილაკის პოტენციალური ენერგია $-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ ჯამში

შემოვიდოდა მეორედ $-\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}}$ სახით, რაც ორჯერ გაადიდებს

საერთო პოტენციალურ ენერგიას. შეიძლება, რასაკვირველია, მოვხსნათ ის პირობა, რომ i უნდა იყოს k -ზე მეტი, მაგრამ მაშინ ჯამს წინ უნდა დაუწეროთ მამრავლი $\frac{1}{2}$, რათა არ მივიღოთ

გაორკეცებული ენერგია:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^n \frac{m_i m_k}{r_{ik}}. \quad (\text{XIV}, 21)$$

განვიხილოთ ახლა საკითხი ასეთ სისტემაში მოქმედი ძალების შესახებ. განვსაზღვროთ, მაგალითად, ძალა, რომელიც პირველ ნაწილაკზე მოქმედებს. ამისათვის პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებიდან უნდა გამოვყოთ ის წევრები, რომლებიც გამოხატავენ პირველი ნაწილაკის პოტენციალურ ენერგიას ყველა დანარჩენი ნაწილაკის მიმართ. ასეთი ნაწილაკების რაოდენობა არის $n-1$

$$U_1 = -\gamma \frac{m_2 m_1}{r_{21}} - \gamma \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - \dots - \gamma \frac{m_n m_1}{r_{n1}}.$$

U_1 -ის გაწარმოება პირველი ნაწილაკის კოორდინატების მიმართ მოგვცემს პირველ ნაწილაკზე მოქმედ საერთო ძალას; იგი იქნება ჯამი $n-1$ ძალისა, რომლითაც მე-2, მე-3, ..., მე- n ნაწილაკები მოქმედებს ამ ნაწილაკზე. ყოველი ამ ძალთაგანი მიიღება სათანადო პოტენციალური ენერგიის გაწარმოებით

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots + \vec{F}_{n1}. \quad (\text{XIV}, 22)$$

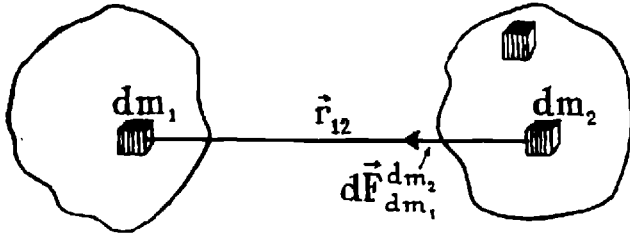
მაშასადამე, საერთო ძალა, რომელიც პირველ ნაწილაკზე მოქმედებს, არის დანარჩენი ნაწილაკების მიერ გამოწვეული ძალების ჯამი.

ნაწილაკთა სასრული რიცხვისაგან შემდგარი სისტემიდან გადავიდეთ უწყვეტ სხეულებზე, ე. ი. გამოვარკვიოთ როგორია გრავიტაციული ურთიერთქმედება ნებისმიერი ფორმის და სასრული ზომის სხეულებს შორის. პრაქტიკული თვალსაზრისით სწორედ ეს შემთხვევაა ყველაზე მნიშვნელოვანი, ვინაიდან სწორედ ასეთ სხეულებთან გვაქვს საქმე ბუნებაში. ის გარემოება, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების განხილვა წერტილოვანი მასებით დავიწყეთ, იმით იყო გამოწვეული, რომ ჯერ ერთი ამ შემთხვევაში ფორმულ-

ლები ძალიან მარტივია და, გარდა ამისა, ნებისმიერი ფორმის სასრული ზომის სხეულების განხილვა სწორედ წერტილოვანი მასების ურთიერთქმედების განხილვაზე დაიყვანება.

განვიხილოთ ორი ნებისმიერი ფორმისა და ზომის სხეულის გრავიტაციული ურთიერთქმედება (ნახ. 222).

ვთქვათ, გვსურს გამოვარკვიოთ, თუ რა ძალებით მოქმედებს პირველი სხეული მეორეზე. გამოვყოთ მეორე სხეულის ნებისმიერად



ნახ. 222.

მცირე ნაწილი მასით dm_2 , რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნივთიერი წერტილი და ვიპოვოთ ძალა, რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს ამ ნივთიერ წერტილზე. ცხადია, რომ dm_2 -ზე მოქმედებს პირველი სხეულის ყველა ნაწილი და მასზე მოქმედი ძალის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ ძალა, რომლითაც პირველი სხეულის dm_1 ელემენტი მოქმედებს dm_2 ელემენტზე. თუ dm_1 და dm_2 ელემენტებს განვიხილავთ როგორც ნივთიერ წერტილებს, ხოლო dm_1 -დან dm_2 -მდე გავლებულ რადიუს-ვექტორს აღვნიშნავთ \vec{r}_{12} -ით, ძალისათვის, რომლითაც dm_1 იზიდავს dm_2 -ს, მივიღებთ

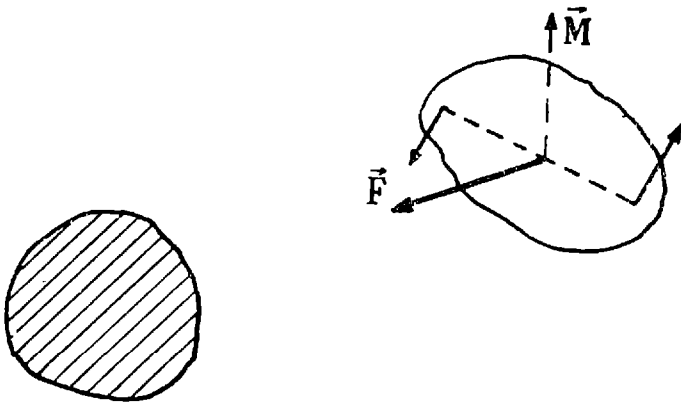
$$d\vec{F}_{dm_1}^{dm_2} = -\gamma \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (\text{XIV}, 23)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ ძალა, რომლითაც მთელი პირველი სხეული მოქმედებს dm_2 ელემენტზე, უნდა შევკრიბოთ (გეომეტრიულად) პირველი სხეულის სხვადასხვა ელემენტით გამოწვეული ძალები, ე. ი. მოვახდინოთ (XIV,23) გამოსახულების ინტეგრება dm_1 ელემენტის მიმართ. მივიღებთ

$$d\vec{F}_{1, dm_2} = -\gamma \int_i \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (\text{XIV}, 24)$$

ასეთია ძალა, რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს მეორე სხეულის dm_2 ელემენტზე. ასევე შეიძლება მოიძებნოს ამ მეორე სხეულის ყოველ სხვა ელემენტზე მოქმედი ძალა.

მას შემდეგ, რაც გამოჩვენებულია მეორე სხეულის ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალები, ისმის კითხვა იმის შესახებ, თუ რა მოქმედებას ახდენენ ეს ძალები ამ სხეულზე. პასუხი ამ კითხვაზე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა მდგომარეობაშია ეს სხეული. თუ მეორე სხეული მყარია, მაშინ ჩვეულებრივი წესით მოხდება მის ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალების შეკრება და ისინი დაიყვანებიან ერთ ტოლქმედზე და ერთ ძალთა წყვილზე. ტოლქმედი ძალა გამოიწვევს მეორე სხეულის მიზიდვას პირველი სხეულის მიერ, ხოლო ძალთა წყვილი გამოიწვევს მის შემობრუნებას მასების ცენტრის ირგვლივ (ნახ. 223). თუ მეორე სხეული მყარი არ არის, მაშინ,



ნახ. 223.

ზემოაღნიშნული მოქმედების გარდა, აუცილებლად მოხდება მისი დეფორმაცია, ე. ი. მისი სხვადასხვა ნაწილის გადანაცვლება ერთმეორის მიმართ. ასეთი დეფორმაციის მაგალითს წარმოადგენენ დედამიწის, ზღვისა და ატმოსფეროს მიმოქცევები, გამოწვეული მზისა და მთვარის გრავიტაციული მოქმედებით. არამყარი (თხევადი და გაზისებრი) სხეულების შემთხვევაში გრავიტაციული ურთიერთქმედებით გამოწვეული მოქმედების გამოჩვენება ძალიან რთულია და ამიტომ ამ საკითხს ჩვენ არ ვიხილავთ.

უფრო მარტივია, მაგრამ აგრეთვე საკმაოდ რთულია მყარი სხეულების გრავიტაციული ურთიერთქმედების გამოთვლა. მაგრამ ზოგიერთ შემთხვევაში, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც სხეულები სიმეტრიული ფორმისაა და მათ შიგნით მასების განაწილება სიმეტრიულია, გამოთვლა საგრძნობლად მარტივდება.

ჩვენ მიერ აღწერილი მეთოდის გარდა (რომლის თანახმად გამოითვლება ცალკეულ ელემენტებზე მოქმედი ძალები და შემდეგ ხდება მათი შეკრება), არსებობს მეორე მეთოდი, რომელიც განსა-

კუთრებით ხელსაყრელია სიმეტრიული სხეულების შემთხვევაში; ეს მეთოდი დამყარებულია ე. წ. გაუსის თეორემაზე, რომელსაც ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ.

§ 94. გრავიტაციული ველი, დაკავშირება და პოტენციალი. მუშაობა გრავიტაციულ ველში

წინა პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილეთ სხეულთა გრავიტაციული ურთიერთქმედება როგორც ერთი სხეულის უშუალო მოქმედება მეორე სხეულზე, ე. ი. ჩვენ ვთვლით, რომ ერთი სხეული მოქმედებს მისგან დაშორებულ სხეულზე უშუალოდ, ყოველგვარი საშუალებლო ნივთიერი გარემოს გარეშე. ასეთ მოქმედებას შორსქმედება ეწოდება. ცნება შორსქმედების შესახებ პირველად წარმოიშვა მე-17 საუკუნეში, მას შემდეგ რაც ნიუტონმა აღმოაჩინა მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ცხადია, რომ ასეთი სახის ურთიერთქმედების არსებობა ძალიან უცნაური იყო იმდროინდელი მეცნიერებისათვის. სხეულების ურთიერთქმედება მათი შეხების, დაჯახების, წვეის დროს ან ისეთი ურთიერთქმედება, როდესაც ერთი სხეული მოქმედებს მეორეზე მათ შორის არსებული რაიმე ნივთიერი გარემოს საშუალებით, კარგად იყო ცნობილი. შორსქმედება კი, როდესაც სხეულები მოქმედებენ ერთმანეთზე შეხების გარეშე ან რაიმე სხვა გარემოს გარეშე, სრულიად წარმოუდგენელი იყო. ამიტომაც უმრავლესობა მეცნიერებისა (კეპლერი, ჰიუგენსი, დეკარტე და სხვები) ვერ ურიგდებოდა შორსქმედების თვალსაზრისს და საჭიროდ თვლიდა იმ გარემოს აღმოჩენას და შესწავლას, რომელიც გადასცემდა გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას. თვით ნიუტონიც არ თვლიდა შესაძლებლად სხეულის მოქმედებას იქ, სადაც ეს სხეული არ იმყოფებოდა, მაგრამ ვინაიდან მან ვერ მოახერხა დამაკმაყოფილებელი ახსნა მიეცა გრავიტაციული მოქმედებისათვის რაიმე ნივთიერი გარემოს საშუალებით, ხოლო მისი გამოთქმით იგი „ჰიპოთეზებს არ ქმნიდა“, ამიტომ იგი შეეცადა თავი აერიდებინა ამ საკითხისათვის. ნიუტონის შემდეგ თვალსაზრისი შორსქმედების არსებობის შესახებ თანდათანობით სულ უფრო განმტკიცდა (უმთავრესად მისი მოწაფეების წყალობით) და იგი მეფობდა ფიზიკაში თითქმის ორი საუკუნის განმავლობაში, განსაკუთრებით მას შემდეგ, რაც კულონმა დამუხტული ნაწილაკებისათვის აღმოაჩინა ისეთივე სახის ურთიერთქმედების კანონი (კულონის კანონი). მაგრამ დაწყებული მეცხრამეტე საუკუნის შუა წლებიდან, განსაკუთრებით ფარადეისა და მაქსველის წყალობით, ისევ აღორძინდა ახლოქმედების თვალსაზრისი, რომლის მიხედვით დაშორებული სხეულების ურთიერთ-

ქმედება ხორციელდება მათ ირგვლივ არსებული ნივთიერი გარემოს საშუალებით. მართალია, ეს წარმოდგენა განვითარდა ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებისათვის, მაგრამ მან გარკვეული გავლენა მოახდინა გრავიტაციული ურთიერთქმედების შესახებ წარმოდგენებზე.

ახლოქმედების თვალსაზრისის მიხედვით სხეულების გრავიტაციული ურთიერთქმედება ხორციელდება ამ სხეულების ირგვლივ არსებული გრავიტაციული ველის საშუალებით. დაშვებულია, რომ ყოველი სხეულის ირგვლივ არსებობს გრავიტაციული ველი, განფენილი მთელ სივრცეში და როდესაც ამ ველში მოვათავსებთ მეორე სხეულს, მასზე სწორედ ეს ველი იმოქმედებს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთი სხეული მოქმედებს მეორეზე არა უშუალოდ, არამედ გრავიტაციული ველის საშუალებით. ამ თვალსაზრისის მიხედვით ორი სხეულის გრავიტაციული ურთიერთქმედების საკითხი ორ საკითხად იყოფა. პირველი საკითხია მოძებნა ველისა, რომელიც გარს არტყია, მაგალითად, პირველ სხეულს. მეორე საკითხი არის გამორკვევა ამ ველის მოქმედებისა მეორე სხეულზე. საბოლოო შედეგში ურთიერთქმედება ისეთივე იქნება, როგორც უშუალო მოქმედების (შორსქმედების) დროს¹, მაგრამ ახალი თვალსაზრისი (მოქმედება გრავიტაციული ველის საშუალებით) გაცილებით უფრო ნაყოფიერი აღმოჩნდა. ეს თვალსაზრისი ახლა საყოველთაოდ მიღებულია არა მარტო გრავიტაციული, არამედ ყველა სხვა ურთიერთქმედების მიმართაც. ყოველი ურთიერთქმედება განიხილება როგორც სათანადო ველით (ელექტრომაგნიტური, გრავიტაციული, მეზონური და სხვა) გამოწვეული.

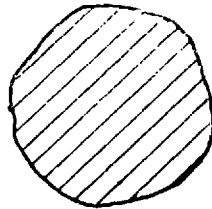
მაშასადამე, მივიღებთ, რომ ყოველი სხეული გარშემორტყმულია გრავიტაციული ველით, რომელიც მოქმედებს მასში მოთავსებულ ყოველ სხვა სხეულზე. უნდა აღინიშნოს, რომ ველი აქვს ყველა სხეულს და ურთიერთქმედება შეიძლება განვიხილოთ როგორც პირველი სხეულის ველის მოქმედება მეორეზე ან როგორც მეორე სხეულის ველის მოქმედება პირველზე.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გრავიტაციული ურთიერთქმედების საკითხი ორ საკითხზე დაიყვანება. პირველი საკითხი არის გამოკვლევა გრავიტაციული ველისა, რომელიც გარს არტყია ერთ-ერთ სხეულს. მეორე საკითხი კი იქნება ამ ველის მოქმედება მასში მოთავსებულ სხეულზე. ვინაიდან უშუალოდ გრავიტაციული ველის

¹ სწრაფად მოძრავი სხეულების შემთხვევაში ველის თეორია იძლევა შორსქმედების თეორიისაგან განსხვავებულ შედეგებს.

დამზერა შეუძლებელია, მისი ბუნებისა და ხასიათის გამორკვევა შეიძლება მხოლოდ მისი მოქმედების გამოკვლევით. გრავიტაციული ველი უწყვეტად არის განფენილი მთელს სივრცეში და მისი სრული დახასიათება მოითხოვს მის შესწავლას სივრცის ყოველ წერტილში. ამისათვის შემდეგნაირად მოვიქცეთ. გრავიტაციული ველის განსახილველ წერტილში მოვათავსოთ რაიმე ნივთიერი წერტილი m მასით. მასზე იმოქმედებს ძალა, რომელსაც ჩვენ მივაწერთ ველის მოქმედებას. აღვნიშნოთ ეს ძალა \vec{F} -ით. ცხადია, რომ ეს ძალა დამოკიდებულია არა მარტო ველზე, რომლის შესწავლაც ჩვენ გვსურს, არამედ შეტანილი წერტილის მასაზე. ჩვენ რომ ველის იმავე წერტილში სხვა m_1 მასის ნივთიერი წერტილი შევიტანოთ, ძალაც შეიცვლება მიუხედავად იმისა, რომ ველი იგივე დარჩა (ველი გამოწვეული რაღაც სხეულით ან სხეულების სისტემით). ეტქვათ, ძალა გახდა \vec{F}_1 . კიდევ სხვა m_2 მასის შეტანისას, სხვა \vec{F}_2 ძალას მივიღებთ და ა. შ. მაგრამ ცდები გვიჩვენებს, რომ როგორი მასაც არ უნდა შევიტანოთ ველის აღებულ წერტილში, სათანადო ძალის შეფარდება ამ მასასთან ყოველთვის ერთი და იგივეა, ე. ი.

$$\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \dots$$



ნახ. 224.

მაშასადამე, ეს სიდიდე (დამოუკიდებელი შეტანილი მასისაგან) უნდა ახასიათებდეს გრავიტაციულ ველს. აღვნიშნოთ ეს სიდიდე \vec{g} -თი

და ვუწოდოთ მას გრავიტაციული ველის დაძაბულობა (ნახ. 224).

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (\text{XIV}, 25)$$

ამგვარად გრავიტაციული ველის დაძაბულობა აღებულ წერტილში არის ამ წერტილში მოთავსებულ წერტილოვან m მასაზე მოქმედი ძალის შეფარდება ამ მასასთან. იგი დამოკიდებულია მხოლოდ ველის გამომწვევ სხეულზე, წერტილის მდებარეობაზე და არ არის დამოკიდებული შეტანილ მასაზე. იმავე ფორმულიდან დაძა-

ბულობა შეიძლება კიდევ ასე განიმარტოს. ვთქვათ, შეტანილო მასა ერთის ტოლია $m=1$, მაშინ (XIV,25) ფორმულა მოგვცემს

$$\vec{G} = \vec{F},$$

ე. ი. დაძაბულობა იზომება ძალით, რომელიც მოქმედებს ველში შეტანილო ერთეულოვან წერტილოვან მასაზე. შეტანილო მასა წერტილოვანი იმიტომ უნდა იყოს, რომ ჩვენ გვინდა გავზომოთ დაძაბულობა ველის ადებულ წერტილში. არაწერტილოვანი მასის შეტანის შემთხვევაში მისი სხვადასხვა წერტილი ველის სხვადასხვა წერტილში იქნება და ამიტომაც ამ შემთხვევაში (XIV,25) ფორმულა განსაზღვრავს დაძაბულობის საშუალო მნიშვნელობას შეტანილო მასის მიერ დაკავებულ არეში. ველში შეტანილო მასას, რომელიც გამოიყენება დაძაბულობის გასაზომად, ხშირად კიდევ საცდელი მასა ეწოდება.

გრავიტაციული ველის დაძაბულობა ვექტორული სიდიდეა. იგი ყოველთვის მიმართულია საცდელ მასაზე მოქმედი ძალის მიმართულებით (ვინაიდან $m > 0$). მისი ერთეული ადვილად მიიღება (XIV,25) ფორმულიდან: დაძაბულობის ერთეულად მიღებულია ისეთი დაძაბულობა, როდესაც ერთეულოვან მასაზე ($m=1$) მოქმედებს ერთეულოვანი ძალა ($F=1$).

CGS სისტემაში დაძაბულობის ერთეულად მიღებულია დაძაბულობა, როდესაც $1gr$ მასაზე მოქმედებს ერთი დინი ძალა. ამ ერთეულს გალი¹ ეწოდება. ადვილად შეიძლება აგრეთვე გამოვარკვიოთ, რომ დაძაბულობას აქვს აჩქარების განზომილება

$$[G] = \frac{[F]}{[m]} = LT^{-2}.$$

ამიტომაც შეიძლება ვთქვათ, დაძაბულობის ერთეული იგივეა, რაც აჩქარების ერთეული. მაშასადამე, CGS სისტემაში დაძაბულობის ერთეულად უნდა მივიღოთ დაძაბულობა ველის ისეთ წერტილში, რომელშიც მოთავსებული წერტილოვანი მასა მიიღებს $1 \frac{cm}{sec^2}$ აჩქარებას.

ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ გრავიტაციული ველის მეორე დამახასიათებელი სიდიდე—პოტენციალი. ჩვენ ვიცით, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედება ხასიათდება არა მარტო ძალით, არამედ პოტენციალური ენერგიითაც; ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ გრავიტაციულ ველში მოვათავსებთ წერტილოვან მასას, მას გარ-

¹ გალილის პატივსაცემად.

კვეული პოტენციალური ენერგია ექნება. აღნიშნოთ ეს პოტენციალური ენერგია U -თი. ცდები გვიჩვენებენ, რომ, ისევე როგორც დაძაბულობის შემთხვევაში, ამ პოტენციალური ენერგიის შეფარდება ველში შეტანილ წერტილოვან მასასთან არ არის დამოკიდებული ამ მასის სიდიდეზე. ამიტომაც ეს შეფარდება გრავიტაციული ველის დამახასიათებელი იქნება; მას ველის პოტენციალი ეწოდება და V ასოთი აღინიშნება

$$V = \frac{U}{m}; \quad (\text{XIV}, 26)$$

აქედან გამომდინარეობს პოტენციალის შემდეგი განმარტება: პოტენციალი არის ველში შეტანილი წერტილოვანი მასის პოტენციალური ენერგიის შეფარდება ამ მასასთან ან მეორენაირად: პოტენციალი იზომება ველში შეტანილი ერთეულოვანი მასის პოტენციალური ენერგიით. მართლაც, თუ $m=1$, მივიღებთ

$$U = V.$$

ჩვენ ფორმულებით განიმარტება პოტენციალის ერთეული და განზომილება. პოტენციალის ერთეულად მიღებულია ველის ისეთი პოტენციალი, რომელშიც მოთავსებულ ერთეულოვან მასას ექნება ერთეულოვანი პოტენციალური ენერგია. CGS სისტემაში პოტენციალის ერთეული იქნება იმ წერტილის პოტენციალი, რომელშიაც 1 გრამ მასას ექნება 1 ერგი ენერგია:

$$V = 1 \frac{\text{erg}}{\text{gr}}.$$

MKS სისტემაში (მეტრი—კილოგრამ-მასა—სეკუნდი) პოტენციალის ერთეულია $1 \frac{\text{joul}}{\text{kg}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{gr}}$. პოტენციალის განზომილებისათვის მივიღებთ

$$[V] = \frac{[U]}{[m]} = L^2 T^{-2},$$

ე. ი. V -ს აქვს სიჩქარის კვადრატის განზომილება.

(XIV, 25) და (XIV, 26) ფორმულები წარმოადგენენ ველის დაძაბულობისა და პოტენციალის განმსაზღვრელ ძირითად ფორმულებს; მათი საშუალებით შეიძლება მოიძებნოს ველში შეტანილ მასაზე მოქმედი ძალა და მისი პოტენციალური ენერგია. თუ ცნობილია დაძაბულობა და პოტენციალი:

$$\vec{F} = m \vec{G}, \quad U = mV. \quad (\text{XIV}, 27)$$

ვინაიდან ძალასა და პოტენციალურ ენერჯიას შორის გარკვეული დამოკიდებულება არსებობს, ცხადია, რომ ასეთივე დამოკიდებულება უნდა იყოს დაძაბულობასა და პოტენციალს შორის. მართლაც, როგორც ვიცით,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

(XIV,27) ფორმულების გამოყენება მოგვცემს:

$$G_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z}; \quad (\text{XIV,28})$$

მაშასადამე, დაძაბულობის გეგმილი რაიმე ღერძზე უძრის პოტენციალის წარმოებულს სათანადო კოორდინატის მიმართ, აღებულს უარყოფითი ნაშნით. როგორც მაგალითი, განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როდესაც გრავიტაციული ველი შექმნილია M წერტილოვანი მასის მიერ. გამოვთვალოთ ამ ველის დაძაბულობა და პოტენციალი ნებისმიერ A წერტილში, რომლის რადიუს-ვექტორი M მასის მიმართ არის \vec{r} . ამისათვის A წერტილში მოვათავსოთ რაიმე m წერტილოვანი მასა და გავზომოთ მასზე მოქმედი ძალა. ნიუტონის კანონის თანახმად ეს ძალა არის

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \vec{r}.$$

აქედან m მასაზე გაყოფით მივიღებთ დაძაბულობას:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad G = \gamma \frac{M}{r^2}. \quad (\text{XIV,29})$$

როგორც ვხედავთ, წერტილოვანი მასის ველის დაძაბულობა მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია და რადიუს-ვექტორის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული. პოტენციალის მოსაძებნად ანალოგიურად უნდა მოვიქცეთ. ვინაიდან M და m მასების პოტენციალური ენერჯია არის

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r},$$

პოტენციალისათვის მივიღებთ

$$V = -\gamma \frac{M}{r}, \quad (\text{XIV,30})$$

ე. ი. წერტილოვანი მასის ველის პოტენციალი უარყოფითია და მანძილის უკუპროპორციულია.

