საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია-გეოფიზიკის ინსტ. შრ. ტ. LVIII, 2003
Академия наук Грузии – Труды Института геофизики, т. LVIII, 2003

К вопросу моделирования эффекта падения плотности вблизи критической точки на обтекаемой поверхности

З. Кереселидзе, Н. Гурцкая

При газодинамическом обтекании затупленных тел особое внимание следует обратить на поведение вблизи поверхности тела гидродинамических и термодинамических характеристик движущейся среды. В частности, возможно резкое падение плотности в окрестности критической точки на поверхности тела. Точная оценка этого эффекта связана с непреодолимыми математическими осложнениями, связанными с аналитическим решением уравнений движения среды. Однако, полезную информацию о поведении плотности вблизи обтекаемой поверхности можно получить и без точного решения, если воспользоваться кинематическим приближением, т.е. если считать поле скорстей заданным при помощи какой либо модели. Для подтверждения данного соображения рассмотрим одну конкретную модель обтекания плоской поверхности непотенциальной идеальной сжимаемой средой.

Начало цилиндрической системы координат расположим в критической точке обтекаемой плоской поверхности. Ось z, вдоль которой движется среда на бесконечности, направлена вертикально вверх от поверхности. Аксиально-симметричное поле скоростей задано следующим образом

$$V_z = -u_0\left(1 - e^{-\frac{z}{h}}\right),$$

$$V_r = u_0 \frac{r}{R} e^{-\frac{z}{h}}, \qquad (1)$$

где u_0-характерная скорость потока (скорость на бесконечности), r-радиальная координата, h и R -характерные масштабы обтекания в соответствующих направлениях. Очевидно, что модель (1) является модиффикацией популярных кинематических моделей для несжимаемой среды, примененных как в чисто газодинамичеких задачах, так и в специфической задаче обтекания магнитосферы Земли плазмой солнечного ветра [1-3].

Динамика идеальной сжимаемой среды в стационарном случае определяется уравнениями движения и неразрывности

$$\rho \vec{G} = grad P, \qquad (2)$$

$$\left(\vec{V}\, grad \ln\rho\right) + div\vec{V} = 0 \quad , \qquad (3)$$

где $\vec{G} = -\left(\vec{\nabla}\nabla\right)\vec{V}$, ρ-плотность, P-полное давление среды.

примерим операцию rot к уравнению (2), после чего будем иметь

$$\left[\vec{G}\, grad \ln\rho\right] + rot\,\vec{G} = 0 \ . \tag{4}$$

В цилиндрической системе координат уравнение (4) имеет только φ проекцию, которая для поля скоростей (1) имеет вид

$$G_z \frac{\partial}{\partial r}\ln\rho - G_r \frac{\partial}{\partial z}\ln\rho + \frac{\partial G_r}{\partial z} = 0 \ . \tag{5}$$

Воспользуемся обозначением $div\vec{V} = -\Theta$, после чего из (3) получим

$$V_r \frac{\partial}{\partial r}\ln\rho + V_z \frac{\partial}{\partial z}\ln\rho = \Theta . \tag{6}$$

Исключая $\frac{\partial}{\partial r}\ln\rho$ из (5) при помощи (6), получим уравнение для $\frac{\partial}{\partial z}\ln\rho$

$$\left(V_z + v_r \frac{G_r}{G_z}\right)\frac{\partial}{\partial z}\ln\rho = \Theta + \frac{V_r}{G_z}\frac{\partial G_r}{\partial z} \ . \tag{7}$$

После определения явного вида G_r, G_z, $\frac{\partial G_r}{\partial z}$ и Θ при помощи модели (1) и введения новой переменной $t = e^{-\frac{z}{h}}$, из (7) получим

$$\ell n\frac{\rho}{\rho_0} = \int_0^t \frac{\alpha + \beta t}{\gamma t^2 - \delta t + r}dt , \tag{8}$$