თუ მასა, რომელიც იწვევს ველს, არ არის წერტილოვანი, და-
 დაბულობის გამოსათვლელად ისე უნდა მოვიქცეთ, როგორც ძალის
 გამოთვლის დროს მოვიქცით. მთელი სხეული უნდა გავყოთ მცირე
 ელემენტებად მასით dM , ყოველი ამ ელემენტთან განვიხილოთ
 როგორც წერტილოვანი, გამოვთვალოთ აღებულ წერტილში მათ
 მიერ გამოწვეული დაბულობა და პოტენციალი:

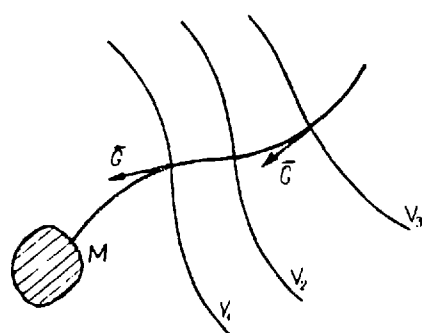
$$d\vec{G} = -\gamma \frac{dM}{r^3} \vec{r}, \quad dV = -\gamma \frac{dM}{r}.$$

მთელი დაბულობისა და პოტენციალის მისაღებად მოვახდინოთ
 ინტეგრება:

$$\vec{G} = -\gamma \int \frac{dM}{r^3} \vec{r}, \quad V = -\gamma \int \frac{dM}{r}. \quad (\text{XIV}, 31)$$

თუ სხეულის ფორმა და მასში მასების განაწილება საკმაოდ რთუ-
 ლია, ამ ინტეგრალების გამოთვლა ძნელდება და მრავალ შემთხვე-
 ვაში თითქმის შეუძლებელიც ხდება; მხოლოდ ზოგიერთი სიმეტ-
 რიული სხეულისათვის ხერხდება ამ ინტეგრალების შედარებით
 მარტივად გამოთვლა, მაგრამ სიმეტრიული სხეულებისათვის
 არსებობს უფრო მარტივი მეთოდი დაბულობის გამოთვლისა,
 რომელიც დამყარებულია ფრიად მნიშვნელოვან დებულებაზე ე. წ.
 გაუსის თეორემაზე.

სანამ გადავიდოდეთ გაუსის თეორემის განხილვაზე, საჭიროა
 შემოვიღოთ ძალწირებისა და იზოპოტენციალური ზედაპირების
 ცნება. იმის თვალსაჩინოდ წარ-
 მოსადგენად, თუ როგორია ველის
 დაბულობა, სხვადასხვა ადგილას
 სივრცეში ავლებენ ძალწირებს.
 ძალწირი ეწოდება ისეთ წირს,
 რომლის ყოველ წერტილში დაბა-
 ბულობა მისი მხებია. ვინაიდან
 ველის ყოველ წერტილში დაბაბუ-
 ლობას მხოლოდ ერთი მნიშვნელო-
 ბა აქვს, ცხადია, რომ წერტილზე
 შეიძლება მხოლოდ ერთი ძალწი-
 რის გავლება (ნახ. 225). მეორე მნიშვნელოვანი ცნება არის ცნება
 იზოპოტენციალური ზედაპირისა. ავარჩიოთ პოტენციალის გარკვე-
 ული მნიშვნელობა და მოვძებნოთ ველის წერტილები, რომლებშიც
 პოტენციალს ეს მნიშვნელობა აქვს. თუ პოტენციალის არჩეული



ნახ. 225.

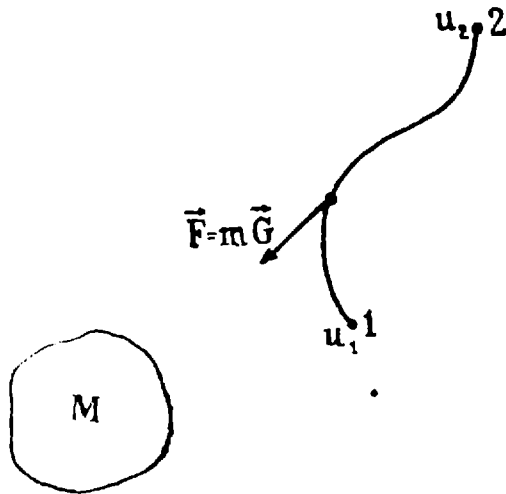
მეორე მნიშვნელოვანი ცნება არის ცნება
 იზოპოტენციალური ზედაპირისა. ავარჩიოთ პოტენციალის გარკვე-
 ული მნიშვნელობა და მოვძებნოთ ველის წერტილები, რომლებშიც
 პოტენციალს ეს მნიშვნელობა აქვს. თუ პოტენციალის არჩეული

მნიშვნელობა არის V_1 , ამ წერტილების კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას

$$V(x, y, z) = V_1;$$

ეს განტოლება კი არის ზედაპირის განტოლება. ზედაპირს, რომლის ყოველ წერტილში პოტენციალს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს, იზოპოტენციალური ზედაპირი ეწოდება. პოტენციალურ ენერგიასა და ძალას შორის კავშირის განხილვისას ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ, რომ ძალა იზოპოტენციალური ზედაპირის მართობია. ცხადია, რომ ველის დაძაბულობაც მართობი უნდა იყოს ამ ზედაპირისა, ვინაიდან მას და ძალას ერთნაირი მიმართულება აქვთ.

დასასრულ გამოვითვალთ მუშაობა, რომელიც სრულდება, როდესაც რაიმე ნივთიერი წერტილი მოძრაობს გრავიტაციულ ველში. ვთქვათ, m მასის ნაწილაკი გადადის 1-ელი წერტილიდან მე-2 წერტილში



ნახ. 226.

ტილში გარკვეული გზით (ნახ. 226). განსაზღვრის თანახმად შესრულებული მუშაობა გამოისახება ფორმულით:

$$A = \int_1^2 \vec{F}_s \cdot d\vec{s} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

მეორე მხრივ, ძალისა და პოტენციალური ენერგიის ან პოტენციალის დამაკავშირებელი ფორმულის თანახმად

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = - m \frac{\partial V}{\partial x}.$$

ჩასმა გვაძლევს

$$A = - \int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) =$$

$$= - m \int_1^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right);$$

აქედან მივიღებთ

$$A = U_1 - U_2 = m (V_1 - V_2). \quad (\text{XIV}, 32)$$

როგორც ვხედავთ, შესრულებული მუშაობა უდრის პოტენციალური ენერჯიის შემცირებას ან მასის ნამრავს პოტენციალთა სხვაობაზე.

თუ გრავიტაციული ველი შექმნილია წერტილოვანი M მასით, პოტენციალი გამოისახება ფორმულით:

$$V = - \gamma \frac{M}{r}.$$

ჩასმა (XIV,32) ფორმულაში გვაძლევს

$$A = - \gamma M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (\text{XIV}, 33)$$

თუ მე-2 წერტილს უსასრულობაში გადავიტანთ, ე. ი. თუ $r_2 \rightarrow \infty$, მუშაობისათვის მივიღებთ

$$A = - \gamma \frac{M m}{r_1} = m V_1.$$

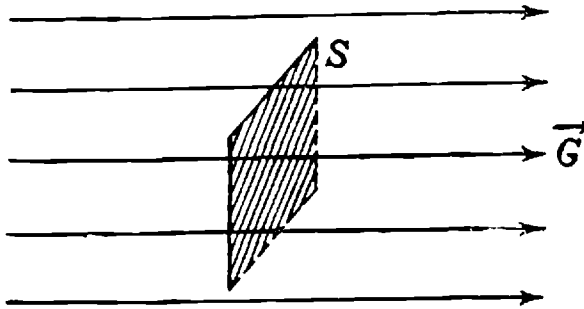
ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს კიდევ ერთი განსაზღვრა მივცეთ ველის პოტენციალს. თუ $m = 1gr$, მივიღებთ $V_1 = A$, ე. ი. პოტენციალი განისაზღვრება როგორც მუშაობა, რომელიც სრულდება ერთეულოვანი მასის უსასრულობაში გადატანის დროს.

§ 95. გაუსის თეორემა. გრავიტაციული ველების მახასიათებლები

ეს თეორემა კავშირს ამყარებს გრავიტაციულ ველის გამომწვევ მასასა და ველის დაძაბულობას შორის. ეს კავშირი ფრიად ზოგადია, იგი გამოსადეგია ნებისმიერად განაწილებული მასებისათვის, მაგრამ სწორედ ამ ზოგადობის გამო არ იძლევა საშუალებას გამოვითვალოთ დაძაბულობა ველის ნებისმიერ წერტილში, თუ ველი არ აკმაყოფილებს გარკვეულ სიმეტრიის პირობებს.

შემოვიღოთ დაძაბულობის ნაკადის ცნება. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ველი ერთგვაროვანია, ე. ი. სივრცის ყოველ

წერტილში დაძაბულობა როგორც სიდიდით, ისე მიმართულებით ერთი და იგივეა (ნახ. 227). ავიღოთ რაიმე ბრტყელი ზედაპირი, რომელიც ძალწირების მართობია. აღვნიშნოთ მისი ფართობი S -ით.

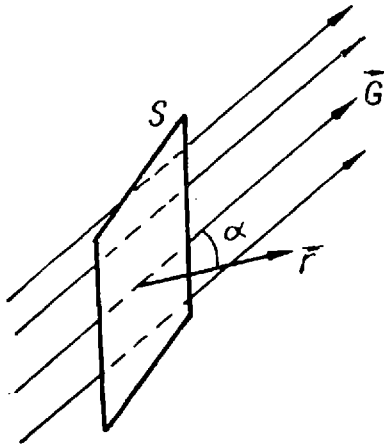


ნახ. 227.

მაშინ დაძაბულობის ნამრავლს ფართობზე ეწოდება დაძაბულობის ნაკადი S ფართობში და აღვნიშნება N -ით.

$$N = G \cdot S. \quad (\text{XIV}, 34)$$

სახელწოდება ნაკადი აღებულია შემდეგი ანალოგიით. თუ წარმოვიდგინოთ, რომ ველის მაგიერ ჩვენ გვაქვს მოძრავი სითხე, რომლის სიჩქარე არის v , მაშინ ამ სიჩქარის სიდიდის ნამრავლი ფართობზე S მოგვცემს სითხის ნაკადს, ე. ი. სითხის რაოდენობას (მოცულობის მიხედვით), რომელიც გადის S ფართობში ერთ სეკუნდში. ამის მსგავსად $G \cdot S$ -საც ეწოდება დაძაბულობის ნაკადი მიუხედავად იმისა, რომ არავითარი რეალური ნაკადი გრავიტაციულ ველში ჩვენ არა გვაქვს. როგორ უნდა გამოვითვალოთ დაძაბულობის ნაკადი იმ შემთხვევაში, როდესაც ფართობი არ არის დაძაბულობის მართობი (ნახ. 228)?



ნახ. 228.

აღვნიშნულია ფართობისადმი ნორმალი. ამ შემთხვევაში S ფართობზე ამრავლებენ დაძაბულობის ნორმალურ გეგმილს G_n , ვინაიდან ფართობისადმი მხები გეგმილი ვერავითარ ნაკადს ვერ მოგვცემს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ნაკადი გამოითლვება ფორმულით;

$$N = G_n \cdot S = G \cdot S \cos \alpha. \quad (\text{XIV}, 35)$$

სადაც α არის კუთხე დაძაბულობასა და ფართობისადმი ნორმალს შორის.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ველი არ არის ერთგვაროვანი და არც ფართობი (რომელშიც უნდა გამოვითვალოთ ნაკადი) არის ბრტყელი (ნახ. 229). ამ შემთხვევაში ნაკადს ითვლიან შემდეგნაირად. განსახილველ ზედაპირზე გამოყოფენ მცირე dS ელემენტს და თვლიან, რომ ამ ელემენტის ყველა წერტილში დაძაბულობა ერთი და იგივეა. მაშინ dS ელემენტში გამავალი დაძაბულობის ნაკადი გამოითვლება ფორმულით:

$$dN = G_n dS.$$

მთელ ფართობში გამავალი ნაკადის გამოსათვლელად უნდა შევკრიბოთ მის ცალკეულ ელემენტებში გამავალი ნაკადები, ე. ი. უნდა მოვახდინოთ dN -ის ინტეგრება განსახილველ ფართობზე, მივიღებთ

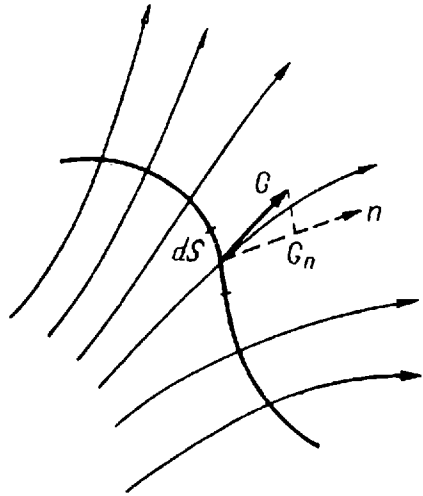
$$N = \int_S G_n dS. \quad (\text{XIV}, 36)$$

ასეთია ზოგადი ფორმულა ნებისმიერი ფორმის S ფართობში გამავალი დაძაბულობის ნაკადისა. შეიძლება განსახილველი ფართობი იყოს ჩაკეტილი (ნახ. 230), მაშინ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$N = \oint G_n dS.$$

ჩაკეტილი ზედაპირის შემთხვევაში ნორმალად ჩვეულებრივად იღებენ გარე ნორმალს. შეიძლება ზედაპირის ამა თუ იმ ნაწილში ან მთელ ზედაპირში ნაკადი იყოს უარყოფითი. ეს იმ შემთხვევაში იქნება, თუ დაძაბულობა ნორმალთან ბლავგ კუთხეს ($\cos \alpha < 0$) ადგენს.

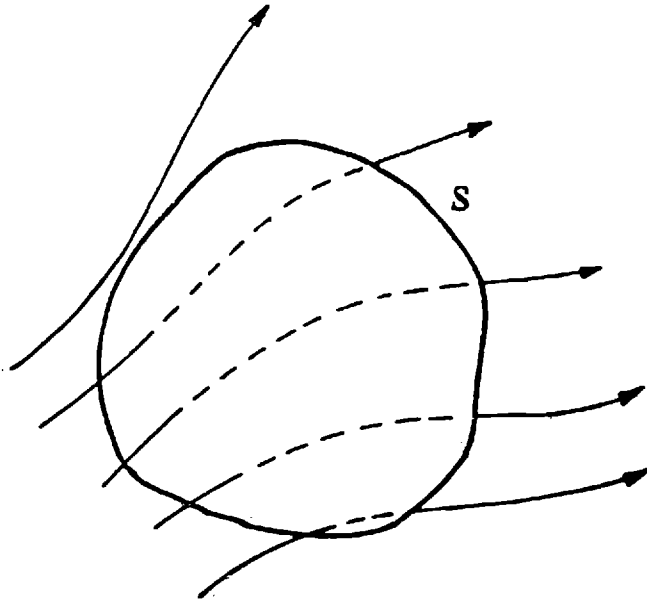
გამოვითვალოთ ახლა წერტილოვანი მასის ირგვლივ აღებულ ნებისმიერ ჩაკეტილ ზედაპირში გამავალი ნაკადი (ნახ. 231). გამოვყოთ ზედაპირზე მცირე dS ელემენტი \vec{n} ნორმალით.



ნახ. 229.

დადაბულობა ამ ელემენტის ნებისმიერ წერტილში იქნება

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r},$$



ნახ. 230.

სადაც \vec{r} არის m მასიდან dS ელემენტამდე გავლებული რადიუს-ვექტორი (დადაბულობა, მიზიდვის ხასიათის გამო, მიმართულია

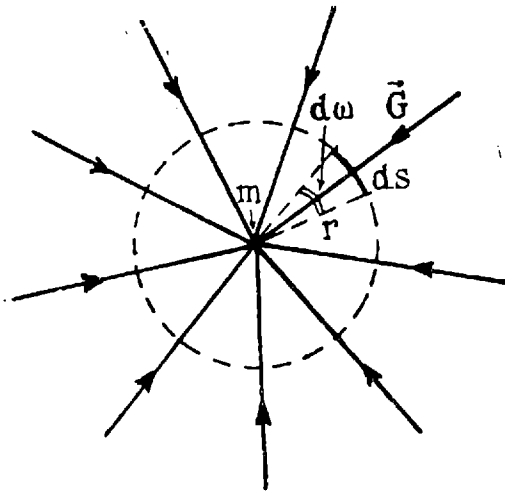
\vec{r} -ის საწინააღმდეგოდ).

dS ელემენტში გამავალი ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = \gamma \frac{m}{r^2} dS \cos \alpha,$$

სადაც α არის კუთხე დაბულობასა და ნორმალს შორის. თუ შემოვიღებთ φ კუთხეს, რადიუს-ვექტორსა და ნორმალს შორის, რომელიც α კუთხესთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$\varphi = \pi - \alpha,$$



ნახ. 231.

მაშინ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = -\gamma \frac{m}{r^2} dS \cos \varphi.$$

როგორც გეომეტრიიდან ვიცით, $\frac{dS}{r^2} \cos \varphi$ გამოსახულება წარმოადგენს სხეულოვან dS კუთხეს, რომლის სათავე არის m წერტილი და რომელიც dS ფართობს ეყრდნობა. ამიტომ ნაკადისათვის მივიღებთ

$$dN = -\gamma m dS.$$

ჩაკეტილ ზედაპირში გამავალი მთელი ნაკადისათვის კი გვექნება

$$N = -4\pi\gamma m.$$

ეს შედეგი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$N = \oint G_n dS = -4\pi\gamma m. \quad (\text{XIV, 37})$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გრავიტაციული ველი გამოწვეულია რამდენიმე წერტილოვანი მასით, საერთო ნაკადი გამოითვლება როგორც ჯამი ცალკეული მასებით გამოწვეული ნაკადებისა (ვინაიდან საერთო დაძაბულობა არის ცალკეულ დაძაბულობათა ჯამი). ცხადია, რომ (XIV,37) ფორმულა ძალაში დარჩება ნებისმიერად განაწილებული მასებისათვის. რასაკვირველია იმ პირობით, რომ ყველა ისინი მოთავსებული არიან ჩაკეტილი ზედაპირის შიგნით, რომელშიც გამოითვლება დაძაბულობის ნაკადი. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ, თუ მასა მოთავსებულია ჩაკეტილი ზედაპირის გარეთ, დაძაბულობის ნაკადი ამ ზედაპირში ნულის ტოლი იქნება.

მიღებულ შედეგს

$$\oint G_n dS = -4\pi\gamma m,$$

სადაც m არის ჩაკეტილი ზედაპირის შიგნით არსებული მთელი მასა, ეწოდება გაუსის თეორემა. იგი აკავშირებს გრავიტაციული ველის დაძაბულობის ნაკადს ველის გამომწვევ მასასთან.

გამოვიყენოთ გაუსის თეორემა ზოგიერთი მარტივი გრავიტაციული ველის გამოსათვლელად. როგორც პირველი მაგალითი გამოვითვალოთ წერტილოვანი მასის ველი. ცხადია, რომ სფერული სიმეტრიის გამო, ველის დაძაბულობა დამოკიდებული უნდა იყოს მხოლოდ მანძილზე წერტილოვანი მასიდან და მიმართული უნდა იყოს ამ მასისაკენ. შემოვავლოთ მასის ირგვლივ ნებისმიერი r -რადიუსიანი სფერო და გამოვითვალოთ დაძაბულობის ნაკადი მის ზედაპირში

$$N = \oint G_n dS.$$

ვინაიდან \vec{G} მიმართულია შიგა ნორმალის გასწვრივ

$$G_n = -G$$

და რადგანაც G ერთი და იგივეა, სფერული ზედაპირის ყველა წერტილში, იგი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ; მივიღებთ

$$N = -G \oint dS,$$

მაგრამ ინტეგრალი სფეროს ზედაპირზე მოგვცემს სფეროს ზედაპირის ფართობს და ნაკადისათვის გვექნება

$$N = -4\pi G r^2.$$

მეორე მხრივ, გაუსის თეორემის თანახმად

$$N = -4\pi\gamma M,$$

სადაც M არის ველის გამომწვევი მასა. შედარება გვაძლევს

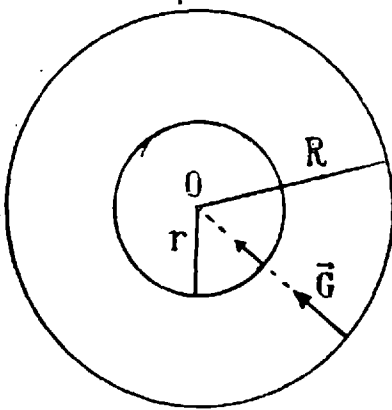
$$G = \gamma \frac{M}{r^2},$$

ე. ი. უკვე ცნობილ შედეგს.

ცხადია, რომ ანალოგიურად გამოითვლება ერთგვაროვანი სფეროს მიერ შექმნილი ველის დაძაბულობა სფეროს გარეთ. მივიღებთ იგივე შედეგს

$$G = \gamma \frac{M}{r^2},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთგვაროვანი სფერული მასა ისეთივე ველს ქმნის, როგორსაც მის ცენტრში მოთავსებულა M მასის წერტილოვანი მასა.



ნახ. 232.

გამოვითვალოთ გრავიტაციული ველი სფეროს შიგნით რაიმე r მანძილზე ცენტრიდან (ნახ. 232). თუ სფეროს შიგნით შემოვწერთ r -რადიუსიან სფეროს, დაძაბულობის ნაკადისათვის მივიღებთ

$$N = -4\pi G r^2.$$

გაუსის თეორემის თანახმად იგივე ნაკადი გამოისახება ასე:

$$N = -4\pi\gamma M(r),$$

სადაც $M(r)$ არის r -რადიუსიანი სფეროს შიგნით მოთავსებული მასა. მისთვის ადვილად მივიღებთ ფორმულას

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M;$$

აქედან მივიღებთ

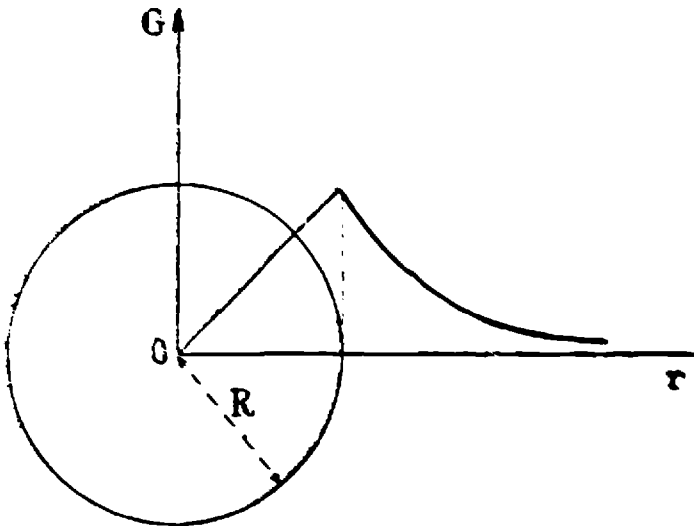
$$4\pi r^2 = 4\pi \frac{M}{R^2} R^2.$$

საიდანაც დადებულობასათვის გვქვამს

$$G = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

(XIV.38)

როგორც ვხედავთ, სფეროს შიგნით დადებულობაში მყოფი ცხელია ცენტრამდე მანძილისა, ე. ი. ის კლებულობს ცენტრთან მანძილების დროს. თვით ცენტრში დადებულობა ჩვეულებრივია.



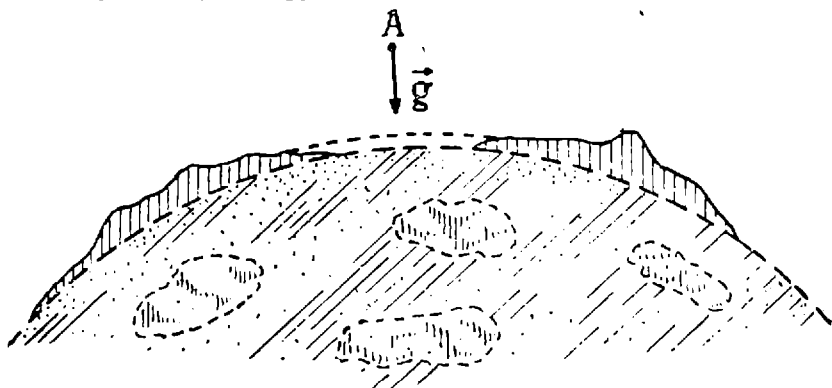
ნახ. 233.

233-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დადებულობის ცვლილება სფეროს შიგნით და გარეთ მანძილის მიხედვით. ასევე შეიძლება გამოვითვალოთ სხვა სიმეტრიული სხეულების გრავიტაციული ველების დადებულობა.

§ 96. დედამიწის გრავიტაციული ველი

სხვადასხვა სხეულის გრავიტაციულ ველებს შორის ჩვენს პრაქტიკულ ცხოვრებაში ყველაზე მნიშვნელოვან როლს დედამიწის გრავიტაციული ველი ასრულებს. მისი შესწავლა ყოველთვის წარმოადგენდა მეცნიერების ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ამოცანას. ერთი მხრივ, ამ ველის ხასიათის ცოდნა საჭიროა დედამიწის მახლობლად სხეულების მოძრაობის შესასწავლად, ხოლო, მეორე მხრივ, იგი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ დედამიწის ფორმა

და მასების განაწილება მის შიგნით. ცხადია, რომ დედამიწის გრავიტაციული ველი დამოკიდებულია დედამიწის ზომაზე, ფორმაზე, მასების განაწილებაზე მის შიგნით, მთების, ზღვების და სხვა სხეულების განლაგებაზე მის ზედაპირზე. დაძაბულობას დედამიწის მახლობელ რაიმე A წერტილში ქმნის დედამიწის შიგნით და დედამიწის ზედაპირზე არსებული ყველა მასა (ნახ. 234). ზუსტი თეორიული გამოთვლა დედამიწის ველის დაძაბულობისა რაიმე წერტილში შესაძლებელი იქნებოდა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ცნობილი იქნებოდა მისი მასა, ფორმა, მასების განაწილება მის შიგნით, მთებისა და ზღვების განლაგება მის ზედაპირზე და ა. შ.

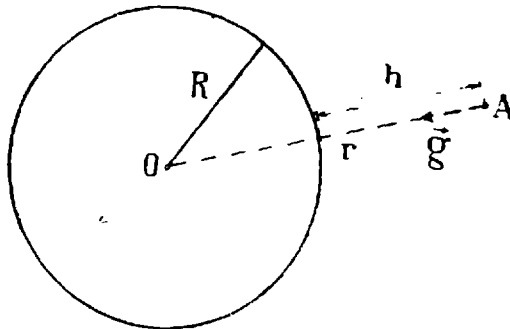


ნახ. 234.

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა ჩვენთვის შეუძლებელია. ამიტომაც იქცევითან შემდეგნაირად. ჯერ დაუშვებენ, რომ დედამიწა წარმოადგენს გარკვეული მასის ზუსტ სფეროს, რომელშიც მასები თანაბრად არიან განაწილებული, ე. ი. რომლის სიმკვრივე ყველგან ერთი და იგივეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ არ იღებენ მხედველობაში დედამიწის ფორმის გადახრას სფერული ფორმიდან, უსწორმასწორობებს მის ზედაპირზე და მასების არათანაბარ განაწილებას. ასეთი მიახლოებით დედამიწის გრავიტაციული ველის გამოთვლა არ არის ძნელი, მაგრამ, ცხადია, ამ მიახლოებაში გამოთვლილი დაძაბულობა არ დაემთხვევა მის ექსპერიმენტულად გაზომილ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ იწყებენ თანდათანობით სხვადასხვა შესწორების შეტანას. ჯერ მიიღებენ მხედველობაში იმ გარემოებას, რომ დედამიწა ზუსტად სფერო არ არის—იგი გამობერილია ეკვატორთან და ჩაჭყლეთილია პოლუსებთან, შემდეგ გამოიკვლევენ რა გავლენას ახდენენ დაძაბულობაზე განსახილველი წერტილის მახლობლად არსებული დედამიწის ზედაპირის უსწორმასწორობები (მთები, ზღვები და სხვა). კიდევ მეტი სიზუსტისათვის ცდილობენ მიიღონ მხედველობაში ის გარემოება, რომ დედამიწის სხვადასხვა ფენას

სხვადასხვა სიმკვრივე აქვს, რომ სხვადასხვა ადგილას დედამიწაში განლაგებულია სხვადასხვა მადნეული და ა. შ. ხშირად შებრუნებითაც იქცევიან. თეორიულად გამოთვლილ და ექსპერიმენტულად გაზომილ დაძაბულობებს შორის განსხვავების მიხედვით ასკენიან მასების განაწილების შესახებ დედამიწის ქერქში, მადნეულის განლაგების, მისი რაოდენობის და სხვათა შესახებ.

ფიზიკის ზოგად კურსში ყოველად შეუძლებელია ყველა ამ საკითხის განხილვა. ჩვენ დავკმაყოფილდებით მხოლოდ მიახლოებითი გამოთვლებით. ჯერ დედამიწას განვიხილავთ როგორც თანაბარი



ნახ. 235.

სიმკვრივის სფეროს, შემდეგ მოკლედ გავარკვევთ რა გავლენას ახდენს გრავიტაციულ ველზე სფერული ფორმიდან გადახრა.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ, ვინაიდან გაზომვები წარმოებს დედამიწის ზედაპირის მიმართ და დედამიწა კი არაინერციული სისტემაა, მხედველობაში იქნება მისაღები ამ არაინერციულობით გამოწვეული ინერციის ძალები. ამ საკითხს ჩვენ შემდეგ გავარჩევთ.

ვთქვათ, დედამიწა წარმოადგენს M მასის მქონე თანაბარი სიმკვრივის სფეროს¹, რომლის რადიუსი არის R (ნახ. 235). მაშინ მე-9 პარაგრაფის მიხედვით მისი ველის დაძაბულობა რაიმე A წერტილში დედამიწის გარეთ, რომელიც r მანძილით არის დაშორებული ცენტრიდან, იქნება

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{r}. \quad (\text{XIV}, 39)$$

¹ შედეგი არ შეიცვლება თუ მივიღებთ, რომ დედამიწის სიმკვრივე ყველგან ერთნაირი არ არის, მაგრამ იგი დამოკიდებულია მხოლოდ მანძილზე ცენტრიდან, ე. ი. რომ დედამიწა სხვადასხვა სიმკვრივის კონკრეტული ფენებისაგან შედგება.

ასევე მივიღებთ პოტენციალისათვის

$$V = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (\text{XIV, 40})$$

გავიხსენოთ, რომ გრავიტაციული ველის დაძაბულობა არის იმავე დროს აჩქარება, რომელსაც ღებულობს სხეული გრავიტაციულ ველში. მაშასადამე, \vec{g} არის დედამიწაზე ვარდნილი სხეულების აჩქარება. როგორც ვხედავთ, დედამიწის ველის დაძაბულობა (აჩქარება) ცენტრიდან მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია და ცენტრისაკენ არის მიმართული. მაშასადამე, სიმძიმის ძალის აჩქარება კლებულობს დედამიწის ცენტრიდან (და, მაშასადამე ზედაპირიდანაც) დაშორების დროს. თვით დედამიწის ზედაპირზე აჩქარება იქნება

$$\vec{g}_0 = -\gamma \frac{M}{R^2} \vec{R}, \quad (\text{XIV, 41})$$

პოტენციალი კი

$$V_0 = -\gamma \frac{M}{R}. \quad (\text{XIV, 42})$$

\vec{g} -სა და V -სათვის მიღებული ფორმულები მართებულია ნებისმიერი მანძილისათვის დედამიწიდან (მიღებულ მიახლოებაში), მაგრამ დედამიწის მახლობლად მათ შეიძლება უფრო მარტივი სახე მივცეთ. ვთქვათ, განსახილველი წერტილის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან არის h , მაშინ ცხადია, რომ $r = R + h$ და ფორმულები დაძაბულობისა და პოტენციალისათვის შემდეგ სახეს მიიღებენ (დაძაბულობისათვის ფორმულა სკალარულად არის დაწერილი):

$$g = \gamma \frac{M}{(R+h)^2},$$

$$V = -\gamma \frac{M}{R+h}.$$

დაეუშვათ ახლა, რომ h ძალიან მცირეა დედამიწის რადიუსთან შედარებით ($h \ll R$), მაშინ შეიძლება $\frac{1}{R+h}$ და $\frac{1}{(R+h)^2}$ გამოსახულებები გავშალოთ მწკრივებად და შემოვისახვროთ მხოლოდ რამდენიმე წევრით. თუ რამდენი წევრით შემოვისახვრებით, ეს დამოკიდებულია სიზუსტეზე, რომლითაც ვაწარმოებთ გამოთვლებსა და გაზომვებს. მივიღებთ:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h^2}{R^2} \dots \right), \quad (\text{XIV, 43})$$

$$V = -\gamma \frac{M}{R} \left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \dots \right). \quad (\text{XIV, 44})$$

თუ (XIV, 44) ფორმულაში შემოვიანაზღვრებთ ორი წევრით, მივიღებთ

$$V = -\gamma \frac{M}{R} + \gamma \frac{M}{R^2} h.$$

მაგრამ (XIV, 41) და (XIV, 42) ფორმულების თანახმად პირველი წევრი არის პოტენციალის მნიშვნელობა დედამიწის ზედაპირზე, ხოლო მეორე წევრში h -ის წინ მდგომი გამოსახულება—დაძაბულობის მნიშვნელობა იმავე ზედაპირზე. ამიტომ აღებული სიზუსტით

$$V = V_0 + g_0 h. \quad (\text{XIV, 45})$$

ამავე სიზუსტით (XIV, 43) ფორმულაში მხოლოდ პირველი წევრით უნდა შემოვიანაზღვროთ. გვექნება

$$g = g_0. \quad (\text{XIV, 46})$$

როგორც ვხედავთ, დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში ($h \ll R$) დაძაბულობა მუდმივია და პოტენციალი h სიმაღლის პროპორციულად იზრდება. გამოვარკვით რა სიმაღლემდე შეიძლება (XIV, 45) და (XIV, 46) მიახლოებითი ფორმულებით სარგებლობა. ამისათვის უნდა ვიცოდეთ რა სიზუსტით გვინდა გამოთვლების ჩატარება. ვთქვათ, ეს სიზუსტეა 1% (დაძაბულობისათვის); ეს იმას ნიშნავს, რომ მეორე წევრი დაძაბულობის გამოსახულებაში (რომელიც ჩვენ უგულებელვყავით)

$$\gamma \frac{2M}{R^3} h,$$

არ უნდა აღემატებოდეს პირველი წევრის ერთ პროცენტს, უფრო მარტივი, $\frac{2h}{R}$ არ უნდა აღემატებოდეს ერთ მეასედს. მაშასადამე, აღებული მიახლოების გამოყენების პირობა არის

$$\frac{2h}{R} < \frac{1}{100},$$

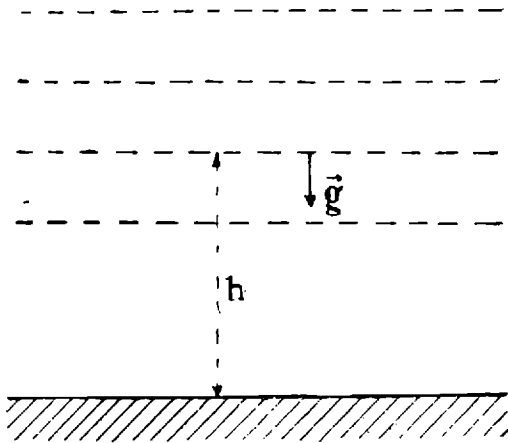
ე. ი.

$$h < \frac{R}{200}.$$

ვინაიდან დედამიწის რადიუსი დაახლოებით 6400 კმ-ია, h -ისათვის მივიღებთ

$$h < 32km.$$

მაშასადამე, 32km-ის სიმაღლემდე ჩვენ შეგვიძლია ერთი პროცენტის სიზუსტით დედამიწის ველის დაძაბულობა მუდმივად ჩავთვალოთ. მიახლოება, რომელიც (XIV,45) ფორმულით არის გამოსახული, იმას ნიშნავს, რომ არ არის მიღებული მხედველობაში დედამიწის ზედაპირის გამრუდება. დედამიწის მცირე ნაწილისათვის ეს დასაშვებია; ეს ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრტყელი,



ნახ. 236.

ხოლო ველი მის მახლობლად—როგორც ერთგვაროვანი. იზოპოტენციალური ზედაპირები იქნებიან დედამიწის ზედაპირის პარალელური სიბრტყეები და დაძაბულობა მიმართული იქნება მათ მართობულად დედამიწის ზედაპირისაკენ (ნახ. 236).

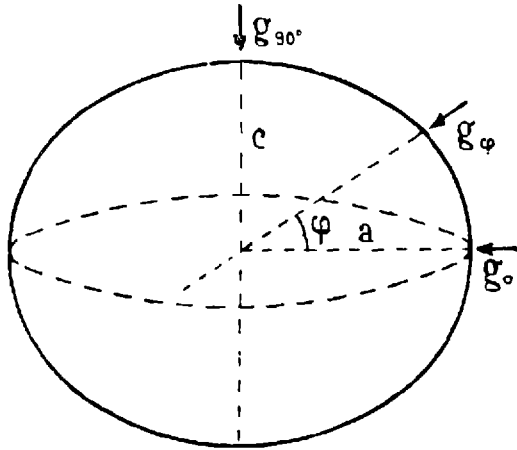
სიმძიმის ძალის აჩქარების, ანუ დაძაბულობის გაზომვის თანამედროვე სიზუსტე აღწევს $1-2 \cdot 10^{-3}$ CGS, ე. ი. ერთ-ორ მილიგალს—პროცენტის მეათედს, ისე რომ g -ს ცვლილება სიმაღლის მიხედვით ადვილად შეიძლება შეიმჩნეს.

განხილული მიახლოება, რომლის მიხედვითაც სიმძიმის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირზე ყველგან ერთნაირი უნდა იყოს (დედამიწია განხილვება როგორც ერთგვაროვანი სფერო), არ ეთანხმება ცდების შედეგებს. პირველად ფრანგი ასტრონომის რიშეს მიერ იყო შემჩნეული შესანიშნავი მოვლენა (1672 წ.), რომელმაც ცხადჰყო, რომ g სხვადასხვაა სხვადასხვა განედზე. ეკვატორის მახლობლად წარმოებული ასტრონომიული გაზომვების დროს მან

შეამჩნია, რომ პარიზიდან წამოღებული საქანიანი საათი ყოველდღიურად ორი მინუტით აგვიანებდა. საათის სწორი სვლის მისაღებად საჭირო გახდა საქანის სიგრძის შემცირება. პარიზში დაბრუნებისას გამოიკვია, რომ საათი წინ მიდიოდა და საჭირო გახდა საქანის სიგრძის გადიდება საწყის მნიშვნელობამდე. ამ მოვლენის ერთადერთი ახსნა შემდეგია. საქანის რხევის პერიოდი გამოისახება ფორმულით:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

თუ პარიზიდან ეკვატორზე გადატანის შედეგად პერიოდი გადიდდა, მაშასადამე, სიმძიმის ძალის აჩქარება ეკვატორზე ნაკლები ყოფილა, ვიდრე პარიზში (საქანის სიგრძის შეცვლა ტემპერატურის სხვაობით ვერ ხსნის ამ ეფექტს). ამიტომაც საჭირო გახდა საქანის სიგრძის



ნახ. 237.

შემცირება. შემდეგმა უფრო ზუსტმა გაზომვებმა საეცებით დაადასტურეს g -ს ცვალებადობა განედის მიხედვით. როგორც პირველად ნიუტონმა გამოარკვია, ამ ცვალებადობის მიზეზია ორი რამ: პირველი ის, რომ დედამიწა არ წარმოადგენს სფეროს, რომ იგი პოლუსებთან შეკუმშული ბრუნვის ელიფსოიდის ფორმისაა (ნახ. 237). ამის გამო პოლუსები უფრო ახლოსაა დედამიწის ცენტრთან, ვიდრე ეკვატორი და ცენტრამდე მანძილი თანდათან იზრდება პოლუსიდან ეკვატორისაკენ გადანაცვლების დროს. მეორე მიზეზი კი არის დედამიწის ბრუნვით გამოწვეული ცენტრიდანული ძალა, რომელიც მოქმედებს სიმძიმის ძალის საწინააღმდეგოდ და რომელიც აგრეთვე იზრდება პოლუსიდან ეკვატორისაკენ გადანაცვლების დროს. ცენტ-

რიდანული ძალის მოქმედებას ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ, ახლა კი გამოვარკვევთ, როგორ იცვლება g დედამიწის ზედაპირზე იმის გამო, რომ დედამიწა შეჭყლექილი ელიფსოიდია და არა სფერო.

ვთქვათ, დედამიწა არის პოლუსებთან შეჭყლექილი ერთგვაროვანი ბრუნვის ელიფსოიდი. მისი ეკვატორული რადიუსი იყოს a , ხოლო აოლარული რადიუსი კი c ($c < a$), მაშინ დაძაბულობისათვის (ე. ი. სიმძიმის ძალის აჩქარებისათვის) φ განედის მქონე წერტილისათვის დედამიწის ზედაპირზე მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$g_{\varphi} = g_0 \left(1 + \frac{a-c}{a} \sin^2 \varphi \right); \quad (\text{XIV, 47})$$

სადაც g_0 არის სიმძიმის ძალის აჩქარების მნიშვნელობა ეკვატორზე. გრადუსული გაზომვების თანახმად დედამიწის ეკვატორული და პოლარული რადიუსებისათვის შემდეგი მნიშვნელობებია მიღებული (100 მეტრის მიახლოებით):

$$a = 6378400 \text{ m}, \quad c = 6356900 \text{ m}.$$

ე. ი. პოლარული რადიუსი დაახლოებით 21,5 კმ-ით მოკლეა, ვიდრე ეკვატორული; აქედან შეჭყლექილობისათვის, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\alpha = \frac{a-c}{a}, \quad (\text{XIV, 48})$$

ვღებულობთ

$$\alpha = \frac{1}{297} \sim 0,00336;$$

მაშასადამე, ფორმულა g -სათვის შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$g_{\varphi} = g_0 (1 + 0,00336 \sin^2 \varphi); \quad (\text{XIV, 49})$$

ასე უნდა იცვლებოდეს სიმძიმის ძალის აჩქარება განედის მიხედვით, რომ დედამიწა წარმოადგენდეს ზემოთ მოყვანილი a და c ზომებით განსაზღვრულ ბრუნვის ელიფსოიდს. გაზომვები გვიჩვენებენ, რომ g მართლაც იზრდება ეკვატორიდან პოლუსისაკენ გადანაცვლებისას, მაგრამ მისი ცვლილება გაცილებით უფრო მეტია, ვიდრე ზემოთ მოყვანილი ფორმულა იძლევა. სახელდობრ, უკანასკნელი გაზომვების მიხედვით g -სათვის ფორმულა ასეთი უნდა იყოს:

$$g_{\varphi} = g_0 (1 + 0,00530 \sin^2 \varphi); \quad (\text{XIV, 50})$$

(ჩვენთვის საკმარისი მიახლოებით), ხოლო თვით g_0 -ისათვის, ე. ი.

დაძაბულობისათვის ეკვატორზე გაზომვები გვაძლევენ მნიშვნელობას:

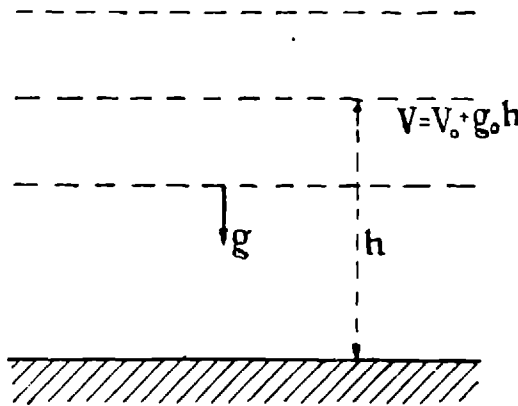
$$g_0 = 978,05 \frac{cm}{sec^2}.$$

აქედან g -სათვის პოლუსზე ვღებულობთ $g_{90^\circ} = 983,22 \frac{cm}{sec^2}$ მნიშვნელობას მაშინ, როდესაც თეორიული ფორმულა (XIV,50) გვაძლევს $g_{90^\circ} = 981,33 \frac{cm}{sec^2}$ მნიშვნელობას. ძირითადი მიზეზი

ამ განსხვავებისა ის არის, რომ ჩვენ არ მიგვიღია მხედველობაში ცენტრიდანული ძალის გავლენა, რომელიც იწვევს g -ს დამატებით ცვლილებას განედის მიხედვით. სათანადო გამოთვლები მოყვანილი იყო არაინერციული სისტემებისადმი მიძღვნილ თავში.

§ 97. სხეულების მოძრაობა დედამიწის მახლობლად

როგორც ზემოთ ვნახეთ, დედამიწის მახლობლად, დაახლოებით რამდენიმე კილომეტრის სიმაღლემდე, გრავიტაციული ველი შეიძ-



ნახ. 238.

ლება განვიხილოთ როგორც ერთგვაროვანი. დაძაბულობა ყველა წერტილში ერთნაირი და დედამიწის ზედაპირისაკენ მიმართული იქნება (ნახ. 238). გამოვარკვეოთ, როგორ მოძრაობენ ასეთ ველში სხეულები; ამისათვის ვიპოვოთ m მასის სხეულის პოტენციალური ენერგია და მასზე მოქმედი ძალა. ვინაიდან პოტენციალი და დაძაბულობა შემდეგი ფორმულებით გამოისახება:

$$V = V_0 + g_0 h,$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0,$$

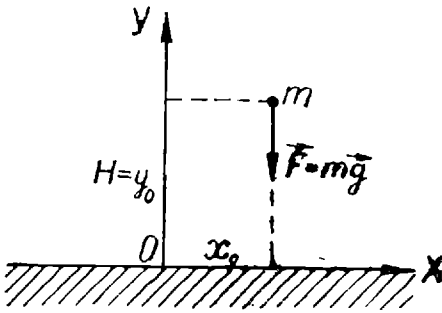
პოტენციალური ენერგიისათვის და სხეულზე მოქმედი ძალისათვის შემდეგ ფორმულებს მივიღებთ¹:

$$U = U_0 + mg_0 h,$$

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

სადაც U_0 არის სხეულის პოტენციალური ენერგია დედამიწის ზედაპირზე.

სხეულის მოძრაობის ხასიათი დედამიწის ზედაპირის მახლობლად (ჩვენ უგულებელვყოფთ ჰაერის წინააღმდეგობას), დამოკიდებულია მასზე მოქმედ \vec{F} ძალაზე და საწყის პირობებზე, ე. ი. იმაზე, თუ სად იმყოფება სხეული საწყის მომენტში და როგორია საწყისი სიჩქარე. დავუშვათ, რომ მოძრაობა წარმოებს ვერტიკალურ სიბრ-



ნახ. 239.

ტყეში. ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები, ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები, ე. ი. სათავე მოვათავსოთ ზედაპირზე, OX ღერძი — ზედაპირის გასწვრივ და OY ღერძი — ვერტიკალურად ზემოთ (ნახ. 239). ვინაიდან m წერტილზე მოქმედი ძალა ვერტიკალურად ქვემოთ არის მიმართული, ძალების გეგმილებისათვის OX და OY ღერძებზე მივიღებთ

$$F_x = 0, \quad F_y = -mg.$$

მოძრაობის განტოლებებისათვის მივიღებთ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg. \quad (\text{XIV}, 51)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ წერტილის მოძრაობა ვერტიკალურ სიბრტყეში შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჯამი ორი მოძრაობისა: თანაბარი მოძრაობისა OX ღერძის გასწვრივ, ე. ი. პორიზონტალურად და თანაბრად აჩქარებული მოძრაობისა ვერტიკალური მიმართულებით.

მიღებული განტოლებების ინტეგრება გვაძლევს:

¹ ამ პარაგრაფში დაძაბულობას დედამიწის ზედაპირზე g -თი აღვნიშნავთ.

$$x = x_0 + v_{0x} t; \quad v_x = v_{0x};$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}; \quad v_y = v_{0y} - gt. \quad (\text{XIV}, 52)$$

მუდმივი სიდიდეები (x_0, y_0) და (v_{0x}, v_{0y}) წარმოადგენენ საწყისი მდებარეობის და საწყისი სიჩქარის კოორდინატებს. მათი ცოდნა აუცილებელია მოძრაობის ხასიათის გასარკვევად. განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

1. **უძრავი სხეულის ვარდნა დედამიწის ზედაპირზე.** ვთქვათ, საწყის მომენტში ნაწილაკი იმყოფება დედამიწის ზედაპირიდან H სიმაღლეზე და უძრავია. საწყისი მდებარეობის კოორდინატები იყოს x_0 და y_0 (ნახ. 239). საწყისი სიჩქარის კოორდინატები ნულის ტოლი იქნება ($v_{0x} = v_{0y} = 0$). (XIV, 52) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$x = x_0, \quad y = H - \frac{gt^2}{2}, \quad v_x = 0, \quad v_y = -gt. \quad (\text{XIV}, 53)$$

მოძრაობა ხდება ვერტიკალურად ქვემოთ (თანაბრად აჩქარებული ვარდნა). H სიმაღლიდან ჩამოვარდნის დრო ადვილად გამოითვლება იმ პირობით, რომ დედამიწაზე დაცემის მომენტში $y = 0$. თუ ჩამოვარდნის დროს T -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

ვარდნილი სხეულის სიჩქარე თანაბრად მატულობს შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$v_y = -gt,$$

სადაც ნიშანი მინუსი მაჩვენებელია, რომ სიჩქარე მიმართულია OY -ის საწინააღმდეგოდ (ქვემოთ). (XIV, 53) ფორმულებიდან შეიძლება გამოვრიცხოთ დრო და დავაკავშიროთ ერთიმეორესთან კოორდინატი და სიჩქარე, მივიღებთ

$$v_y = \sqrt{2g(H - y)}, \quad (\text{XIV}, 54)$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ვარდნის სიჩქარე ყოველი სიმაღლისათვის.

2. **ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის მოძრაობა.** ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირის რაიმე წერტილიდან (x_0 და $y_0 = 0$) კოორდინატებით ვერტიკალურად ზემოთ ასროლილია m მასის სხეული $\vec{v}(0, v_{0y})$. საწყისი სიჩქარით. ამ საწყისი პირობების ჩასმა (XIV, 52) ფორმულებში გვაძლევს:

$$x = x_0, \quad v_x = 0,$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = v_{0y} - gt,$$

რაც, გვიჩვენებს, რომ მოძრაობა ისევ ვერტიკალური მიმართულებით ხდება. სიჩქარის ფორმულა

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (\text{XIV,55})$$

გვიჩვენებს, რომ სიჩქარე თანდათან კლებულობს და $T = \frac{v_{0y}}{g}$ მო-

მენტში ნულის ტოლი გახდება. მაშასადამე, საწყისი მომენტიდან ამ მომენტამდე მოძრაობა თანაბრად შენელებულია. T მომენტში სხეული მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს H , რომელიც გამოითვლება y -ის ფორმულიდან, მასში t -ს მაგიერ T -ს ჩასმით მივიღებთ

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \quad (\text{XIV,55}')$$

T მომენტის შემდეგ (ე. ი. გაჩერების შემდეგ) სხეული იწყებს ვარდნას თანაბრად აჩქარებული მოძრაობით, რომელიც ზემოთ იყო აღწერილი.