где ρ_0-плотность среды на бесконечном удалении от обтекаемой поверхности ($t = 0$), $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta$ определяются параметрами течения и переменною r:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{u_0}{Rh}r + \frac{2u_0}{R} - \frac{u_0}{h}, \\
\beta &= \frac{u_0}{h} - \frac{2u_0}{R^3}r - \frac{2u_0}{R} - \frac{2u_0}{Rh}r, \\
\delta &= \frac{2u_0}{h} + \frac{u_0}{Rh}r, \\
\eta &= \frac{u_0}{h}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, решение уравнения (7) при $\Delta > 0$ будет иметь вид

$$\rho = \rho_0\left(\frac{\gamma t^2 - \delta t + \eta}{\eta}\right)^{\frac{\beta}{2\gamma}}\left(\frac{2\gamma t - \delta - \sqrt{\Delta}}{2\gamma t - \delta + \sqrt{\Delta}} * \frac{\delta - \sqrt{\Delta}}{\delta + \sqrt{\Delta}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\alpha + \frac{\beta\delta}{2\gamma}\right)} , \tag{10}$$

где $\Delta = \delta^2 - 4\delta\eta$.

Анализ выражения (10) показывает, что в критической точке на обтекаемой поверхности плотность равна нулью, как и на некоторой условной поверхности , постепенно отходящей от обтекаемой поверхности и ограничивающей область применимости решения. Расстояние между поверхностью тела и условной поверхностью, соприкасающимися в критической точке, возрастает в радиальном направлении, достигая максимума при $r = R$. Очевидно, что в области между этими поверхностями решение (10) является мнимым и теряет смысл.

Возникновение поверхности, ограничивающей область применимости решения для задачи газодинамического обтекания плоской поверхности, либо затупленного тела, видимо, является общим недостатком, характерным для кинематических моделей типа (1). Например, результат, качественно подобный нашему, получен также и при аналитическом и численном моделировании картины обтекания магнитосферы солнечным ветром [4,5]. В частности, в [4] использовалась известная кинематическая модель Паркера, в которой компоненты скорости линейно зависят от координаты в соответствующем направлений. Очевидно, что о физической достоверности какой либо кинематической модели можно судить лишь по степени адекватности ее результатов с данными наблюдений. Поэтому, особое значение приобретает информация о крупномасштабной структуре течения плазмы солнечного ветра вблизи границы магнитосферы, которое, хоть и подчиняется законам газодинамики, но в значительной степени контролируется также и межпланетным магнитным полем.

литература

1. F.T. Gratton, M.F. Heyn, H.K.Biernat, R.P. Rijnbeek, G.Gnavi. MHD Stagnation Point Flows in the Presence of Resistivity and Viscosity. Journal of Geophys. Res., 1988, Vol 93, № A7, pp.7318-7324.
2. М.И. Пудовкин, В.В. Лебедева. Параметры солнечнего ветра в переходной области в модели с магнитным барьером. Геомагнетизм и аерономия, 1987, т. XXXVII, №1, с. 22-27.
3. М.И. Пудовкин, В.С. Семенов. Теория пересоеденения и взаимодействие солнечного ветра с магнитосферой Земли. М., Наука, 1985, 124 с.
4. З.А. Кереселидзе, А.Г. Хантадзе. К вопросу моделирования МГД течения плазмы солнечного ветра вблизи магнитосферы Земли. Труды ТГУ, 1988, сер. Физика, т. 282, с. 31-42.
5. В.Г. Пивоваров, Н.В. Еркаев. Взаимодейстие солнечного ветра с магнитосферой Земли. Новосиб., Наука, 1978, 107 с.

გარსდენადი ზედაპირის კრიტიკული წერტილის მახლობლად სიმკვრივის ვარდნის ეფექტის მოდელირების საკითხთან დაკავშირებით

ზ. კერესელიძე, ნ. ღურწკაია

რეზიუმე

გამოყენებულია კუმშვადი გარემოს აქსიალურად სიმეტრიული დინების მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს დამუხრუჭების ეფექტს ბრტყელი ზედაპირის კრიტიკული

წერტილის მახლობლად. ნაჩვენებია, რომ გარემოში ხდება დაბალი სიმკვრივის ფენის ფორმირება, რომელიც შემოსაზღვრულია ნულოვანი სიმკვრივის მქონე ზედაპირით. ამ უკანასკნელს შეხება გარსდენად ზედაპირთან გააჩნია მხოლოდ კრიტიკულ წერტილში.

About modeling of density decreasing effect near by critical point on the flow round surface

Z. Kereselidze, N. Gurckaia

Abstract

The axial-sum metrical model of compressible medium which to flow into flat surface and take into account the effect of breking near the critical point is used. Is shown that in the medium is formed layer with fall of density, limited by the zero density surface, which comes into contact with flow round surface only in critical point.