გამოვარკვეოთ როგორ იცვლება სხეულის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები ასეთი მოძრაობის დროს. ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად მივიღებთ

$$E = \frac{mv^2}{2} + U_0 + mgy = \text{const},$$

სადაც $U_0 + mgy$ არის y სიმაღლეზე მდებარე სხეულის პოტენციალური ენერგია. როგორც წინათ აღვნიშნეთ, ხშირად უშვებენ, რომ პოტენციალური ენერგიის ათვლა უნდა ხდებოდეს დედამიწის ზედაპირიდან და არა უსასრულობიდან, ე. ი. თვლიან, რომ პოტენციალური ენერგია ნულია არა უსასრულობაში, არამედ დედამიწის ზედაპირზე. ამ დაშვებით U_0 შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და ენერგიის ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy = \text{const};$$

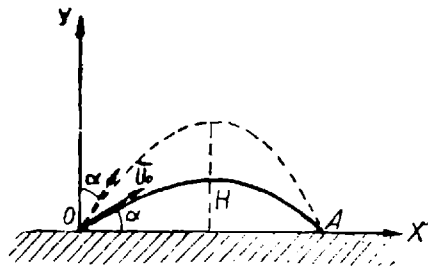
ამ ფორმულებიდან ადვილად შეიძლება დავასკვნათ, რომ ზემოთ მოძრაობის დროს კინეტიკური ენერგია პოტენციალურში გადადის, ხოლო ვარდნისას გადასვლა შებრუნებული მიმართულებით ხდება.

3. დედამიწის ზედაპირისადმი დახრილად გასროლილი სხეულის მოძრაობა. ახლა განვიხილოთ უფრო მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როდესაც სხეული გასროლილია დედამიწის ზედაპირიდან არა ვერტიკალურად, არამედ დახრილად რაღაც α კუთხით ზედაპირისადმი (ნახ. 240). საწყისი პირობები ამ შემთხვევაში იქნება ($x_0 = y_0 = 0$) და v_0 ($v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$) გამარტივებისათვის დაშვებულია, რომ კოორდინატთა სათავე გასროლის წერტილში არის არჩეული. (XIV,52) ფორმულებში ჩასმა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, & v_y &= v_0 \sin \alpha - gt. \\ x &= v_0 \cos \alpha \cdot t, & y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{XIV,56})$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ განსახილველი მოძრაობა არის ჯამი თანაბარი მოძრაობისა პორიზონტალური მიმართულებით და თანაბრად აჩქარებული (შენელებული) მოძრაობისა ვერტიკალური მიმართულებით. ტრაექტორიის მოსაძებნად ისევ გამოვირიცხოთ t ამ ორი განტოლებიდან. მივიღებთ

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (\text{XIV,57})$$



ნახ. 240.

როგორც ანალიზური გეომეტრიიდან არის ცნობილი, ეს განტოლება წარმოადგენს პარაბოლის განტოლებას; მისი სახე 240-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ჩვენ ვხედავთ, რომ დედამიწისადმი რაიმე კუთხით გასროლილი სხეული მოძრაობს დახრილად, აღწევს გარკვეულ მაქსიმალურ სიმაღლეს და ისევ ეცემა დედამიწაზე.

მოვძებნოთ მაქსიმალური სიმაღლე H და გასროლის სიშორე $OA = a$. უკანასკნელი ადვილად მოიძებნება იმ პირობიდან, რომ O და A წერტილებისათვის $y = 0$, მაშასადამე, უნდა მოიძებნოს x -ის ის მნიშვნელობები, როდესაც $y = 0$. (XIV,57) განტოლებიდან მივიღებთ

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0.$$

პირველი ფესვი $x = 0$ ეთანადება O წერტილს, მეორე ფესვი, კი, რომელიც მიიღება ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულების ნულთან.

გატოლებით, მოგვცემს A წერტილის x კოორდინატს, ე. ი. გასროლის სიშორეს

$$x_A = a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (\text{XIV}, 58)$$

მაქსიმალური სიმაღლის გამოსათვლელად საკმარისია მოვნახოთ y -ის მაქსიმუმი; ამისათვის y გავაწარმოთ x -ის მიმართ და გავუტოლოთ წარმოებული ნულს, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_c = 0,$$

სადაც x_c არის პარაბოლის წვეროს x კოორდინატი; აქედან x_c -სათვის მივიღებთ

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{a}{2}. \quad (\text{XIV}, 59)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ გასროლილი სხეული მაქსიმალურ სიმაღლეს მიაღწევს გასროლის მანძილის შუა წერტილში. თვით მაქსიმალური სიმაღლისათვის მივიღებთ (თუ x -ის ნაცვლად (XIV, 57) განტოლებაში ჩავსვამთ x_c -ს)

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha; \quad (\text{XIV}, 60)$$

ეს ფორმულა ადვილად მიიღება (XIV, 55') ფორმულიდან, თუ მასში v_0 -ს მაგიერ ჩავწერთ $v_0 \cdot \sin \alpha$, ე. ი. სიჩქარის ვერტიკალურ მდგენელს. (XIV, 58) და (XIV, 60) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ გასროლილი სხეულის მაქსიმალური აწვევის სიმაღლე და გასროლის სიშორე, თუ ცნობილია საწყისი სიჩქარის სიდიდე და პორიზონტისადმი დახრილობის კუთხე. ეს ფორმულები შეიძლება გამოყენებულ იქნენ საარტილერიო ყუმბარების გასროლის შესასწავლად (ე. წ. გარებალისტიკა). მართალია, ისინი ძალიან მიახლოებითი არიან, ვინაიდან მათი გამოყვანის დროს უგულებელყოფილია ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და g -ს ცვალებადობა სიმაღლის მიხედვით, მაგრამ პირველი ორიენტაციისათვის მათი გამოყენება საფრთხივით გამართლებულია. საინტერესოა გამოვარკვიოთ, თუ როგორ არის დამოკიდებული გასროლის მანძილი საწყისი სიჩქარის დახრილობის კუთხეზე. (XIV, 58) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ როდესაც α იცვლება 0-დან $\frac{\pi}{2}$ -მდე, გასროლის სიშორე x_A -ჯერ იზრდება (დაწყებული ნულიდან) და მაქსიმუმის მიღწევის შემდეგ

ისევ იწყებს შემცირებას (ნახ. 240). ვინაიდან $\sin 2\alpha$ -ს მაქსიმუმი (ერთის ტოლი) მიიღება $\alpha = \frac{\pi}{4}$ -თვის, გასროლის მაქსიმალური სიშორის მისაღებად (მოცემული სიჩქარის სიდიდისათვის) გასროლა უნდა ხდებოდეს 45° -ით პორიზონტისადმი. თვით გასროლის მაქსიმალური სიშორე იქნება

$$a_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

რომ დახრილობის კუთხის კიდევ უფრო გაზრდისას გასროლის მანძილი ისევ იწყებს შემცირებას, შემდეგიდან ჩანს: ვინაიდან $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$, მივიღებთ

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

სადაც

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

მაშასადამე, გასროლის სიშორე $\frac{\pi}{2} - \alpha$ კუთხისათვის ისეთივეა, როგორც α კუთხისათვის (ნახ. 240).

უნდა აღინიშნოს, რომ შეუძლებელია მიღებული შედეგების უშუალოდ გამოყენება პრაქტიკაში (ბალისტიკაში), ვინაიდან ჰაერის წინააღმდეგობის არსებობა საგრძნობლად ცვლის გასროლილი სხეულების მოძრაობის ხასიათს, განსაკუთრებით თანამედროვე სწრაფი ყუმბარების შემთხვევაში; მაგალითად, ტყვისათვის, რომლის საწყისი სიჩქარე $625 \frac{m}{sec}$, ზემოთ მოყვანილი გამოთვლები იძლევიან, რომ უდიდესი გასროლის სიშორე (45° -ით დახრის დროს) უნდა იყოს $40 km$, ხოლო აწვევის სიმაღლე $10 km$. სინამდვილეში მაქსიმალური გასროლის სიშორე არის $3 km$ და იგი მიიღება 32° -იანი კუთხით გასროლის დროს, სიმაღლე კი $1 km$ -ას არ აღემატება.

როგორც ცნობილია, უკანასკნელ წლებში პირველად საბჭოთა კავშირში და შემდეგ სხვა ქვეყნებშიც გაშვებულ იქნა მეტეოროლოგიური და ბალისტიკური რაკეტები და ხელოვნური თანამგზავრები, რომელთა სიჩქარე და ასროლის სიმაღლე ძალიან დიდია (სიჩქარე აღწევს $8 \frac{km}{sec}$ და მეტს, ხოლო ასროლის სიმაღლე $2000 km$).

შათი მოძრაობის გაანგარიშებისათვის უკვე საჭიროა მხედველობაში მიღება არა მარტო ჰაერის წინააღმდეგობისა, არამედ ρ -ს ცვლილებისა, სიმაღლისა და განედის მიხედვით და დედამიწის ბრუნვისა (ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები).

§ 98. ოკი წერტილის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით (ოკი წერტილის კროზლები)

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, გრავიტაციული ურთიერთქმედება განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ციური სხეულების მოძრაობაში. პლანეტების მოძრაობა მზის ირგვლივ, თანამგზავრების (როგორც ბუნებრივის, ისე ხელოვნურის) მოძრაობა პლანეტების ირგვლივ, კომეტების, მეტეორებისა და დედამიწის ზედაპირიდან გასროლილი სხეულების მოძრაობა ძირითადად გრავიტაციული ურთიერთქმედებით არის გამოწვეული. ციური სხეულების მოძრაობას გრავიტა ციული ურთიერთქმედების გავლენით შეისწავლის ასტრონომიის დარგი ციური მექანიკა. გამორკვევა იმისა, თუ როგორ მოძრაობენ სხეულები გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით, საკმაოდ რთულია, მაგრამ არის ზოგიერთი შემთხვევა, რომელთა განხილვა მარტივი მეთოდებითაა შესაძლებელი. ასეთი შემთხვევაა, მაგალითად, ორი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით. ვინაიდან ციურ სხეულებს, მაგალითად: მზესა და დედამიწას ან დედამიწასა და მთვარეს შორის მანძილები გაცილებით მეტია მათ ზომებზე; პირველი მიახლოებით ისინი შეიძლება ნივთიერ წერტილებად ჩავთვალოთ და მათი მოძრაობა ზემოთ მოყვანილ შემთხვევას მივაკუთვნოთ. მნიშვნელოვანია, რომ ორი წერტილის მოძრაობის განხილვის დროს ჩვენ არ მივიღებთ მხედველობაში სხვა სხეულების მოქმედებას, ვინაიდან მრავალ შემთხვევაში ეს მოქმედება ძალიან მცირეა და, გარდა ამისა, მისი მხედველობაში მიღება ძალიან გაართულებდა საკითხის განხილვას. ცნობილია, მაგალითად, რომ ე. წ. სამი წერტილის პრობლემა, ე. ი. საკითხი სამი ნივთიერი წერტილის მოძრაობისა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით იმდენად რთულია, რომ მიუხედავად უდიდესი მათემატიკოსებისა და ასტრონომების შრომებისა მისი ამოხსნა მოხერხდა მხოლოდ მეოცე საუკუნეში და ისიც მხოლოდ უსასრულო მწკრივების საშუალებით.

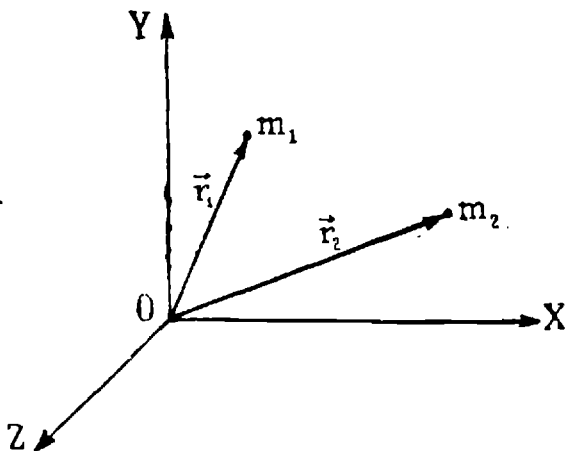
განვიხილოთ ორი ნივთიერი ნაწილაკი m_1 და m_2 მასებით (ნახ. 241) და \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორებით არჩეული ათვლის

სისტემის მიმართ. მათ შორის ურთიერთქმედება შემდეგი პოტენციური ენერჯიით გამოისახება:

$$U = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r}, \quad (\text{XIV}, 61)$$

სადაც $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ არის ნაწილაკთა შორის მანძილი. ამოცანა მდგომარეობს ნაწილაკთა ტრაექტორიების მოძებნაში და ამ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ხასიათის გარკვევაში.

როგორც ახლა გამოვარკვევთ, ამისათვის საკმარისი იქნება მუდმივობის კანონების გამოყენება. ამოცანის ამოხსნის გასამარტივებლად გადავიტანოთ კოორდინატთა სათავე ინერციის ცენტრში. ვინაიდან განსახილველი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემა იზოლირებულია, მისი ინერციის ცენტრი უძრავი იქნება ან იმოძრაებს



ნახ. 241.

მუდმივი სიჩქარით. ამიტომაც ახალ ათვლის სისტემაში ნაწილაკების მდებარეობები და რადიუს-ვექტორები ისე იქნებიან განლაგებული სათავეს მიმართ (ინერციის ცენტრის მიმართ), როგორც ეს 242-ე ნახაზზეა ნაჩვენები.

ვინაიდან სათავე ინერციის ცენტრშია მოთავსებული, ინერციის ცენტრის რადიუს-ვექტორი ნულის ტოლი იქნება, ე. ი. ამ ათვლის სისტემაში გვექნება:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

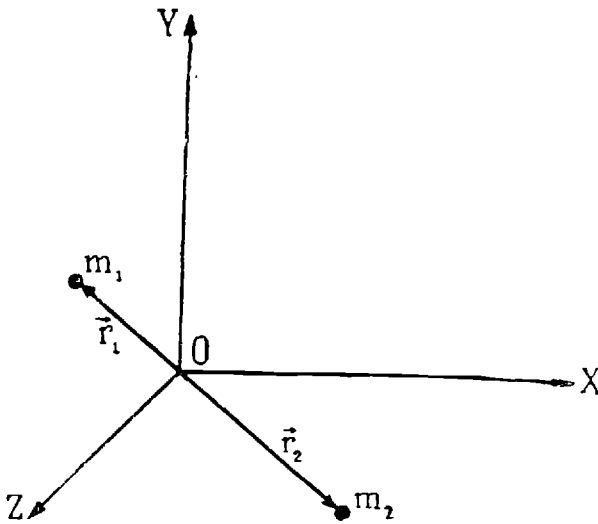
შემოვიღოთ \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორი, რომელიც m_2 ნაწილაკიდან m_1 ნაწილაკისაკენ არის გავლებული, ცხადია, რომ

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}.$$

ამ ორი განტოლების დახმარებით \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორები შეიძლება გამოვხატოთ \vec{r} -ის საშუალებით, მივიღებთ:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad (\text{XIV},62)$$

სადაც $M = m_1 + m_2$. მაშასადამე, \vec{r}_1 და \vec{r}_2 რადიუს-ვექტორების როგორც დროის ფუნქციების მოძებნა დაყვანილ იქნა \vec{r} რადიუს-ვექტორის მოძებნაზე. გამოვხატოთ ახლა ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის კანონები ამ რადიუს-ვექტორის საშუალებით. ორი ნაწი-



ნახ. 242.

ლაკისაგან შემდგარი სისტემის ენერჯიისა და იმპულსის მომენტის კანონები შემდეგნაირად იწერება:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}, \quad (\text{XIV},63)$$

$$\vec{L} = m_1 [\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \cdot \vec{v}_2] = \text{const}.$$

(XIV,62) ფორმულების გაწარმოება დროის მიმართ საშუალებას მოგვცემს გამოვსახოთ \vec{v}_1 და \vec{v}_2 სიჩქარეები ერთი \vec{v} სიჩქარის საშუალებით, რომელიც არის \vec{r} -ის წარმოებული დროით.

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{v}. \quad (\text{XIV},64)$$

(XIV,62) და (XIV,64) ფორმულების ჩასმა ენერგიისა და იმპულსის მომენტის ფორმულებში მოგვცემს

$$E = \frac{m_1 m_2}{2M} v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const}$$

და

$$\vec{L} = \frac{m_1 m_2}{M} [\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const.}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

და ვუწოდოთ ამ სიდიდეს სისტემის დაყვანილი მასა. მივიღოთ აგრეთვე მხედველობაში, რომ

$$m_1 m_2 = \mu M,$$

მაშინ ენერგიისა და იმპულსის მომენტის გამოსახულებები ასე გადაიწერება:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{\mu M}{r} = \text{const}, \quad (\text{XIV,65})$$

$$\vec{L} = \mu [\vec{r} \cdot \vec{v}] = \text{const.}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ენერგიის გამოსახულებას ისეთი სახე აქვს, თითქოს ერთი მოძრავი ნაწილაკი გვექონდეს. მართლაც, პირველი წევრი წარმოადგენს μ მასის და \vec{v} სიჩქარის მქონე ნაწილაკის კინეტიკურ ენერგიას, მეორე წევრი $\gamma \frac{\mu M}{r}$ კი არის μ და M მასების მქონე ნაწილაკების გრავიტაციული ურთიერთქმედების ენერგია. M მასის ნაწილაკი კინეტიკური ენერგია ფორმულაში არ შედის. მაშასადამე, (XIV,65) ფორმულის აზრი ასე შეიძლება განვმარტოთ. გვაქვს ორი ნაწილაკი — ერთი უძრავი M მასით და მეორე მოძრავი μ მასით, რომლებიც ურთიერთქმედებენ $-\gamma \frac{\mu M}{r}$ პოტენცია-

ლური ენერგიით. ვინაიდან M მასის ნაწილაკი უძრავია, საძიებელია მხოლოდ ერთი, μ მასის ნაწილაკის მოძრაობა. ორი, m_1 და m_2 მასების ნაწილაკების მოძრაობის მოძებნის ამოცანა დაყვანილია ერთი, μ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობის მოძებნაზე. ამიტომაც ეწოდება μ -ს სისტემის დაყვანილი მასა. ამასვე ადასტურებს იმპულსის მომენტის ფორმულა; მასში შედის მხოლოდ ერთი წევრი

$\mu [\vec{r} \cdot \vec{v}]$, რომელიც წარმოადგენს μ მასის და \vec{v} სიჩქარის მქონე ნაწილაკის იმპულსის მომენტს უძრავი ნაწილაკის მიმართ.

ყოველივე ზემოთქმული ნათლად გვიჩვენებს შემდეგს: ვინაიდან \vec{r} არის m_1 მასის ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი, m_2 მასის ნაწილაკის მიმართ მისი მოძებნა ნიშნავს m_1 ნაწილაკის მოძრაობის განსაზღვრას m_2 ნაწილაკის მიმართ, რომელიც თვითონაც მოძრაობს. ზემოთ მოყვანილი დაყვანა ერთი ნაწილაკის მოძრაობაზე გვიჩვენებს, რომ აღნიშნული მოძრაობის განსაზღვრა შეიძლება ასე მოვახდინოთ. მეორე ნაწილაკი წარმოვიდგინოთ უძრავად და მივაწეროთ მას მასა $M = m_1 + m_2$. წარმოვიდგინოთ აგრეთვე, რომ პირველი ნაწილაკის მასა არის არა m_1 , არამედ μ და შევისწავლოთ მისი მოძრაობა M მასის უძრავი ნაწილაკის მიმართ, $-\gamma \frac{\mu M}{r}$ ურთიერთ-

ქმედების გავლენით. ეს მოძრაობა ისეთივე იქნება, როგორც m_1 მასის მოძრაობა მოძრავი m_2 მასის მიმართ. ის გარემოება, რომ როდესაც ჩვენ ვგსურს შევისწავლოთ ერთი ნაწილაკის მოძრაობა მეორე, აგრეთვე მოძრავი, ნაწილაკის მიმართ, ეს მეორე ნაწილაკი უძრავად უნდა ჩავთვალოთ და მივაწეროთ მას $m_1 + m_2$ -ის ტოლი მასა, ხოლო პირველს (რომლის მოძრაობასაც ვიხილავთ) დაყვანილი მასა $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, ნათლად ჩანს შემდეგი მარტივი მსჯელობიდან.

აჩქარება (ინერციული სისტემის მიმართ), რომელსაც პირველი ნაწილაკი ღებულობს ურთიერთქმედების გავლენით, მიმართულია მეორე ნაწილაკისაკენ და $\gamma \frac{m_2}{r^2}$ -ის ტოლია. მეორე ნაწილაკიც ღებ-

ულობს აჩქარებას $\gamma \frac{m_1}{r^2}$, მიმართულს პირველი ნაწილაკისაკენ (ნახ. 243); აქედან ცხადია, რომ, თუ აღებული ინერციული სისტემიდან ვადავალთ სისტემაზე, რომელიც მეორე ნაწილაკთან ერთად მოძრაობს (ე. ი. მეორე ნაწილაკს, თუ უძრავად ჩავთვლით), პირველი ნაწილაკის აჩქარება ამ სისტემის მიმართ, ე. ი. ფარდობითი აჩქარება მეორე ნაწილაკის მიმართ, იქნება

$$\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2}.$$

შედარება $\gamma \frac{m_2}{r^2}$ ფორმულასთან გვიჩვენებს, რომ პირველი ნაწილაკის ფარდობითი აჩქარება მეორის მიმართ ისეთია, თითქოს

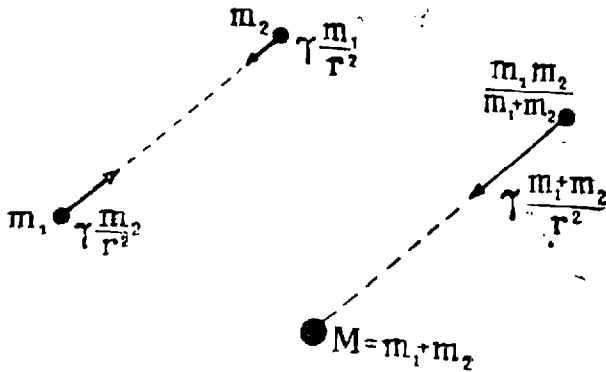
მეორე ნაწილაკის მასა ყოფილიყოს არა m_2 არამედ $m_1 + m_2$. მეორე მხრივ, პირველ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა არის $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ და იგი იწვევს პირველი ნაწილაკის თარღობით აჩქარებას $\frac{m_1 + m_2}{r^2}$ -ის ტოლს (ნახ. 243).

მაშასადამე, მისი თარღობითი მასა ყოფილა

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} : \gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

როც სწორედ დაყვანილ მასას წარმოადგენს.

როგორც ვხედავთ, პირველი ნაწილაკის მოძრაობა მეორე მოძრავე ნაწილაკის მიმართ ისეთია, როგორიც დაყვანილი მასის ნაწი-



ნახ. 243.

ლაკის მოძრაობა მასების ჯამის ტოლი მასის მქონე მეორე უძრავი ნაწილაკის მიმართ. მაგალითად, თუ ვესურს შევესწავლოთ დედამიწის მოძრაობა მზის მიმართ, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ მზე უძრავია და აქვს მზისა და დედამიწის მასების ჯამის ტოლი მასა, ხოლო დედამიწის მასა დაყვანილი მასის ტოლია. მაშასადამე, ორი ნაწილაკის პრობლემის ამოსახსნელად სავსებით საკმარისია μ მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობას განხილვა M მასის მქონე უძრავი ნაწილაკის მიმართ.

რადგანაც იმპულსის მომენტი \vec{L} მუდმივი ვექტორია და \vec{r} და \vec{v} ვექტორები მისი მართობია, ცხადია, რომ ორივე ეს ვექტორი ყოველთვის \vec{L} ვექტორის მართობია და, მაშასადამე, უცვლელ სიბრტყეში იქნებიან მდებარე; ეს კი იმას ნიშნავს, რომ განსახილველი

წერტილი \vec{L} ვექტორის მართობ სიბრტყეში მოძრაობს, ე. ი. მოძრაობა ბრტყელია. ავირჩიოთ OZ ღერძი \vec{L} ვექტორის გასწვრივ (ნახ. 244) და დავწეროთ იმპულსის მომენტის სიდიდის ფორმულა

$$L = \mu r \cdot v \sin \alpha = \text{const.} \quad (\text{XIV,66})$$

აქ α არის კუთხე რადიუს-ვექტორსა და სიჩქარეს შორის. კოორდინატთა სათავედან დავუშვათ მხებზე მართობი და აღნიშნოთ მისი სიგრძე p -თი. როგორც ნახაზი გვიჩვენებს,

$$p = r \cdot \sin \alpha,$$

რის გამოც იმპულსის მომენტის სიდიდისათვის მივიღებთ

$$L = \mu p v. \quad (\text{XIV,67})$$

განვსაზღვროთ ამ ფორმულიდან v და ჩავსვათ ენერგიის ფორმულაში, მივიღებთ

$$\frac{L^2}{2\mu p^2} - \frac{\alpha}{r} = E,$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნა:

$$\alpha = \gamma m_1 m_2 = \gamma \mu M.$$

მიღებული ტოლობა შემდეგნაირად შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{L^2}{\alpha \mu p^2} = \frac{2}{r} + \frac{2E}{\alpha}; \quad (\text{XIV,68})$$

ამ ტოლობაში ცვალებადი სიდიდეებია r და p , დანარჩენი სიდიდეები მუდმივებია. მიღებული განტოლება ახასიათებს ნაწილაკის მიერ შემოწერილ ტრაექტორიას, ვინაიდან იგი აკავშირებს ერთმანეთთან ტრაექტორიის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორის სიდიდეს, ე. ი. მიზიდვის ცენტრამდე მანძილს, ამ წერტილში გავლებულ მხებზე დაშვებული მართობის სიგრძესთან. მეორე მხრივ, ანალიზური გეომეტრიიდან ვიცით, რომ სწორედ ზემოთ მოყვანილი სახე აქვს მეორე რიგის მრუდების, ე. ი. ელიფსის, ჰიპერბოლისა და პარაბოლის განტოლებებს¹, სახელდობრ: ელიფსისათვის

¹ ეს განტოლებები შემდეგ პარაგრაფებში იქნება გამოყვანილი.

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad (\text{XIV,69})$$

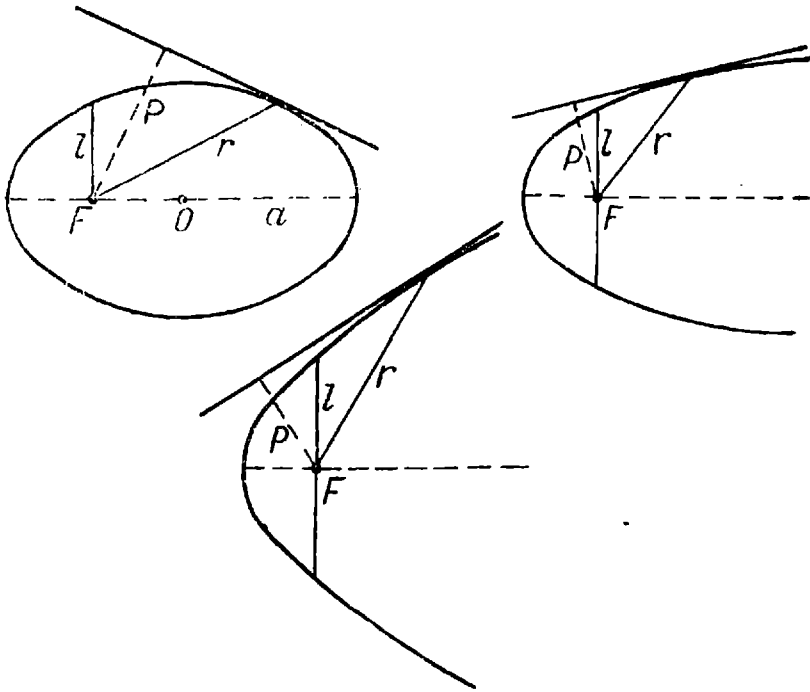
პარაბოლისათვის

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r}, \quad (\text{XIV,70})$$

ჰიპერბოლისათვის

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a}. \quad (\text{XIV,71})$$

აქ p და r სიდიდეებს იგივე მნიშვნელობა აქვთ, რაც (XIV,68) ფორმულაში. l არის პარამეტრის ნახევარი (ნახევარი ქორდისა,



ნახ. 245.

რომელიც გავლებულია ფოკუსზე ღერძის მართობულად), ხოლო a არის დიდი ნახევარღერძი (ნახ. 245). კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია მეორე რიგის მრუდის ფოკუსში (ჰიპერბოლის შემთხვევაში შიგა ფოკუსში).

(XIV,69, 70, 71) განტოლებების შედარება (XIV,68) განტოლებასთან გვიჩვენებს, რომ ნაწილაკის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით წარმოებს მეორე რიგის მრუდზე. ეს მრუდი ელიფსია, პარაბოლაა თუ ჰიპერბოლა, დამოკიდებულია

(XIV,68) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე წევრზე $\frac{2E}{\alpha}$. თუ ეს სიდიდე უარყოფითია, ტრაექტორია იქნება ელიფსი და მისი ნახევარღერძი გამოითვლება ფორმულით

$$a = -\frac{\alpha}{2E}.$$

თუ $\frac{2E}{\alpha}$ ნულია, მივიღებთ პარაბოლას უსასრულოდ დიდი ნახევარღერძით, ხოლო თუ იგი დადებითია, ვგეგნება ჰიპერბოლა ნახევარღერძით

$$a = \frac{\alpha}{2E}. \quad (\text{XIV,72})$$

ℓ პარამეტრი ყველა შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით

$$l = \frac{L^2}{\alpha\mu}. \quad (\text{XIV,73})$$

ვინაიდან $\alpha = \gamma m_1 m_2$ დადებითი სიდიდეა, პირობა იმისა, რომ ტრაექტორია იყოს ელიფსი, პარაბოლა და ჰიპერბოლა, შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} E < 0 & \text{ — ელიფსი,} \\ E = 0 & \text{ — პარაბოლა,} \\ E > 0 & \text{ — ჰიპერბოლა.} \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ტრაექტორიის სახის განმსაზღვრელია სრული ენერგია. იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ გამოვითვლით მრუდის ექსცენტრისიტეტს. ანალიზური გეომეტრიიდან ჩვენ ვიცით, რომ ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}, \quad (\text{XIV,74})$$

სადაც b არის მცირე ნახევარღერძი და გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$b^2 = l a.$$

ℓ-ისა და a -ს მნიშვნელობათა ჩასმა მოგვცემს:

$$b^2 = \mp \frac{L^2}{2\mu E}, \quad (\text{XIV,75})$$

სადაც ნიშანი მინუსი არის ელიფსისათვის, პლუსი კი ჰიპერბოლისათვის (პარაბოლისათვის $b = \infty$, ვინაიდან $E = 0$).

აქედან ექსცენტრისიტეტისათვის მივიღებთ

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 \mu}}; \quad (\text{XIV}, 76)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ, თუ ნაწილაკის სრული ენერგია დადებითია, e იქნება ერთზე მეტი და ტრაექტორია იქნება ჰიპერბოლა, თუ $E < 0$, e იქნება ერთზე ნაკლები და მივიღებთ ელიფსს, ხოლო, თუ $E = 0$, e იქნება ერთის ტოლი და გვექნება პარაბოლა.

$$\begin{aligned} E < 0, \quad e < 1 & \text{--- ელიფსი,} \\ E = 0, \quad e = 1 & \text{--- პარაბოლა,} \\ E > 0, \quad e > 1 & \text{--- ჰიპერბოლა.} \end{aligned}$$

როგორც (XIV, 72) და (XIV, 73) ფორმულები გვიჩვენებენ, ტრაექტორიის ხასიათი სავსებით განისაზღვრება ორი სიდიდით — სრული ენერგიით და იმპულსის მომენტის სიდიდით. პირველი (ენერგია) გვიჩვენებს, თუ როგორი მეორე რიგის მრუდია ტრაექტორია — ელიფსი, პარაბოლა თუ ჰიპერბოლა და საზღვრავს სათანადო დიდ ნახევარღერძს. მეორე კი (იმპულსის მომენტი) საზღვრავს მრუდის პარამეტრს. დიდი ნახევარღერძისა და პარამეტრის საშუალებით კი განისაზღვრება მრუდის სხვა დანახასიათებელი სიდიდეები — მცირე ნახევარღერძი და ექსცენტრისიტეტი.

დავუბრუნდეთ ცალკეული ნაწილაკების მოძრაობის განხილვას ინერციის ცენტრის მიმართ. გამოვიყენოთ ამისათვის (XIV, 62) ფორმულები. მხოლოდ ავიღოთ ისინი სკალარული სახით, გვექნება

$$r_1 = \frac{m_2}{M} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{M} r.$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$p_1 = \frac{m_2}{M} p, \quad p_2 = \frac{m_1}{M} p.$$

აქედან ცალკეული ნაწილაკების ორბიტებისათვის გვექნება

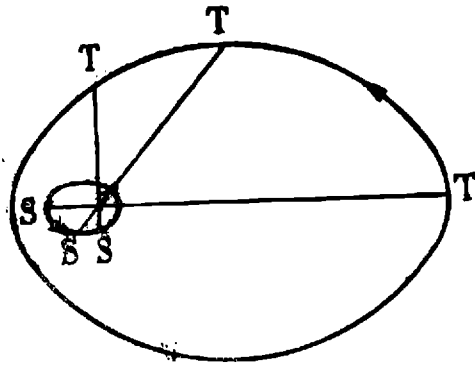
$$\frac{l_1}{p_1^2} = \frac{2}{r_1} \pm \frac{1}{a_1}, \quad \frac{l_2}{p_2^2} = \frac{2}{r^2} \pm \frac{1}{a_2}, \quad (\text{XIV}, 77)$$

სადაც

$$l_1 = \frac{m_2}{M} l, \quad a_1 = \frac{m_2}{M} a,$$

$$l_2 = \frac{m_1}{M} l, \quad a_2 = \frac{m_1}{M} a.$$

(XIV, 77) განტოლებებს ისეთივე სახე აქვთ, როგორც განტოლებას დაყვანილი მასის ნაწილაკისათვის; ეს იმას ნიშნავს, რომ ორივე ნაწილაკი მოძრაობს მეორე რიგის მრუდზე, მაგრამ ამ მრუდების ზომები მათი მასების უკუპროპორციულია. მაგალითად, თუ ორივე ნაწილაკი მოძრაობს ელიფსზე (მზისა და დედამიწის შემთხვევა), ამ ელიფსების ნახევარღერძები მასების უკუპროპორციულია. გრაფიკული ურთიერთქმედების გავლენით მზეც და დედამიწაც (უფრო სწორად მათი ცენტრები) ელიფსებზე მოძრაობენ, მაგრამ მზის მიერ



ნახ. 246.

შემოწერილი ელიფსი იმდენჯერ ნაკლები ზომისაა დედამიწის მიერ შემოწერილ ელიფსზე, რამდენჯერაც მისი მასა დედამიწის მასაზე მეტია. გარდა ამისა, მოძრაობის დროს მზე და დედამიწა ყოველთვის ინერციის ცენტრის საწინააღმდეგო მხარეზე იმყოფებიან (ნახ. 246). როგორც ცნობილია, მზის მასა დაახლოებით 300000-ჯერ

მეტია, ვიდრე დედამიწის მასა და, მაშასადამე, მის მიერ შემოწერილი ელიფსი ამდენჯერვე ნაკლები ზომისა იქნება, ვიდრე დედამიწის ორბიტა. დედამიწის ორბიტის დიდი ნახევარღერძი დაახლოებით 150 მილიონი კილომეტრია და ამიტომაც მზის ორბიტის ნახევარღერძი დაახლოებით 500 კილომეტრის ტოლი იქნება. ეს მანძილი გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე მზის რადიუსი და ამიტომაც მზის ცენტრის მიერ შემოწერილი ორბიტა მთლიანად მზის შიგნით მდებარეობს. ამიტომაც შეიძლება დავუშვათ, რომ მზე თითქმის უძრავია (ინერციის ცენტრის მიმართ).

§ 99. მთლიანი რიგის მრუდის მხებ-პოლარული განტოლება

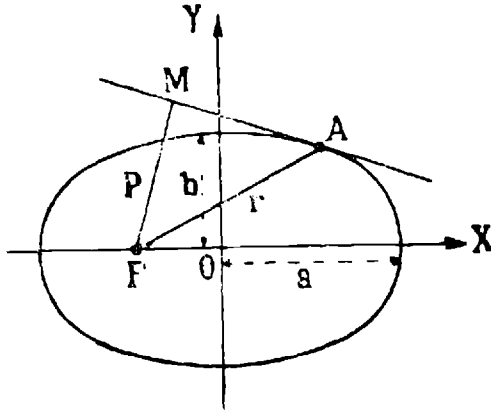
ფიზიკის თვალსაზრისით განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მეორე რიგის მრუდების მხებ-პოლარული განტოლება. ამ განტოლებაში კოორდინატებად მიღებულია არა დეკარტის კოორდინატები, როგორც, მაგალითად განტოლებაში ელიფსისათვის

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{XIV, 78})$$

არამედ სიდიდეები r და p (ნახ. 247). აქ r არის მანძილი ერთ-ერთი ფოკუსიდან მრუდის წერტილამდე, ხოლო p —სიგრძე მართობისა, რომელიც დაშვებულია ამ ფოკუსიდან მრუდის განსახილველ წერტილში გავლებული მხებისადმი.

ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ A წერტილში გავლებული მხების განტოლება არის

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad (\text{XIV}, 79)$$



ნახ. 247.

ეს განტოლება შეიძლება დავიყვანოთ ნორმალურ სახეზე

$$\frac{x_0/a^2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} x + \frac{y_0/b^2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} y - \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = 0.$$

მანძილი ფოკუსიდან მხებამდე მიიღება ამ განტოლების მარცხენა მხარეიდან, თუ მასში ჩავსვამთ მნიშვნელობებს $x = -c$, $y = 0$ და ავიღებთ მის მნიშვნელობას უარყოფითი ნიშნით. მივიღებთ

$$FM = p = \frac{1 + ex_0/a^2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

ან

$$p = \frac{a + ex_0}{a \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}, \quad (\text{XIV}, 80)$$

სადაც

$$e = \frac{c}{a}.$$

ვინაიდან ელიფსის განტოლების თანახმად

$$\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2},$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$p^2 = b^2 \frac{a + ex_0}{a - ex_0}.$$

r მანძილის შემოღება შევძლებთ ფორმულის თანახმად:

$$r = a + ex_0,$$

მოგვცემს

$$p^2 = \frac{b^2 r}{2a - r}.$$

ან

$$\frac{b^2/a}{p^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}.$$

ვინაიდან

$$\frac{b^2}{a} = l,$$

სადაც l არის ელიფსის პარამეტრი, საზოლოდ მივიღებთ

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ ჰიპერბოლისათვის

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r} + \frac{1}{a}$$

და პარაბოლისათვის

$$\frac{l}{p^2} = \frac{2}{r}.$$

მეორე რიგის მრუდების ამ სახის განტოლება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ასეთ მრუდებზე მოძრაობის შესასწავლად. მართლაც, მასში შემავალი ცვალებადი სიდიდეები r და p მარტივად არის დაკავშირებული ნაწილაკის პოტენციალურ და კინეტიკურ ენერგიებთან. პოტენციალური ენერგია არის $\frac{1}{r}$ სიდიდის პრო-

პორციული (გრაფიტაციული ურთიერთქმედებისათვის), ხოლო კინეტიკური ენერგია $\frac{\mu v^2}{2}$, გამოსატული მოძრაობის რაოდენობის მომენტის საშუალებით ($L = \mu p r$, სადაც L მუდმივია) პროპორციულია $\frac{1}{p^2}$ -ისა

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{L^2}{2\mu p^2} \quad (\text{XIV}, 81)$$

§ 100. ტრამპტორიის სახის განსაზღვრა საწყისი პირობების მიხედვით

ზემოთ მოყვანილი ფორმულები შემდეგი საკითხის გადაწყვეტის საშუალებას გვაძლევენ. ვიცით, რომ μ მასის მქონე ნაწილაკი იმყოფება \vec{r} რადიუს-ვექტორის მქონე წერტილში და აქვს v სიჩქარე. გამოვარკვით როგორი იქნება მისი ტრაექტორია უძრავი M ნაწილაკის მიმართ. ამისათვის (XIV,68) და (XIV,81) ფორმულების საშუალებით მივიღოთ განტოლება, რომელიც დააკავშირებს ნაწილაკის სიჩქარესა და რადიუს-ვექტორს დიდ ნახევარღერძთან. გვექნება

$$\mu v^2 = \frac{2\alpha}{r} \pm \frac{\alpha}{a} = 0$$

ან

$$v^2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a} \right), \quad v = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r} \pm \frac{\alpha}{\mu a}},$$

$$\frac{\alpha}{a} = \pm \left(\mu v^2 - \frac{2\alpha}{r} \right). \quad (\text{XIV}, 82)$$

ნიშანი მინუსი აღებული უნდა იყოს ელიფსისათვის, ხოლო პლუსი—ჰიპერბოლისათვის. პარაბოლისათვის $\frac{\alpha}{a} = 0$. ვინაიდან a დადებითია, ამიტომ, თუ ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება დადებითია, უნდა ავიღოთ ნიშანი პლუსი, თუ უარყოფითია—ნიშანი მინუსი. თუ r მანძილზე მყოფი ნაწილაკის სიჩქარე (მიმართულებისაგან დამოუკიდებლად) ნაკლებია, ვიდრე $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$, კვადრატული ფესვის ქვეშ უნდა ავიღოთ მინუსი ნიშანი, ე. ი. ტრაექტორია იქნება ელიფსი და ნაწილაკი ყოველთვის სასრულ მანძილზე იქნება მეორე

ნაწილაკიდან. თუ v იზრდება და უახლოვდება $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$, ელიფსის დიდი ნახევარღერძი თანდათან მატულობს და როდესაც სიჩქარე გახდება $\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}$ -ის ტოლი, a უსასრულოდ გაიზრდება. სათანადო ტრაექტორია იქნება პარაბოლა (წერტილი მიდის უსასრულობაში). სიჩქარის შემდგომი გადიდება ტრაექტორიას ჰიპერბოლად გადააქცევს (ნიშანი მინუსი ფრჩხილის წინ). როგორც ვხედავთ, ყოველი მანძილისათვის არსებობს გარკვეული სიჩქარე

$$v_k = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r}}, \quad (\text{XIV}, 83)$$

ისეთი, რომ თუ ნაწილაკის სიჩქარე მასზე მეტია, ეს ნაწილაკი მოძრაობის შედეგად უსასრულოდ დაშორდება მიზიდვის ცენტრს (ჰიპერბოლური მოძრაობა). თუ ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე v_k -ზე ნაკლებია, ნაწილაკი ყოველთვის სასრულ მანძილზე იქნება მიზიდვის ცენტრიდან (ელიფსური მოძრაობა). იმ შემთხვევაში კი, როდესაც საწყისი სიჩქარე v_k -ს ტოლია, ნაწილაკი ისევ უსასრულოდ შორდება მიზიდვის ცენტრს, მხოლოდ ამ შემთხვევაში მისი სიჩქარე უსასრულობაში ნულის ტოლი იქნება (პარაბოლური მოძრაობა). v_k სიჩქარეს კრიტიკული სიჩქარე ეწოდება მოცემული r -ისათვის. ყოველ მდებარეობას, ე. ი. r -ს ეთანადება გარკვეული კრიტიკული სიჩქარე. როგორც ვხედავთ, თუ ცნობილია მანძილი მიზიდვის ცენტრამდე და საწყისი სიჩქარის სიდიდე, შეიძლება გამოვარკვიოთ რა მრუდია ტრაექტორია და როგორია მისი დიდი ნახევარღერძები (ნახ. 248). იმის გამოსარკვევად, თუ როგორი ფორმა აქვს ტრაექტორიას (მაგალითად, ელიფსის შემთხვევაში რამდენად გაჭიმულია ან წეკუმშულია იგი), საჭიროა ვიცოდეთ მცირე ნახევარღერძი. (XIV, 75) ფორმულიდან, რომელსაც შემდეგი სახით შეიძლება დაიწეროს:

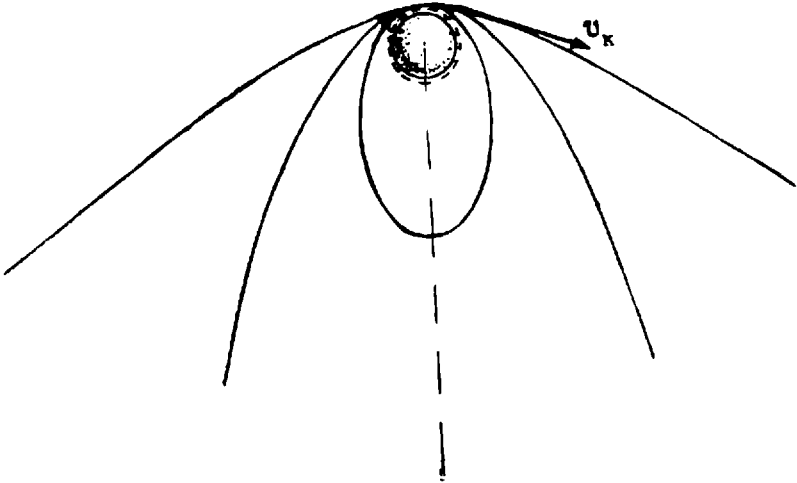
$$b^2 = \mp \frac{\mu r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{2E},$$

გამომდინარეობს, რომ ამისათვის, გარდა მანძილისა მიზიდვის ცენტრამდე და სიჩქარის სიდიდისა (v), საჭიროა კიდევ მიმართულების ცოდნა, ე. ი. ცოდნა კუთხისა (α), რომელსაც \vec{r} ადგენს \vec{r} -თან.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $\alpha = 0$, ე. ი. სიჩქარე მიმართულია \vec{r} -ის გასწვრივ, $b = 0$, ე. ი. მოძრაობა იქნება სწორხაზოვანი

(ნაწილაკის დაცემა ცენტრზე ან უსასრულოდ დაშორება სწორი ხაზის გასწვრივ).

დასასრულ გამოვარკვეოთ როგორი უნდა იყოს სიჩქარის სადიდებ და მიმართულება იმისათვის, რომ მოძრაობა წრიული იყოს. ვინაი-



ნახ. 248.

დან წრეხაზი არის ელიფსის კერძო შემთხვევა, საჭიროა, რომ სრული ენერგია იყოს უარყოფითი, ე, ი. საწყისი სიჩქარე იყოს კრიტიკულ სიჩქარეზე ნაკლები. გარდა ამისა წრეხაზისათვის ექსცენტრისიტეტი უნდა იყოს ნულის ტოლი. ეს გვაძლევს პირობას

$$1 + \frac{2L^2 E}{\alpha^2 \mu} = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\sin^2 \alpha = - \frac{\alpha^2 \mu M^2}{2r^2 v^2 E}, \quad (\text{XIV}, 84)$$

სადაც α არის კუთხე საწყისი სიჩქარესა და რადიუს-ვექტორს შორის. მეორე მხრივ, წრიული მოძრაობის დროს გრავიტაციული მიზიდვის ძალა ცენტრისკენული ძალის ტოლი იქნება

$$\gamma \frac{\mu M}{r^2} = \frac{\mu v^2}{r},$$

საიდანაც პოტენციალური ენერგისათვის მივიღებთ

$$- \gamma \frac{\mu M}{r} = \mu v^2; \quad (\text{XIV}, 85)$$

აქედან სრული ენერგიისათვის გვექნება

$$E = \frac{\mu v^2}{2}.$$

ჩასმა (XIV,84) ფორმულაში მოგვცემს

$$\sin^2 \alpha = \frac{\gamma^2 M^2}{r^2 v^4}.$$

მეორე მხრივ, (XIV,85) ფორმულიდან

$$r^2 v^4 = \gamma^2 M^2,$$

ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$\sin^2 \alpha = 1, \text{ ე. ი. } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

ეს შედეგი იმის მაჩვენებელია, რომ წრიული მოძრაობის მისაღებად ნაწილაკს უნდა მიენიჭოს სიჩქარე

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}, \quad (\text{XIV,86})$$

ხოლო მიმართულება სიჩქარისა უნდა იყოს რადიუს-ვექტორის მართობი.

განვიხილოთ საკითხი ტრაექტორიის გეომეტრიული აგებისა საწყისი პირობების მიხედვით. ვთქვათ, μ მასის მქონე ნაწილაკი მიიზიდება გრავიტაციული ურთიერთქმედებით M მასის მქონე უძრავი ნაწილაკის მიერ. ცნობილია, რომ საწყის მომენტში μ ნაწილაკი იმყოფება r მანძილზე (A წერტილში) M ნაწილაკიდან და აქვს \vec{v} სიჩქარე (ნახ. 249). საძიებელია μ ნაწილაკის ტრაექტორია. პირველ ყოვლისა, ენერგიის ნიშნის მიხედვით

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{M\mu}{r}$$

გამოვარკვევთ რას წარმოადგენს ორბიტა—ელიფსს, პარაბოლას თუ ჰიპერბოლას. ვთქვათ, გამოიკვება, რომ ორბიტა ელიფსია (სრული ენერგია უარყოფითია), ამის შემდეგ ფორმულიდან

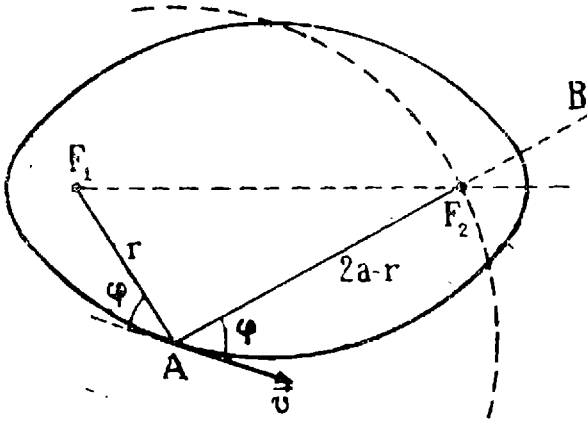
$$a = -\gamma \frac{\mu M}{2E}$$

გამოითვლება ელიფსის დიდი ნახევარღერძი, ხოლო ფორმულიდან

$$l = \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{\gamma \mu^2 M}$$

—ორბიტის პარამეტრი.

ვინაიდან ელიფსის თვისების გამო A წერტილიდან მეორე ფოკუსამდე (პირველ ფოკუსში იმყოფება M მასა) მანძილი არის $2a-r$, ამ მეორე ფოკუსის მოძებნა შემდეგნაირად შეიძლება. A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვწერთ წრეხაზს $2a-r$ რადიუსით. მეორე ფოკუსი ამ წრეხაზზე უნდა მდებარეობდეს და მისი მდებარეობის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყენოთ ელიფსის ის თვისება, რომ ფოკუსებიდან A წერტილში გავლებული რადიუს-ვექტორები ტოლ კუთხეებს ადგენდნენ მხებთან, ე. ი. სიჩქარის

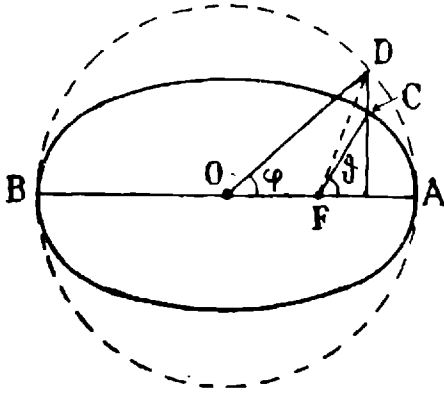


ნახ. 249.

მიმართულებასთან. მაშასადამე, მეორე ფოკუსი უნდა მდებარეობდეს $2a-r$ წრეხაზის და A წერტილას სიჩქარისადმი ϕ კუთხით დახრილ AB სწორი ხაზის გადაკვეთაზე. რაკი ცნობილია ელიფსის დიდი ნახევარღერძი და ორივე ფოკუსის მდებარეობა, ელიფსი მთლიანად განსაზღვრული იქნება. ანალოგიურად განიხილება პარაბოლისა და ჰიპერბოლის შემთხვევები.

ორბიტის პოვნის შემდეგ ბუნებრივად ისმის საკითხი მოძრაობის განსაზღვრისა ორბიტაზე, ე. ი. იმის განსაზღვრისა, თუ სად იმყოფება ნაწილაკი (პლანეტა) დროის მოცემულ მომენტში. ჩვენ მოკლედ განვიხილავთ ამ ამოცანას ელიფსური ორბიტისათვის. შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება, რომელაც ხშირად გამოიყენება ასტრონომიაში. ორბიტის დიდი ნახევარღერძის ბოლო წერტილებს ეწოდებათ „აფსიდები“, ხოლო მათ შემაერთებელ სწორ ხაზს (დიდი ღერძს)— „აფსიდთა ხაზი“. თუ განიხილება ორბიტა მზის მიმართ, შორეულ აფსიდას ეწოდება აფელიუმი, ხოლო უახლოეს აფსიდას— პერიპელიუმი. თუ განიხილება დედამიწის ირგვლივ მოძრავი სხეულის ორბიტა, ამ წერტილებს სათანადოდ ეწოდება „აპოგეუმი“

და „პერიგეუმი“. აღნიშნოთ φ ასოთი კუთხე (ნახ. 250), რომელსაც პლანეტის რადიუს-ვექტორი (ფოკუსიდან) ადგენს უახლოესი აფსიდისაკენ გავლებულ ხაზთან. ამ კუთხეს ეწოდება „ქეშმარიტი ანომალია“. ამოცანა სწორედ ამ კუთხის განსაზღვრაში მდგომარეობს, თუ მოცემულია უახლოესი აფსიდიდან მოცემულ მდებარეობამდე



ნახ. 250.

მისვლისათვის საჭირო დრო. ამისათვის ელიფსის ირგვლივ შემოვწეროთ a რადიუსის მქონე „დამხმარე წრეხაზი“, რომლის ცენტრი იქნება ელიფსის ცენტრი. აღვმართოთ აფსიდიდან ხაზიდან n' ნორმალი პლანეტამდე და გავაგრძელოთ ეს ნორმალი დამხმარე წრეხაზის გადაკვეთამდე. აღნიშნოთ ეს წერტილი D ასოთი.

ამ წერტილის შეერთებით ელიფსის ცენტრთან მივიღებთ DOA კუთხეს, რომელსაც ეწოდება „ექსცენტრიკული ანომალია“. ამის შემდეგ ნახაზიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\frac{l}{r} = 1 + \cos \varphi \quad (XIV, 87)$$

და

$$r = a(1 - \cos \varphi). \quad (XIV, 88)$$

აღნიშნოთ t -თი დრო, რომელიც სჭირდება პლანეტას A წერტილიდან C წერტილში გადასასვლელად. მაშინ კეპლერის კანონის თანახმად (იხ. შემდეგ)

$$\frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\text{ფართობი } AFC}{\text{ელიფსის ფართობი}} = \frac{\text{ფართობი } AFD}{\text{წრის ფართობი}} = \frac{\text{ფართობი } AOD - \text{ფართობი } FOD}{\text{წრის ფართობი}} = \frac{\frac{1}{2} a^2 \varphi - \frac{1}{2} a^2 e \sin \varphi}{\pi a^2}.$$

აქ ω არის საშუალო კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

აქედან ვღებულობთ

$$\omega t = \varphi - e \sin \varphi. \quad (XIV, 89)$$

მიღებული ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ ამოვხსნათ ჩვენი ამოცანა. მოცემული t -სათვის (XIV,89) ფორმულიდან ვიპოვიტ ფ კუთხეს, შემდეგ (XIV,88) ფორმულის გამოყენებით განვსაზღვრავთ r -ს, ხოლო (XIV,87) ფორმულის საშუალებით ვიპოვიტ φ კუთხეს. ჩვენ არ შევჩერდებით იმის განხილვაზე, თუ როგორ წარმოებს ამ გამოთვლების ჩატარება (იხ. ასტრონომიის კურსები).

§ 101. კეპლერის კანონების გამოკვანა ნიუტონის კანონიდან

მსოფლიო მიზიდულობის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მაგალითს წარმოადგენს ციური სხეულების და, კერძოდ, მზისა და პლანეტების ურთიერთქმედება. ისტორიულად სწორედ პლანეტების მოძრაობის შესწავლის შედეგად იყო დადგენილი მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ნიუტონის მიერ თავისი კანონის აღმოჩენამდე 60 წლით ადრე (მეჩვიდმეტე საუკუნის დასაწყისში) ცნობილმა გერმანელმა ასტრონომმა ი. კეპლერმა ასტრონომ ტიხო ბრაგეს და თავისი მრავალწლიანი დაკვირვებების ანალიზის შედეგად დაადგინა პლანეტთა მოძრაობის სამი კანონი, რომლებიც ცნობილია კეპლერის კანონების სახელწოდებით. ეს კანონები შემდეგია:

1. ყოველი პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.
2. მზიდან პლანეტამდე გავლებული რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ტოლ შუალედებში შემოწერილი ფართობები ტოლია.
3. სხვადასხვა პლანეტისათვის ორბიტაზე შემოვლის პერიოდების კვადრატები მზემდე საშუალო მანძილების კუბების პროპორციულია.

სანამ გადავიდოდეთ ამ კანონების გამოყვანაზე მსოფლიო მიზიდულობის კანონებიდან, ვნახოთ როგორ შეიძლება ამ კანონების დადგენა ასტრონომიული დაკვირვებების საშუალებით. კეპლერის პირველი კანონის შემოწმების ყველაზე მარტივი ხერხია მზის ხილული დიამეტრის ცვლილების შესწავლა. მართლაც, თუ პლანეტა, მაგალითად დედამიწა, მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე, მანძილი მზიდან დედამიწამდე უნდა იცვლებოდეს შემდეგი კანონის მიხედვით:

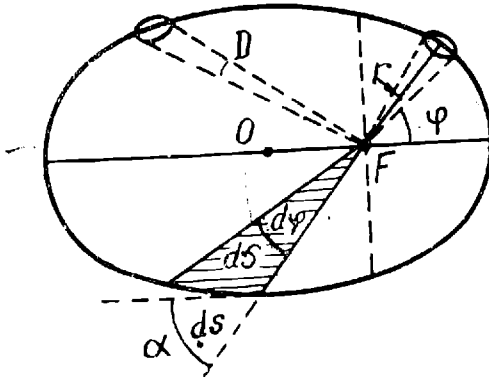
$$r = \frac{l}{1 + e \cos \varphi}, \quad (\text{XIV}, 90)$$

სადაც φ არის უმცირესი მანძილის მიმართულებიდან ათვლილი კუთხე (ნახ. 251). მზის ხილული დიამეტრი (მისი კუთხური ზომა)

r მანძილის უკუპროპორციულად უნდა იცვლებოდეს, ე. ი. (XIV,90) ფორმულის თანახმად უნდა იყოს $1 + e \cos \varphi$ სიდიდის პროპორციული

$$D \sim 1 + e \cos \varphi.$$

თუ დაკვირვებით დამტკიცდა, რომ მზის ხილული დიამეტრი ამ კანონის მიხედვით იცვლება, ეს იმის მაჩვენებელი იქნება, რომ



ნახ. 251.

დედამიწა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსზე. დაკვირვებები, მართლაც, ადასტურებენ (XIV,90) ფორმულით გამოსახულ დამოკიდებულებას და ამით ამტკიცებენ კეპლერის პირველ კანონს. მზის ხილული დიამეტრის გაზომვა ორბიტის ექსცენტრისიტეტის გამოთვლის საშუალებას გვაძლევს. უმცირესი და უდიდესი ხილული დიამეტრები D_{min} და D_{max}

ეთანადებიან $\varphi = \pi$ და $\varphi = 0$ მნიშვნელობებს, ამიტომ

$$\frac{D_{min}}{D_{max}} = \frac{1-e}{1+e}, \text{ ე. ი. } e = \frac{D_{max} - D_{min}}{D_{max} + D_{min}}. \quad (\text{XIV,91})$$

თვით კეპლერის მიერ მისი პირველი კანონი შემოწმებული იყო მარსზე დაკვირვების საშუალებით. მეორე კანონის შემოწმება მარტივია ისევ დედამიწის შემთხვევაში. dt დროში რადიუს-ვექტორის მიერ შემოწერილი ფართობი იზომება $r^2 d\varphi$ სიდიდით, სადაც $d\varphi$ არის კუთხის ნაზრდი. კეპლერის მეორე კანონის თანახმად ეს სიდიდე ერთი და იგივე უნდა იყოს წელიწადის სხვადასხვა დროს, თუ ყოველთვის არჩეულია ერთი და იგივე dt ; აქედან გამომდინარეობს, რომ $d\varphi$ უნდა იცვლებოდეს მზის ხილული დიამეტრის კვადრატის პროპორციულად, ვინაიდან r და D ერთიმეორის უკუპროპორციულია

$$d\varphi \sim D^2. \quad (\text{XIV,92})$$

დაკვირვებები, მართლაც, ადასტურებენ ამ პროპორციულობას. კეპლერის მესამე კანონი ადვილად შეიძლება შემოწმდეს უშუალო დაკვირვებებით, ვინაიდან როგორც გარსშემოვლის პერიოდები, ისე მზემდე მანძილები ზუსტად შეიძლება გაიზომოს. ვაჩვენოთ

ახლა, რომ კეპლერის კანონები აუცილებლად გამომდინარეობენ ნიუტონის კანონიდან. კეპლერის პირველი კანონი გამომდინარეობს წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგიდან, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში, ერთი ნაწილაკი მოძრაობს მეორის მიმართ მეორე რიგის მრუდზე და ამ მრუდებს შორის სასრულია მხოლოდ ელიფსი (პარაბოლური და ჰიპერბოლური მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ კომეტებისათვის).

კეპლერის მეორე კანონი წარმოადგენს იმპულსის მუდმივობის კანონის უშუალო შედეგს, ამ კანონის თანახმად მზის მიმართ პლანეტის მოძრაობის დროს მუდმივი უნდა იყოს შემდეგი გამოსახულება:

$$L = \mu r v \sin \alpha = \text{const.}$$

ვინაიდან μ მუდმივია და სიჩქარე შეიძლება გამოვსახოთ როგორც რკალის წარმოებული დროის მიმართ $v = \frac{ds}{dt}$, მივიღებთ

$$r \cdot \frac{ds}{dt} \sin \alpha = \text{const.}$$

შაგრამ, როგორც ნახაზი გვიჩვენებს (ნახ. 251), $r ds \sin \alpha$ არის რადიუს-ვექტორის მიერ dt დროში შემოწერილი ფართობის გაორკეცებული მნიშვნელობა

$$r ds \cdot \sin \alpha = 2dS,$$

ამიტომაც იმპულსის მუდმივობის კანონიდან გამომდინარეობს შემდეგი სიდიდის მუდმივობა:

$$\frac{dS}{dt} = \text{const} = \frac{L}{2\mu}; \quad (\text{XIV, 93})$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომ სიდიდეს ეწოდება ფართობითი სიჩქარე, ვინაიდან იგი წარმოადგენს რადიუს-ვექტორის მიერ დროის ერთეულში შემოწერილ ფართობს, ფართობითი სიჩქარის მუდმივობა სწორედ კეპლერის მეორე კანონის გამომხატველია, ვინაიდან იგი გვეუბნება რომ დროის ტოლ შუალედებში შემოწერილი ფართობები ტოლია. (XIV, 93) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს

$$S = \text{const.} \cdot t = \frac{L}{2\mu} t, \quad (\text{XIV, 94})$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შემოწერილი ფართობი დროის პროპორციულია. კეპლერის მესამე კანონი უშუალოდ გამომდინარეობს

(XIV,94) ფორმულიდან. თუ t -სათვის ავიღებთ ორბიტის შემოვლის T პერიოდს, S ფართობი ელიფსის ფართობის ტოლი იქნება. ვინაიდან ელიფსის ფართობი არის πab , მივიღებთ

$$\pi ab = \frac{L}{2\mu} T. \quad (\text{XIV,94}')$$

თუ ამ ფორმულიდან განსაზღვრულ L -ს ჩავსვამთ (XIV,73) ფორმულაში, მივიღებთ

$$l = \frac{4\pi^2 a^3 b^2 \mu}{\alpha} \frac{1}{T^2}.$$

მეორე მხრივ, ანალიზური გეომეტრიიდან ელიფსის პარამეტრი შემდეგნაირად არის დაკავშირებული ელიფსის ნახევარღერძებთან:

$$l = \frac{b^2}{a}.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 \mu}. \quad (\text{XIV,95})$$

თუ გავიხსენებთ μ და α სიდიდეების მნიშვნელობებს

$$\mu = \frac{M m}{M + m}, \quad \alpha = \gamma M m,$$

მივიღებთ

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} (M + m). \quad (\text{XIV,96})$$

კეპლერის მესამე კანონის თანახმად $\frac{a^3}{T^2}$ ერთი და იგივე უნდა იყოს.

ყველა პლანეტისათვის, მაგრამ ჩვენ მიერ მიღებული ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ეს ზუსტად ასე არ არის. (XIV,96) ტოლობის მარჯვენა მხარეში დგას გამოსახულება $M + m$, რომელიც არის მზისა და პლანეტის მასების ჯამი. ცხადია, რომ ეს სიდიდე სხვადასხვაა სხვადასხვა პლანეტისათვის (პლანეტების მასების სხვადასხვაობის გამო). მაშასადამე, ჩვენ ვხედავთ, რომ კეპლერის კანონი ზუსტი არ არის. მუდმივია არა $\frac{a^3}{T^2}$, არამედ სიდიდე

$$\frac{a^3}{(M + m)T^2} = \text{const.} \quad (\text{XIV,97})$$

მაგრამ კეპლერის კანონის ეს შესწორება იმდენად მცირეა, რომ კეპლერის არაზუსტი დაკვირვებების დროს იგი არ იქნა შემჩნეული. მართლაც, პლანეტების მასები იმდენად მცირეა მზის მასასთან შედარებით, რომ (XIV,96) ფორმულაში შეიძლება უგულვებელყოთ m შედარებით მზის M მასასთან და დავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} M = \text{const}, \quad (\text{XIV},98)$$

ამ მიახლოებით კეპლერის მესამე კანონი მართებულია. რომ პლანეტის მასა შეიძლება უგულვებელყოთ მზის მასასთან შედარებით, იქიდანაც ჩანს, რომ უდიდესი პლანეტის—იუპიტერის—მასა დაახლოებით 1000-ჯერ ნაკლებია მზის მასაზე.

§ 102. ნიუტონის კანონის გამოყვანა კეპლერის კანონებიდან

წინა პარაგრაფში ჩვენ გამოვიყვანეთ კეპლერის კანონები ნიუტონის კანონიდან. ახლა განვიხილავთ შებრუნებულ ამოცანას. ვთქვათ, პლანეტების მოძრაობაზე უშუალო დაკვირვებებით ჩვენ დავადგინეთ კეპლერის კანონები, ე. ი. მოვნახეთ პლანეტის ტრაექტორია და მასზე მოძრაობის ხასიათი. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, როგორია მზისა და პლანეტათა ურთიერთქმედების ხასიათი, ე. ი. მოვძებნოთ პოტენციალური ენერგია ან ძალა. ჩვენ ახლავე ვნახავთ, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა სავსებით შესაძლებელია.

ვთქვათ, $ABCD$ არის ელიფსი, რომელზედაც პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ. S იყოს მზე (მოთავსებული ერთ-ერთ ფოკუსში), ხოლო T —პლანეტა (ნახ. 252). შევეერთოთ პლანეტა ელიფსის ფოკუსებთან r და r_1 რადიუს-ვექტორებით. გავატაროთ აგრეთვე T წერტილში მხები და დავუშვათ მასზე მართობები ფოკუსებიდან. აღვნიშნოთ SM და S_1N მონაკვეთები R -ითა და R_1 -ით. ვინაიდან ელიფსისადმი მხები ტოლ კუთხეებს ადგენს რადიუს-ვექტორებთან, SMT და S_1NT სამკუთხედები მსგავსი იქნება და ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგ პროპორციას:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{r}{2a-r},$$

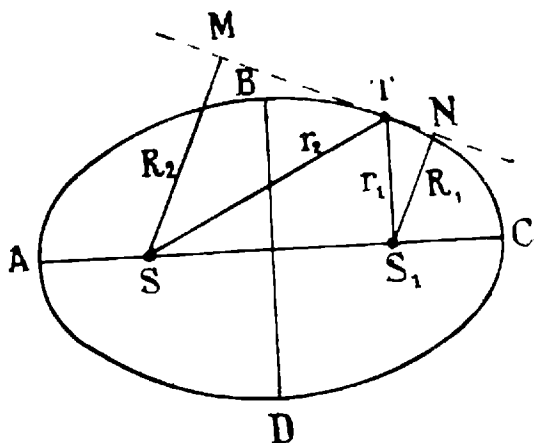
ვინაიდან

$$r + r_1 = 2a.$$

გარდა ამისა, ელიფსის გეომეტრიული თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R \cdot R_1 = b^2.$$

კეპლერის მეორე კანონის თანახმად იმპულსის მომენტი მუდმივო სიდიდეა, ე. ი.



ნახ. 252.

$$vR = \frac{L}{\mu} = \text{const.}$$

აქედან v^2 -ისათვის მივიღებთ

$$v^2 = \frac{L^2}{\mu^2} \frac{1}{R^2} = \frac{L^2}{\mu^2} \frac{2a-r}{rb}$$

ან

$$v^2 = \frac{2aL^2}{\mu^2 b} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 b}.$$

გამოვითვალოთ პლანეტის კინეტიკური ენერგია მზის მიმართ; ეს ენერგია შემდეგნაირად გამოისახება:

$$E_k = \frac{1}{2} \mu v^2,$$

სადაც μ არის პლანეტის დაყვანილი მასა. v^2 -ის მნიშვნელობის ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{2\mu b^2}. \quad (\text{XIV, 99})$$

მაგრამ როგორც ვიცით, $\frac{1}{2} \mu v^2$ არის იმავე დროს მზისა და პლანეტის კინეტიკური ენერგიების ჯამი

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

ამიტომ (XIV,99) ფორმულა ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} = \frac{L^2}{2\mu b^2}. \quad (\text{XIV,100})$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მთელი კინეტიკური ენერგია გამოისახება როგორც ფუნქცია მზისა და პლანეტის მანძილისა, როგორც უნდა იყოს ენერგიის მუდმივობის კანონის თანახმად. თუ მარჯვენა მხარეში მდგომ, მანძილზე დამოკიდებულ წევრს გადავიტანთ მარცხნივ, მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r} = -\frac{L^2}{2\mu b^2} = \text{const} \quad (\text{XIV,101})$$

მაშასადამე, მოძებნილია მანძილის ისეთი ფუნქცია $-\frac{L^2 a}{\mu b^2} \frac{1}{r}$,

რომლის დამატებაც კინეტიკური ენერგიის ჯამისადმი მუდმივ სიდიდეს გვაძლევს. აღვნიშნოთ ეს ფუნქცია $U(r)$ -ით და ჩავთვალოთ იგი ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიად

$$U(r) = -\frac{L^2 a}{\mu b^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (\text{XIV,102})$$

ენერგიის მუდმივობის კანონი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r) = -\frac{L^2}{2\mu b^2} = \text{const}.$$

პოტენციალური ენერგიის გამოსახულებაში შემავალი მუდმივის დამოკიდებულება მასებზე ადვილად მოიძებნება კეპლერის მესამე კანონიდან. მართლაც, (XIV,94') ფორმულის თანახმად

$$\frac{L^2 a}{\mu b^2} = 4\pi^2 \mu \frac{a^3}{T^2}.$$

კეპლერის მესამე კანონის თანახმად (ზუსტი სახე) $\frac{a^3}{T^2}$ უკუპროპორციულია მზისა და პლანეტის მასების ჯამისა

$$\frac{a^3}{T^2} \sim \frac{1}{M + m}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$\mu = \frac{Mm}{M+m},$$

გვექნება

$$\frac{L^2 a}{\mu b^2} \sim Mm,$$

ამიტომაც პოტენციალური ენერჯისათვის მივიღებთ

$$U(r) \approx - \frac{Mm}{r}. \quad (\text{XIV}, 103)$$

მუდმივა (გრავიტაციული მუდმივა) უნდა მოიძებნოს ცდების საშუალებით. როგორც ვხედავთ, პლანეტების მოძრაობის ანალიზის საფუძველზე და კეპლერის კანონების საშუალებით ჩვენ დავადგინეთ, რომ პლანეტისა და მზის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია პირდაპირპროპორციულია მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია მანძილისა, აქედან ადვილად შეიძლება გაწარმოებით მივიღოთ ნიუტონის ფორმულა გრავიტაციული ძალისათვის

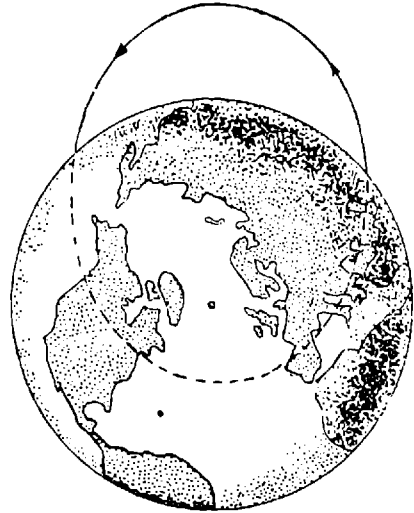
$$\vec{F} = - \gamma \frac{Mm}{r^2} \vec{r}.$$

§ 103. ბალისტიკური რაკეტისა და ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა

ცნობილია, რომ ბოლო წლებში ჯერ საბჭოთა კავშირში (1957 წ.) ხოლო შემდეგ ამერიკის შეერთებულ შტატებში გაშვებულ იქნა ბალისტიკური რაკეტები და ხელოვნური თანამგზავრები. 1959 წელს კი პირველად ისტორიაში საბჭოთა კავშირში გაშვებულ იქნა კოსმოსური რაკეტა, რომელიც სრულიად მოსწყდა დედამიწას და გადაიქცა მზის სისტემის ხელოვნურ პლანეტად. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ საკითხს, თუ როგორ ხდება რაკეტებისა და თანამგზავრების გაშვება და როგორ შეიძლება მათი მოძრაობის განსაზღვრა გაშვების შემდეგ. ცხადია, რომ ეს განხილვა არ იქნება სრული, ვინაიდან ჩვენ ვერ შევძლებთ ყველა ფაქტორის მხედველობაში მიღებას (ატმოსფეროს წინააღმდეგობა, ცენტრიდანული და კორიოლის ძალების მოქმედება და სხვა). ჩვენ შევეცდებით გავარკვიოთ მოძრაობის ზოგადი ხასიათი მხოლოდ დედამიწის გრავიტაციული მოქმედების მხედველობაში მიღებით.

დავუშვათ, რომ დედამიწა წარმოადგენს ერთგვაროვან სფეროს და ნუ მივიღებთ მხედველობაში ჰაერის წინააღმდეგობას და დედა-

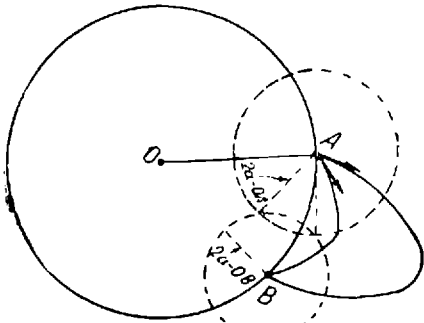
მიწის ბრუნვას ღერძის ირგვლივ. ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირიდან რაღაც s სიჩქარით გასროლილია m მასის სხეული. რა მიმართულებით და რა სიდიდის სიჩქარით უნდა მოხდეს გასროლა იმისათვის, რომ სხეული დაეცეს დედამიწის ზედაპირის არჩეულ ადგილას (ნახ. 253) (ბალისტიკური რაკეტის შემთხვევა) ან იქცეს ხელოვნურ თანამგზავრად. გავარჩიოთ ეს შემთხვევები ცალ-ცალკე.



ნახ. 253.

1. ბალისტიკური რაკეტა. ვთქვათ, დედამიწის ზედაპირის A წერტილიდან საჭიროა გასროლა ბალისტიკური რაკეტისა, რომელიც უნდა მოხვდეს ზედაპირის B წერტილში (ნახ. 254). დავუშვათ, რომ რაკეტა ერთსაფეხურიანია, ე. ი. მივიღოთ, რომ მთელი საწვავი იწვის საწყის მომენტში და რაკეტას თავიდანვე ენიჭება გარკვეული სიდიდისა და მიმართულების სიჩქარე, ხოლო მისი შემდგომი მოძრაობის დროს მასზე მხოლოდ გრავიტაციული ძალა მოქმედებს (ფაქტიურად ერთსაფეხურიანი რაკეტის შემთხვევაშიც კი სიჩქარის ცვლილება, გაზების გამოტყორცნის გამო, წარმოებს გარკვეული დროის განმავლობაში. ასე რომ, ჩვენ მიერ საკითხის განხილვა ამ მხრივაც მიახლოებითია). საკითხი შემდეგნაირად ისმის: რა მიმართულებით უნდა მოხდეს რაკეტის გასროლა, რომ იგი, გარკვეული სიჩქარით გამოტყორცნილი, A წერტილიდან B წერტილში მოხვდეს? ცხადია, რომ რაკეტა უნდა მოძრაობდეს ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთი ფოკუსი იქნება დედამიწის ცენტრი, მეორე ფოკუსის მოსაძებნად უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც მე-13 პარაგრაფში მოვიქცეთ. მოცემული სიჩქარის საშუალებით და (XIV, 82) ფორმულის გამოყენებით ვიპოვიოთ ელიფსის დიდ ნახევარღერძს. შემდეგ A წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, გავავლებთ $2a - OA$ რადიუსის მქონე წრეხაზს. მეორე ფოკუსი ამ წრეხაზზე უნდა მდებარეობდეს. ვინაიდან რაკეტა B წერტილში უნდა მოხვდეს, ეს წერტილიც ორბიტაზე უნდა მდებარეობდეს და მეორე ფოკუსის განსაზღვრა შეიძლება B წერტილის საშუალებითაც. ამისათვის B

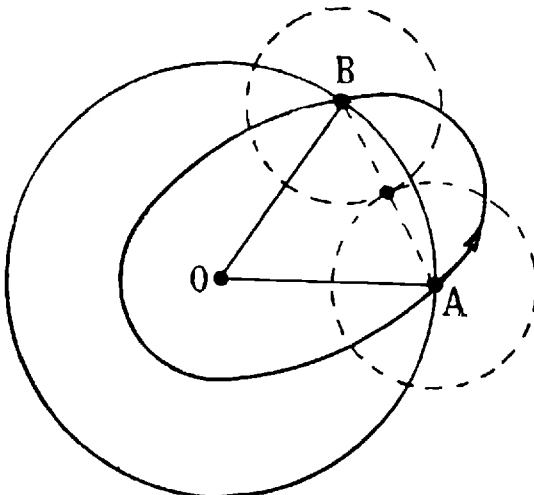
წერტილის ირგვლივ უნდა შემოვწეროთ $2a—OB$ რადიუსის მქონე წრეხაზი, ანალოგიურად იმისა, როგორც მოვიქცით A წერტილის შემთხვევაში. ცხადია, რომ ორბიტის მეორე ფოკუსი ამ წრეხაზზედაც უნდა მდებარეობდეს. როგორც ვხედავთ, მეორე ფოკუსი



ნახ. 254.

უნდა მდებარეობდეს A და B წერტილების ირგვლივ შემოწერილ $2a—OA$ და $2a—OB$ -რადიუსიან წრეხაზებზე. ე. ი. მათ გადაკვეთაზე (ნახ. 254). აქ შესაძლებელია სამი სხვადასხვა შემთხვევა. რაკეტისადმი მინიჭებული საწყისი სიჩქარე და B წერტილის მდებარეობა A წერტილის მიმართ შეიძლება ისეთი

იყოს, რომ აღნიშნული წრეხაზები არ იკვეთებოდნენ. ცხადია, რომ B წერტილში არ შეიძლება მიადწიოს A წერტილიდან გასროლილმა \vec{v} სიჩქარის მქონე რაკეტამ, როგორც მიმართულებითაც არ უნდა მოვახდინოთ მისი გასროლა. B წერტილში მისაღწევად საჭირო იქნება რაკეტის საწყისი სიჩქარის გადიდება. ვთქვათ, საწყისი სიჩქარე ისეთია, რომ შემოთ განხილული წრეხაზები ეხებიან ერთმანეთს (ნახ. 255), მაშინ ეს შეხების წერტილი იქნება მეორე ფოკუსის მდებარეობა. თუ A წერტილს შევადრთებთ ამ ფოკუსთან, ადვილად შეიძლება მოიძებნოს ბალისტიკური რაკეტის გასროლის მიმართუ-



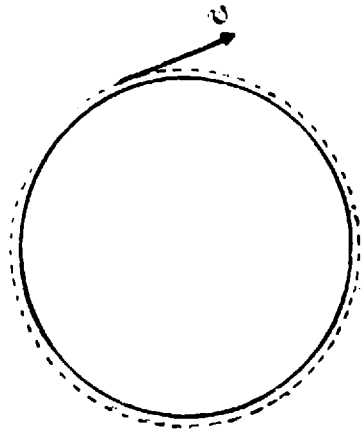
ნახ. 255.

ქარე ისეთია, რომ შემოთ განხილული წრეხაზები ეხებიან ერთმანეთს (ნახ. 255), მაშინ ეს შეხების წერტილი იქნება მეორე ფოკუსის მდებარეობა. თუ A წერტილს შევადრთებთ ამ ფოკუსთან, ადვილად შეიძლება მოიძებნოს ბალისტიკური რაკეტის გასროლის მიმართუ-

ლება. ამ შემთხვევაში არსებობს ერთადერთი მიმართულება, რომლის გასწვრივაც უნდა მოხდეს რაკეტის გაშვება, რომ იგი მოხვდეს B წერტილში.

და, ბოლოს, შესაძლებელია მესამე შემთხვევა, როდესაც საწყისი სიჩქარე ისეთია, რომ წრეხაზები იკვეთებიან. ვინაიდან ასეთი გადაკვეთის წერტილი მხოლოდ ორი შეიძლება იყოს, მიიღება მეორე ფოკუსის ორი შესაძლო მდებარეობა. ყოველ მათგანს ეთანადება თავისი ორბიტა და, მაშასადამე, სათანადო გასროლის მიმართულება (ნახ. 254).

2. ხელ ო ვ ნ უ რ ი თ ა ნ ა მ გ ზ ა ვ რ ი. ბალისტიკური რაკეტისაგან განსხვავებით თანამგზავრი საჭიროა მოძრაობდეს დედამიწის ირგვლივ ჩაკეტილ ორბიტაზე (ელიფსზე), რომელიც მთლიანად დედამიწის ზედაპირის გარეთ იქნება. ვინაიდან ჩაკეტილი ორბიტის შემთხვევაში გასროლილი სხეული პერიოდულად უბრუნდება საწყის მდებარეობას, ცხადია, რომ დედამიწის ზედაპირიდან გასროლილი სხეული მხოლოდ იმ შემთხვევაში გადაიქცევა თანამგზავრად, თუ იგი გასროლილია ზედაპირის გასწვრივ. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი ისევ დაეცემა დედამიწაზე (დედამიწის შიგნითგამავალი ელიფსები) (ნახ. 253). მაგრამ ეს მოთხოვნა საკმარისი არ არის. საჭიროა გამოვარკვიოთ როგორი უნდა იყოს გასროლის სიჩქარე იმისათვის, რომ სხეული არ დაეცეს დედამიწაზე ან არ მოსწყდეს მას სავსებით. ცხადია, რომ ყველაზე მცირე ზომის ორბიტა, რომელზედაც შეუძლია მოძრაობა თანამგზავრს, არის დედამიწის რადიუსის ტოლი რადიუსის მქონე წრეხაზი (ე. წ. ზედაპირული თანამგზავრი) (ნახ. 256). გამოვითვალათ სიჩქარე, რომელიც საჭიროა ამ ორბიტის შემოსაწერად. ეს სიჩქარე მარტივად გამოითვლება, თუ დედამიწის მიზიდვის ძალას ცენტრისკენულ ძალას გავუტოლებთ:



ნახ. 256.

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{Mm}{R^2},$$

სადაც M არის დედამიწის მასა, m — გასროლილი სხეულის (თანამგზავრის) მასა და R — დედამიწის რადიუსი (ზუსტად რომ ვთქვათ,

მარცხენა მხარეში უნდა იდგეს დაყვანილი მასა, მაგრამ ვინაიდან $m \ll M$, იგი შეიძლება თანამგზავრის მასით შეი(ცვალოს). აქედან სიჩქარისათვის მივიღებთ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}. \quad (\text{XIV}, 104)$$

ვინაიდან $\frac{\gamma M}{R^2}$ არის სიმძიმის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირზე, გვექნება

$$v = \sqrt{gR}.$$

ასეთია უმცირესი სიჩქარე, რომელიც უნდა მიენიჭოს გასროლილ სხეულს, რომ იგი არ დაეცეს დედამიწაზე. ამ სიჩქარეს პირველი კოსმოსური სიჩქარე ეწოდება. g და R სიდიდეების მნიშვნელობების გამოყენება ამ სიჩქარისათვის გვაძლევს შემდეგ რიცხვით მნიშვნელობას:

$$v = 7912 \frac{m}{sec} \sim 8 \frac{km}{sec}.$$

დავიწყოთ ახლა გასროლის სიჩქარის თანდათანობითი ზრდა. წრეხაზი გადაიქცევა სულ უფრო და უფრო გაჭიმულ ელიფსად და, ბოლოს, გარკვეული სიჩქარის მიღწევვისას ორბიტა გახდება პარაბოლა, ე. ი. გასროლილი სხეული უსასრულოდ დაშორდება დედამიწას (ნახ. 248). ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პარაბოლური მოძრაობის სათანადო კრიტიკული სიჩქარე შემდეგი ფორმულით გამოისახება:

$$v_k = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}}.$$

თუ μ -ის მაგიერ ავიღებთ დედამიწის რადიუსს (გასროლა ხდება დედამიწის ზედაპირიდან), μ -ს მაგიერ — თანამგზავრის m მასას, ხოლო α -სათვის გამოვიყენებთ მის მნიშვნელობას $\alpha = \gamma M m$, მივიღებთ

$$v_k = \sqrt{\frac{2M\gamma}{R}} = \sqrt{2gR}. \quad (\text{XIV}, 105)$$

ასეთია მინიმალური სიჩქარე, რომელიც უნდა მიენიჭოს ზედაპირიდან ასროლილ სხეულს იმისათვის, რომ იგი სავსებით მოსწყდეს დედამიწას. ამ სიჩქარეს მეორე კოსმოსური სიჩქარე ეწოდება. იგი $\sqrt{2}$ -ჯერ მეტია, ვიდრე პირველი კოსმოსური სიჩქარე. რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$v_k = 11,18 \frac{km}{sec} \approx 11,2 \frac{km}{sec}.$$

მიღებული შედეგებიდან ცხადია, რომ ხელოვნური თანამგზავრის მისაღებად საჭიროა იგი გასროლილ იქნეს ზედაპირის გასწვრივ და მისი სიჩქარე მოთავსებული იყოს შემდეგ ფარგლებში:

$$8 \frac{km}{sec} < v < 11,2 \frac{km}{sec}.$$

გამოვითვალთ ზედაპირული თანამგზავრის პერიოდი. ვინაიდან მისი ორბიტის რადიუსი არის R , პერიოდისათვის მივიღებთ

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

v -ს მნიშვნელობის ჩასმა გვაძლევს

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

(პერიოდი უდრის R სიგრძის მათემატიკური საქანის პერიოდს). მეორე მხრივ, დედამიწის მასა შეიძლება გამოვსახოთ სიმკვრივისა და რადიუსის საშუალებით

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

საიდანაც პერიოდისათვის ვღებულობთ

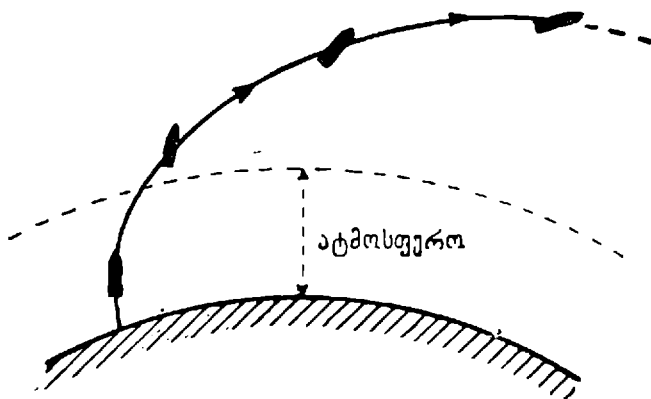
$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma \rho}}. \quad (\text{XIV}, 106)$$

ზედაპირული თანამგზავრის პერიოდი ცენტრალური სხეულის (ამ შემთხვევაში დედამიწის) სიმკვრივეზეა დამოკიდებული. რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს $T=1$ საათს, 24 მინუტს და 25 სექუნდს. დაახლოებით ასეთივე პერიოდი ექნება მერკურის თანამგზავრს, ვინაიდან ზომებისა და მასების განსხვავების მიუხედავად დედამიწისა და მერკურის სიმკვრივეები დაახლოებით ტოლია. ელიფსურ ორბიტებზე მოძრავე თანამგზავრების პერიოდები გამოითვლება კეპლერის მესამე კანონის მიხედვით, რომელიც პერიოდს აკავშირებს დიდ ნახევარღერძთან.

ყოველივე ზემოთქმული მართებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა არ არის მიღებული მხედველობაში ატმოსფეროსა და დედამიწის ბრუნვის გავლენა თანამგზავრის მოძრაობაზე. ატმოსფეროს ძლიერი წინააღმდეგობის გამო ვერც ერთი ხელოვნური თანამგზავრი ვერ იმოძრავებს ხანგრძლივად დედამიწის ზედაპირის მახლობლად. ამიტომაც შეუძლებელია ხელოვნური თანამგზავრის გაშვება დედა-

მიწის ზედაპირიდან უბრალო გასროლით, ე. ი. ისე, რომ თანამგზავრს თავიდანვე მიენიჭოს გარკვეული სიჩქარე, რის შემდეგ იგი განაგრძობდა მოძრაობას ინერციისა და დედამიწის მიზიდულობის გავლენით.

პრაქტიკულად თანამგზავრის გაშვების პირველი ეტაპი უნდა იყოს რაკეტის ასროლა ისეთ სიმაღლეზე, სადაც პაერის წინააღმდეგობა უკვე უმნიშვნელოა; ამის შემდეგ რაკეტას ენიჭება ისეთი მიმართულებისა და სიდიდის სიჩქარე, რომელიც საკმარისია მისი გადაქცევისათვის თანამგზავრად. ატმოსფეროს გაიშვიათებულ ფენებში (რამდენიმე ასეულ კილომეტრზე) ასროლის რამდენიმე ხერხი არსებობს. შეიძლება რაკეტა ასროლილ იქნეს ვერტიკალურად და თანამგზავრად გადაქცევისათვის საჭირო ჰორიზონტალური სიჩქარე მიენიჭოს უმაღლესი წერტილის მიღწევის მომენტში. შეიძლება გასროლა მოვახდინოთ ჰორიზონტალურად, ელიფსურ ტრაექტორიაზე და შემდგომი ჰორიზონტალური სიჩქარე მივანიჭოთ ელიფსის ყველაზე დაშორებული წერტილის მიღწევის შემდეგ. ამ ორი უკიდურესი ხერხის გარდა, არსებობს მრავალი საშუალებო ხერხი, როდესაც გასროლა წარმოებს დახრილად დედამიწის ზედაპირისადმი და ჰორიზონტალური სიჩქარე თანამგზავრს ენიჭება რაკეტის მიერ უმაღლესი წერტილის მიღწევის მომენტში (ნახ. 257).



ნახ. 257.

ჩვეულებრივად თანამგზავრების წამლები რაკეტა რამდენიმე საფეხურისაგან შედგება. პირველ საფეხურზე მოქმედ ძრავებს გაჰყავთ რაკეტა ატმოსფეროს გარეთ. ამ მომენტში პირველი საფეხურის ძრავა და საწვავის ჭურჭლები შორდებიან რაკეტას იმისათვის, რომ შემციირდეს უსარგებლო ტვირთი და იწყებს მუშაობას მეორე საფეხურის ძრავა. რაკეტის სიჩქარე მატულობს და უახლოვდება

თანამგზავრად გადაქცევისათვის საჭირო სიჩქარეს. უკანასკნელ საფეხურს უკვე გაჰყავს თანამგზავრი გაანგარიშებულ ორბიტაზე.

ხელოვნური თანამგზავრის ორბიტის გამოთვლის დროს და გასროლის ყველაზე ხელსაყრელი ხერხის დადგენისათვის მრავალი ფაქტორის გავლენაა მხედველობაში მისაღები. ჩვენ არ ვაპირებთ ამ საკითხების განხილვას. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ამ ფაქტორებს შორის ძირითადია ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და დედამიწის ბრუნვა. ატმოსფეროს წინააღმდეგობის გავლენა თვისობრივად სავსებით გასაგებია—იგი იწვევს თანამგზავრის ენერჯის თანდათანობით შემცირებას და მის დაახლოებას დედამიწასთან. მაგრამ რაოდენობითი გამოთვლების ჩატარება ძალიან ძნელია, ვინაიდან არ არის ზუსტად დადგენილი ხახუნის ძალის ფორმულა და უცნობია ატმოსფეროს სიმკვრივის განაწილება სხვადასხვა ფენაში.

დედამიწის ბრუნვის გავლენა უფრო ადვილად შეიძლება იქნეს გამოკვეთული; ამისათვის საკმარისია მხედველობაში მივიღოთ ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალების მოქმედება. უნდა მიექცეს ყურადღება იმ გარემოებას, რომ დედამიწის ბრუნვის გამო, გასროლის სიჩქარე ინერციული სისტემის მიმართ (უძრავი ვარსკვლავების მიმართ) არის დედამიწის ზედაპირის მიმართ გასროლის სიჩქარისა და დედამიწის ბრუნვით გამოწვეული სიჩქარის ჯამი. კორიოლისის ძალა გამოიწვევს თანამგზავრის გადახრას მარჯვნივ და ამიტომ იგი იმოძრავებს დედამიწის ზედაპირის მიმართ არა ელიფსზე, არამედ უფრო რთული სახის მრუდზე.

დასასრულ, განვიხილოთ „უწონობის“ საკითხი. რაკეტული ტექნიკის განვითარებასთან და კოსმოსური გაფრენის განხორციელებასთან დაკავშირებით ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმ პირობების შესახებ, რომელშიც მოუხდება ყოფნა კოსმონავტს კოსმოსური გაფრენის დროს. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ე. წ. „წონის დაკარგვის“ საკითხს. ცნობილია, რომ ასეთ უწონობის მდგომარეობაში იმყოფებოდნენ გარკვეული დროის განმავლობაში ცნობილი საბჭოთა კოსმონავტები ი. ვაგარინი, გ. ტიტოვი და სხვები.

ჩვენი მიზანია გავარკვიოთ რას გულისხმობენ, როდესაც ლაპარაკობენ „უწონობის“ შესახებ და რით არის გამოწვეული ეს მოვლენა. ამისათვის გავიხსენოთ ის, რაც ნათქვამი იყო X თავში წონის შესახებ. ცხადია, სხეულის წონის არსებობის მიზეზი არის დედამიწის მიერ მისი მიზიდვა. მაგრამ ეს სრულებითაც არ ნიშნავს, რომ სხეულის წონა არის ძალა, რომლითაც დედამიწა იზიდავს ამ სხეულს. წონის ქვეშ ჩვეულებრივად გულისხმობენ ძალას, რომლითაც სხეული აწევს საყრდენს, ვინაიდან იგი არ აძლევს მას დედა-

ველი შეხედვით არავითარი ვარდნა დედამიწისაკენ არ ხდება. მაგრამ საქმე იმაშია, რომ მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ტრაექტორიით მოძრაობს სხეული გრავიტაციულ ველში (ოღონდ კი მასზე არ მოქმედებდეს სხვა გარეშე ძალა, გარდა გრავიტაციული ძალისა), იგი ყოველთვის ვარდება დედამიწისაკენ. მართლაც, ვთქვათ თანამგზავრი მოძრაობს წრეხაზზე დედამიწის ირგვლივ და რომელიმე მომენტში აქვს v სიჩქარე ტრაექტორიის გასწვრივ (ნახ. 259). თანამგზავრზე რომ არ მოქმედებდეს მიზიდვის ძალა, იგი განაგრძობდა მოძრაობას v სიჩქარით სწორხაზოვნად, მზების გასწვრივ და თანდათან დაშორდებოდა დედამიწას. მაგრამ მიზიდვის ძალას გავლენით იგი „ჩამოვარდება“ დედამიწისაკენ, ე. ი. მიუახლოვდება მას იმავე მანძილით, როგორც მას ჰქონდა წინათ. ეს იმას ნიშნავს, რომ თანამგზავრი განუწყვეტლად „ვარდება“ დედამიწისაკენ და ამიტომ მასში მყოფი სხეულები აღარ დააწვებიან საყრდენს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი დაკარგავენ წონას. თანამგზავრის შიგნით ყველაფერი ხდება ისე, როგორც თავისუფლად ვარდნილ კაბინაში.

§ 104. შეშფოთების თეორიის ელემენტები

ჩვენ განვიხილეთ მარტივი შემთხვევა ორი ნივთიერი წერტილის მოძრაობისა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით. მაგრამ ასეთი იდეალური შემთხვევა ბუნებაში მხოლოდ მიახლოებით ღორციელდება. ვინაიდან სხვა სხეულები თავისი მოქმედებით გავლენას ახდენენ მოძრაობის ხასიათზე; მაგალითად, რომელიმე პლანეტაზე მოქმედებს არა მარტო მზე, არამედ სხვა პლანეტებიც, თანამგზავრები და კოსმოსურ სივრცეში გაბნეული ნივთიერება. მთვარის მოძრაობაზე დედამიწის ირგვლივ გავლენას ახდენს მზე, გასროლილი სხეულის მოძრაობაზე გავლენას ახდენს ატმოსფეროს წინააღმდეგობა და ა. შ. სხეულის მოძრაობის ხასიათის შეცვლას, გამოწვეულს სხვა სხეულების მოქმედებით, ეწოდება „შეშფოთება“.

რასაკვირველია, ჩვენს მიზანს არ შეადგენს შეშფოთების თეორიის სრული განხილვა, ვინაიდან ეს საკითხი სცილდება ზოგადი ფიზიკის კურსის ფარგლებს. ჩვენ მხოლოდ შევეცდებით რამდენიმე მარტივი შემთხვევის განხილვით გამოვარკვიოთ შეშფოთების ხასიათი. ვთქვათ, პლანეტა მოძრაობს მზის ირგვლივ ელიფსურ ორბიტაზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე (ნახ. 260). დავუშვათ, რომ რომელიღაც მომენტში პლანეტაზე იმოქმედა ტრაექტორიისადმი მხებმა იმპულსმა (მყისმა ბიძგმა) და შეცვალა სიჩქარე dv სიდიდით; ეს ცვლილება შეიძლება იყოს როგორც დად-

ბითი (აჩქარება), ისე უარყოფითი (შენელება). გამოსარკვევია, თუ როგორ შეიცვლება ორბიტის სახე და მოძრაობის ხასიათი ასეთი იმპულსის გავლენით. განტოლება

$$v^2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

გვიჩვენებს, რომ სიჩქარის ცვლილებას შეუძლია შეცვალოს მხოლოდ დიდი ნახევარღერძი (რადგან იმპულსი მყისია— r არ იცვლება). ამ განტოლების გაწარმოებით მივიღებთ

$$da = \frac{2\mu a^2 v dv}{\alpha} \quad (\text{XIV, 107})$$

ვინაიდან მყისი ბიძგი არ ცვლის მოძრაობის მიმართულებას, დიდი ნახევარღერძის სიდიდის ცვლილებამ უნდა გამოიწვიოს მეორე ფოკუსის გადანაცვლება (პირველი ფოკუსი, რომელშიც იმყოფება ცენტრალური სხეული, არ შეიძლება შეიცვალოს).

რა მიმართულებით უნდა მოხდეს ეს გადანაცვლება? ვინაიდან მოძრაობის მიმართულება არ შეცვლილა (ბიძგის მიმართულება ტრაექტორიის მხებია), ფოკუსმა უნდა გადანაცვლოს მოძრავი სხეულის და ამ ფოკუსის შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ. შეიცვლება აგრეთვე აფსიდთა ხაზის მიმართულება. დიდი ნახევარღერძის სიდიდის ცვლილება გამოიწვევს პერიოდის შეცვლას. ვინაიდან

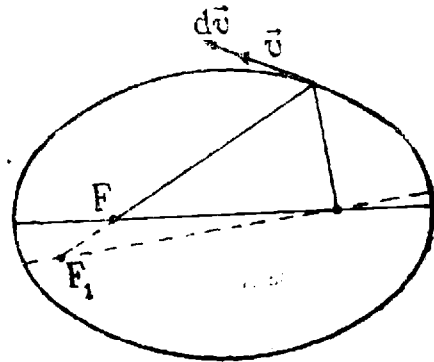
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha} a^3},$$

მივიღებთ

$$dT = 3\pi \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} a^{\frac{1}{2}} da. \quad (\text{XIV, 108})$$

ცხადია, რომ შეიცვლება აგრეთვე კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების საშუალო მნიშვნელობები. საშუალო კინეტიკური ენერგიისათვის ადვილად მიიღება ფორმულა

$$\bar{E}_k = \frac{\alpha}{2a},$$



ნახ. 260.

საიდანაც მისი ცვლილებისათვის გვექნება

$$\delta E_r = - \frac{\alpha}{2a^3} da = - \mu r dr, \quad (\text{XIV,109})$$

ასევე გამოითვლება სრული ენერჯიის ცვლილება

$$\delta E = \delta \left(\frac{\alpha}{2a} \right) = \frac{\alpha}{2a^3} da = \mu r dr \quad (\text{XIV,110})$$

და საშუალო პოტენციალური ენერჯიის ცვლილება

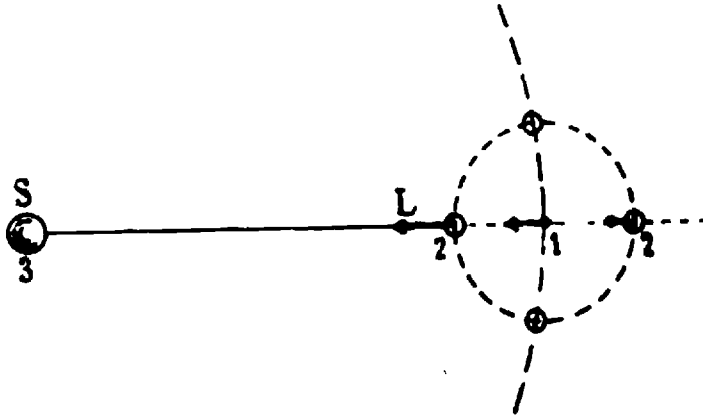
$$\delta \bar{E} = 2\mu r dr = \frac{\alpha}{a^3} da. \quad (\text{XIV,111})$$

განვიხილოთ მაგალითისათვის ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობის შეშფოთება, გამოწვეული ატმოსფეროს წინააღმდეგობით. ეს წინააღმდეგობა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთობლიობა მყისი მხები ბიძგებისა, რომლებიც ამცირებენ თანამგზავრის სიჩქარეს. სიჩქარის შემცირება ($dr < 0$) გამოიწვევს ორბიტის ზომის შემცირებას ($da < 0$), პერიოდის შემცირებას და კინეტიკური ენერჯიის გაზრდას, ვინაიდან პოტენციალური ენერჯია უფრო მეტად კლებულობს, ვიდრე სრული ენერჯია.

თუ რაიმე გარეშე მოქმედების შედეგად მოძრავ სხეულს მიენიჭა მხები აჩქარება, ორბიტის ზომა გაიზრდება, ხოლო კუთხური სიჩქარე და კინეტიკური ენერჯია შემცირდება. კინეტიკური ენერჯიის ეს შემცირება სავსებით იფარება პოტენციალური ენერჯიის გაზრდით, რის გამოც სრული ენერჯია მატულობს.

განვიხილოთ ახლა მესამე სხეულის მოქმედება ორი სხეულისაგან შემდგარ სისტემაზე. როგორც მაგალითი, გამოვარკვიოთ როგორ მოქმედებას ახდენს მზე დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაზე. ამისათვის ჯერ უნდა გამოვარკვიოთ რას ეწოდება შემაშფოთებელი ძალა ან აჩქარება. ვთქვათ, უკვე შევისწავლეთ მთვარის მოძრაობა დედამიწის ირგვლივ და დავადგინეთ მისი ხასიათი. ცხადია, რომ თუ მზე ერთნაირ აჩქარებას მიანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს, მათი ურთიერთგანლაგება და მოძრაობა არ შეიცვლება, შეიცვლება მხოლოდ მათი ინერციის ცენტრის მოძრაობის ხასიათი. აქედან გამომდინარეობს, რომ შეშფოთების დამახასიათებელია არა აბსოლუტური აჩქარებები, რომელთაც მზე ანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს, არამედ ამ აჩქარებათა სხვაობა. სწორედ ეს სიდიდე გვიხასიათებს, თუ რამდენად „ერევა“ მზე დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაში.

261-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მზის, დედამიწისა და მთვარის ურთიერთგანლაგება მთვარის მოძრაობის სხვადასხვა მომენტში. მიუხედავად იმისა, რომ მთვარე დაახლოებით 400-ჯერ უფრო შორსაა მზიდან, ვიდრე დედამიწიდან, მზე თავისი დიდი მასის გამო დაახლოებით 21-ჯერ უფრო მეტ აჩქარებას ანიჭებს მთვარეს, ვიდრე



ნახ. 261.

დედამიწა. მაგრამ ეს სრულებითაც არ ნიშნავს იმას, რომ მზე შესამჩნევად მოქმედებს დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაზე. ამ გავლენის გამოსარკვევად უნდა გამოვითვალოთ იმ აჩქარებების სხვაობა, რომლებსაც მზე ანიჭებს დედამიწასა და მთვარეს. სწორედ ეს სხვაობაა „შეშფოთების“ დამახასიათებელი. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები: m_1, m_2, m_3 იყოს დედამიწის, მთვარისა და მზის მასები, r_{12}, r_{13}, r_{23} — სათანადო მანძილები, ხოლო a_{12}, a_{13}, a_{23} და იგივე სიდიდეები გადასმული ინდექსებით — აჩქარებები, რომლებსაც ეს სხეულები ანიჭებენ ერთმანეთს, მაგალითად, a_{12} არის აჩქარება, რომელსაც დედამიწა ანიჭებს მთვარეს, ხოლო a_{23} — აჩქარება, რომელსაც მზე ანიჭებს მთვარეს.

ცხადია, რომ ჩვენთვის საკუთრო აჩქარებებისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$a_{23} = -\gamma \frac{m_3}{r_{23}^2}, \quad a_{31} = \gamma \frac{m_3}{r_{31}^2}.$$

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც მთვარე იმყოფება მზესა და დედამიწას შორის („შეერთება“), მანძილებისათვის გვექნება

$$r_{23} = r_{31} - r_{12}.$$

აქედან აჩქარებების სხვაობისათვის მივიღებთ¹

$$a_{32} - a_{31} = \gamma \frac{m_3}{(r_{31} - r_{12})^2} - \gamma \frac{m_3}{r_{31}^2} \approx \frac{2\gamma m_3 r_{12}}{r_{31}^3}. \quad (\text{XIV}, 112)$$

იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მთვარე და მზე იმყოფებიან პირის-პირდგომაში, მივიღებთ

$$a_{32} - a_{31} \approx - \frac{2\gamma m_3 r_{12}}{r_{31}^3};$$

ორივე შემთხვევაში შემაწფოთებელი აჩქარება ($a_{32} - a_{31}$) მიმართულია ისე, რომ აშორებს მთვარეს დედამიწიდან. იმის გამოსარკვევად, თუ რამდენად ძლიერია შემფოთება, შევადაროთ იგი აჩქარებას, რომელსაც დედამიწა ანიჭებს მთვარეს და რომელიც საზღვრავს მთვარის მოძრაობას დედამიწის ირგვლივ. ეს აჩქარება გამოი-სახება ფორმულით

$$a_{12} = \gamma \frac{m_1}{r_{12}^2}.$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{a_{32} - a_{31}}{a_{12}} \approx 2 \left(\frac{m_3}{m_1} \right) \left(\frac{r_{31}}{r_{12}} \right)^3. \quad (\text{XIV}, 113)$$

რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{a_{32} - a_{31}}{a_{12}} \approx \frac{1}{90}.$$

ჩვენ ვხედავთ, თუ რამდენად მცირეა მზის შემაწფოთებელი მოქმედება მთვარის მოძრაობაზე დედამიწის ირგვლივ. ჩატარებულ გამოთვლებში არსად არ შედის მთვარის დამახასიათებელი სიდიდეები, გარდა მანძილისა დედამიწიდან და მზიდან. ამიტომაც ეს გამოთვლები გამოდგება ყოველი სხვა სხეულისათვის, მაგალითად კოსმოსური ხომალდისათვის, რომელიც მოძრაობს დედამიწისა და მზის მოქმედების გავლენით. ხშირად ამბობენ, რომ კოსმოსური ხომალდი დასაწყისში იმყოფება დედამიწის ქმედების სფეროში, ხოლო საკმარისად დაშორებისას ხვდება მზის, მთვარის ან სხვა ციური მნათობის ქმედების სფეროში. გამოვარკვიოთ, თუ რა იგულისხმება ცნებაში—ქმედების სფერო. დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ მაგალითს, ჩვენ გამოვითვალეთ, თუ რამდენად ერევა მზე დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოძრაობაში. ახლა გამო-

¹ ვინაიდან r_{12} ძალიან მცირეა r_{31} -თან შედარებით.

ვარკვიოთ რამდენად ეროვნა დედამიწა მზისა და მთვარის ურთიერთმოდრახობაში, ე. ი. გამოვიტვალოთ სიდიდე

$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}}$$

ცხადია, რომ

$$a_{32} = \gamma \frac{m_3}{r_{13}^2},$$

$$a_{12} - a_{13} = \gamma \frac{m_1}{r_{12}^2} - \gamma \frac{m_1}{r_{13}^2}.$$

ვინაიდან r_{12} 400-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე r_{13} , მეორე წევრი შეიძლება უგულვებელყოთ, რის გამოც მივიღებთ

$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}} \approx \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{r_{32}}{r_{12}} \right)^2.$$

რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\frac{a_{12} - a_{13}}{a_{32}} \approx \frac{1}{2}.$$

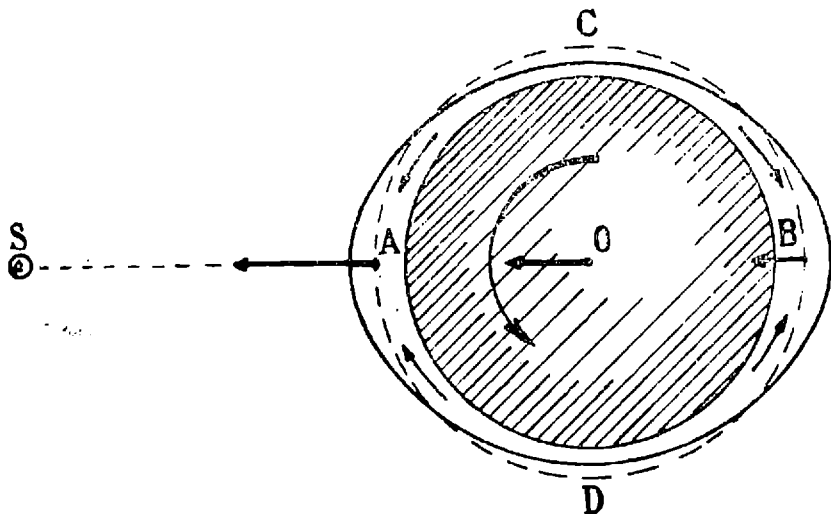
ჩვენ ვხედავთ, რომ დედამიწის მიერ მზისა და მთვარის ურთიერთმოდრახობის შეშფოთება გაცილებით უფრო ძლიერია, ვიდრე მზის მიერ დედამიწისა და მთვარის ურთიერთმოდრახობის შეშფოთება. ამიტომაც შეიძლება ვთქვათ, რომ მთვარე იმყოფება დედამიწის მოქმედების არეში. იგივე ითქმის ყოველ სხეულზე, რომელიც დაშორებულია დედამიწიდან იმავე მანძილით, რაც მთვარე. ცხადია, რომ რაც უფრო მეტად შორდება სხეული დედამიწას, მით უფრო ძლიერდება მზის შემაშფოთებელი მოქმედება და, ბოლოს, მიღწეული იქნება ისეთი მანძილი, რომლისთვისაც მზის შემაშფოთებელი მოქმედება გაუტოლდება დედამიწის შემაშფოთებელ მოქმედებას. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვი, რომ სხეულმა მიაღწია დედამიწის ქმედების სფეროს საზღვარს, რის შემდეგ იწყება მზის ქმედების სფერო. არ უნდა გვეგონოს, რომ დედამიწის ქმედების სფეროდან გამოსვლის შემდეგ სავსებით წყდება დედამიწის მოქმედება ამ სხეულზე (ეს მოქმედება თეორიულად უსასრულო დაშორებამდე არსებობს). დედამიწის მოქმედება გრძელდება, მაგრამ ძირითადი ხდება უკვე მზის მოქმედება.

განვიხილოთ შეშფოთების ერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი ოკეანის მიმოქცევა. მიმოქცევა ეწოდება ოკეანის ღონის აერიოდულ რხევას საშუალო ღონის მიმართ. უკვე ძველ დროში იყო შემჩნეული

ოკეანის მიმოქცევის კავშირი მზისა და მთვარის მოძრაობასთან, მაგრამ მხოლოდ მას შემდეგ გახდა შესაძლებელი მიმოქცევის მოვლენების ახსნა, რაც ნიუტონმა აღმოაჩინა სხეულების გრავიტაციული ურთიერთქმედება და დაადგინა მისი კანონი. წარმოვიდგინოთ, რომ დედამიწა თანაბრად არის დაფარული წყლის ფენით და განვიხილოთ გავლენა, რომელსაც ახდენს მასზე მზე ან მთვარე. განვიხილოთ სითხის A ნაწილაკი, რომელიც მდებარეობს მზისა და დედამიწის ცენტრების შემაერთებელ ხაზზე მზის მხარეზე და გამოვითვალოთ მზის მიერ გამოწვეული (შემაშფოთებელი) აჩქარება (ნახ. 262). თუ R არის დედამიწის რადიუსი, r —მანძილი მზესა და დედამიწას შორის, ხოლო M —მზის მასა, ამ აჩქარებისათვის (XIV,112) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{2\gamma MR}{r^3} \quad (\text{XIV,114})$$

ვინაიდან A ნაწილაკი უფრო მეტ აჩქარებას ღებულობს, ვიდრე დედამიწის ცენტრი, ეს ნაწილაკი დაშორდება დედამიწის ცენტრს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ ადგილას წყლის დონე აიწვევს ზენიტისაკენ. ასევე აიწვევს ზენიტისაკენ B წერტილში არსებული წყლის



ნახ. 262.

დონე. მეორე მხრივ, დედამიწის ზედაპირის C და D ადგილებში ოკეანის დონე დაიწვევს გამოთვლები გვიჩვენებენ, რომ მზის მოქმედების შემთხვევაში (XIV,114) აჩქარება შეადგენს ვარდნის აჩქა-

რების $\frac{1}{19300000}$ ნაწილს. გაცილებით უფრო ძლიერია მთვარის

მოქმედება, მიუხედავად იმისა, რომ მისი მასა მზის მასაზე გაცილებით ნაკლებია. ეს გამოწვეულია მთვარის სიახლოვით (ფორმულაში შედის მანძილის კუბი). მთვარის მიერ გამოწვეული აჩქარება 2,17-ჯერ მეტია, ვიდრე მზით გამოწვეული აჩქარება. საერთო აჩქარება დამოკიდებულია მთვარისა და მზის განლაგებაზე დედამიწის მიმართ, ვინაიდან მათ მიერ გამოწვეული აჩქარებები შეიძლება შეიკრიბოს, და კიდევ გამოაკლდეს ერთმანეთს. დედამიწის ბრუნვის გამო, მიმოქცევის ტალღა მოძრაობს ოკეანეების ზედაპირზე გარკვეული პერიოდით (დაახლოებით 24 საათი). ამ დროის განმავლობაში ყოველ ადგილას ხდება ორი მოქცევა და ორი მიქცევა. ასეთი მარტივი სურათი მიმოქცევის მოვლენისა სინამდვილეში არ ხორციელდება, ვინაიდან მიმოქცევის ტალღები განიცდიან ხახუნს ოკეანის ფსკერთან, წინააღმდეგობას მატერიკების მხრივ და სხვა. საერთოდ, მიუხედავად იმისა, რომ მიმოქცევის მიზეზი სავსებით გარკვეულია (მთვარისა და მზის შემფოთება), მისი ხასიათის გარკვევა ძალიან რთულია, ვინაიდან მიმოქცევის ტალღებზე გავლენას ახდენს გეოგრაფიული პირობები, ნაპირების სახე, ოკეანის სიღრმე და მრავალი სხვა ფაქტორი.

შინაარსი

წინასიტყვაობა	3
შესავალი. ფიზიკის ძირითადი ცნებები: მატერია, სივრცე და დრო	5

თავი პირველი. ათვლის სისტემა, სივრცისა და დროის გაზომვა

§ 1. ათვლის სისტემა და კოორდინატთა სისტემები	11
§ 2. სივრცისა და დროის გაზომვა. ერთდროულობა	18
§ 3. სივრცისა და დროის ეტალონები და ერთეულები	22
§ 4. ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება და ერთეულთა სისტემები	25

თავი მეორე. მოძრაობის კინემატიკური ელემენტები: სიჩქარე და აჩქარება

§ 5. შესავალი	32
§ 6. მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები და ტრაექტორია	33
§ 7. წრფივი მოძრაობის სიჩქარე	36
§ 8. მრუდწირული მოძრაობის სიჩქარე	41
§ 9. სიჩქარის რადიალური და ბრუნვითი მდგენლები. კუთხური სიჩქარე	44
§ 10. აჩქარება	49
§ 11. წირის სიმრუდე	52
§ 12. აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენლები	58
§ 13. მოძრაობის კერძო სახეები	62
§ 14. კუთხური სიჩქარე და აჩქარება როგორც ვექტორები	68

თავი მესამე. ინერციისა და ფარდობითობის პრინციპები

§ 15. ინერციული სისტემები და ინერციის პრინციპი	70
§ 16. ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლა და გალილეის გარდაქმნის ფორმულები	73
§ 17. კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპი	79

თავი მეოთხე. იმპულსის მუდმივობის კანონი

§ 18. ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ხასიათი და მასის ცნება	84
§ 19. იმპულსის მუდმივობის კანონი	88
§ 20. იმპულსის მუდმივობის კანონის ზოგიერთი გამოყენება	90

თავი მეხუთე. ენერგიის მუდმივობის კანონი

§ 21. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები. მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი	99
§ 22. ენერგიის განზომილება და ერთეულები	106

23.	პოტენციალური ენერჯია და ძალა	107
24.	პოტენციალური მრუდები	117
25.	ძალების შეკრების (სუპერპოზიციის) კანონი	123
26.	ქმედებისა და უკუქმედების ძალების ტოლობის კანონი. ნიუტონის მესამე კანონი	125
27.	მუშაობა და სიმძლავრე	128

თ ა ვ ი მ ე ე ქ ვ ს ე. მოძრაობის დინამიკური განტოლებები

§ 28.	მოძრაობის დინამიკური განტოლებების გამოყვანა	137
§ 29.	ნიუტონის მესამე კანონის გამოყვანა მოძრაობის დინამიკური განტოლებებიდან	142
§ 30.	მოძრაობის განტოლებები მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის. ბმები და თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი	145
§ 31.	შენიშვნები მოძრაობის კანონების შესახებ	150
§ 32.	ეარიანტული და ინვარიანტული სიდიდეები. მექანიკის კანონების ინვარიანტულობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ	153

თ ა ვ ი მ ე შ ვ ი დ ე. იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი

§ 33.	იმპულსის მომენტი	157
§ 34.	ძალის მომენტი	158
§ 35.	მომენტების განტოლება	159
§ 36.	იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი, ფართობითი სიჩქარე	162

თ ა ვ ი მ ე რ ვ ე. დისპაციური პროცესები წერტილის მექანიკაში

§ 37.	დისპაციური (ხახუნის) ძალები. მოძრაობის განტოლებები	166
§ 38.	სიჩქარის პროპორციული ხახუნის ძალა	169
§ 39.	სიჩქარის კვადრატის პროპორციული ხახუნის ძალა	173
§ 40.	მუშაობა ხახუნის ძალის არსებობის დროს	174

თ ა ვ ი მ ე ც ხ რ ე. ნაწილაკების დაჯახება

§ 41.	დაჯახების პროცესის ზოგადი დახასიათება	176
§ 42.	დაჯახების კლასიფიკაცია	178
§ 43.	დრეკადი დაჯახება	181
§ 44.	დრეკადი დაჯახების გრადიენტული წარმოდგენა	185
§ 45.	ცენტრალური დრეკადი დაჯახება	189
§ 46.	ენერჯიის გადაცემა დრეკადი დაჯახების დროს	191
§ 47.	არადრეკადი ცენტრალური დაჯახება	193
§ 48.	ნაწილაკის დაშლა	195

თ ა ვ ი მ ე ა თ ე. ათვლის არაინერციული სისტემები

§ 49.	შესავალი	203
§ 50.	სწორხაზოვნად და თანაბრად აჩქარებულად მოძრავი არაინერციული სისტემა	204

§ 51. ვექტორის ცვლილება ინერციული და არაინერციული სისტემების მიმართ	208
§ 52. თანაბრად მბრუნავი არაინერციული სისტემა. ცენტრიდანული და კორიოლისის აჩქარებები	210
§ 53. მოძრაობის დინამიკური განტოლება მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში. ცენტრიდანული და კორიოლისის ძალები	215
§ 54. მბრუნავი არაინერციული სისტემის მარტივი მაგალითები	217
§ 55. დედამიწა როგორც არაინერციული სისტემა	223

თ ა ვ ი მ ე თ ე რ თ მ ე ტ ე . მყარი სხეულის მექანიკა

§ 56. მყარი სხეულის ცნება	237
§ 57. მყარ სხეულზე მოდებული ძალის გასრიალების შესაძლებლობა	238
§ 58. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების შეკრების მარტივი შემთხვევები	240
§ 59. ძალთა წყვილი და მისი თვისებები	245
§ 60. მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების დაყვანა ერთ ძალაზე და ერთ ძალთა წყვილზე	248
§ 61. მყარი სხეულის მოძრაობის სახეები	250
§ 62. მყარი სხეულის იმპულსი, ენერგია და იმპულსის მომენტი. ინერციის მომენტი	255
§ 63. ინერციის მომენტები ზოგიერთი სიმეტრიული სხეულისათვის	266
§ 64. ბრუნვა უძრავი ღერძის ირგვლივ. ფიზიკური საქანი. საბრუნო საქანი	273
§ 65. ბრუნვის ღეაძზე მოქმედი ძალა და მომენტი. თავისუფალი ღერძები	280
§ 66. უძრავი წერტილის ირგვლივ ბრუნვის დინამიკა. ეილერის განტოლებები	284
§ 67. თავისუფალი მყარი სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. რეგულარული პროცესია	287
§ 68. მძიმე სიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. ფსევდო-რეგულარული პროცესია	297
§ 69. გიროსკოპი და მისი გამოყენება	304
§ 70. დედამიწის ღერძის პრეცესია და ნუტაცია	307
§ 71. მყარი სხეულების შეხება. რეაქციისა და ხახუნის ძალები	312
§ 72. მყისი ძალის მოქმედება მყარ სხეულზე	317

თ ა ვ ი მ ე თ ო რ მ ე ტ ე . ნივთიერი წერტილისა და მყარი სხეულის წონასწორობა

§ 73. ნივთიერი წერტილის წონასწორობის პირობები	321
§ 74. წონასწორობის სახეები	324
§ 75. მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები	327

თ ა ვ ი მ ე ტ ა მ ე ტ ე . რხევითი მოძრაობა

§ 76. შესავალი	332
§ 77. წერტილის ჰარმონიული რხევა. ამპლიტუდა, ფაზა და სიხშირე	333
§ 78. ჰარმონიული ოსცილატორის სიჩქარე, აჩქარება და ენერგია	

ბ § 79. მათემატიკური საქანი	344
ტ § 80. მიღევადი რხევა. ლოგარიტმული დეკრემენტი	347
§ 81. აპერიოდული მიღევადი მოძრაობა	352
• § 82. ჰარმონიული გარეშე ძალით გამოწვეული იძულებითი რხევა. რეზონანსი	354
§ 83. პარამეტრული რეზონანსი	355
§ 84. რხევითი მოძრაობის გრაფიკული წარმოდგენა	362
§ 85. ჰარმონიული რხევების შეკრება	370
§ 86. ბმული რხევები	386
§ 87. ნებისმიერი მოძრაობის დაშლა ჰარმონიულ რხევებად	392

თ ა ვ ი მ ე თ ო თ ხ მ ე ტ ე . გრავიტაციული ურთიერთქმედება

§ 88. გრავიტაციული ურთიერთქმედების ხასიათი და ნიუტონის კანონი	396
§ 89. გრავიტაციული აჩქარების დამოუკიდებლობა სხეულისაგან. გრავიტაციული და ინერტული მასები	399
§ 90. გრავიტაციული და ინერტული მასების პროპორციულობის დამამტკიცებელი ცდები	403
§ 91. გრავიტაციული მუდმივის ექსპერიმენტული განსაზღვრა	406
§ 92. გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია	409
§ 93. მრავალი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემა	413
§ 94. გრავიტაციული ველი. დაძაბულობა და პოტენციალი. მუშაობა გრავიტაციულ ველში	417
§ 95. გაუსის თეორემა. გრავიტაციული ველების მაგალითები	425
§ 96. დედამიწის გრავიტაციული ველი	431
§ 97. სხეულების მოძრაობა დედამიწის მახლობლად	437
§ 98. ორი წერტილის მოძრაობა გრავიტაციული ურთიერთქმედების გავლენით (ორი წერტილის პრობლემა)	446
§ 99. მეორე რიგის მრუდის მხებ-პოლარული განტოლება	456
§ 100. ტრაექტორიის სახის განსაზღვრა საწყისი პირობებზე მიხედვით	459
§ 101. კეპლერის კანონების გამოყვანა ნიუტონის კანონიდან	465
§ 102. ნიუტონის კანონის გამოყვანა კეპლერის კანონებიდან	469
§ 103. ბალისტიკური რაკეტისა და ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა	472
§ 104. შეშფოთების თეორიის ელემენტები	482