მიხეილ ნოდიას სახ. გეოფიზიკის ინსტიტუტის შრომები, ISSN 1512-1135, ტ. LXIX, 2018
Transactions of Mikheil Nodia Institute of Geophysics, ISSN 1512-1135, vol. LXIX, 2018
Труды Института геофизики им. Михаила Нодиа, ISSN 1512-1135, т. LXIX, 2018

СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ГАУССОВСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

[1]Зеракидзе З., [2]Кириа Дж., [2]Кириа Т., Чания М.

[1]Горийский государственный университет
[2]Институт геофизики им. М. Нодиа, ТГУ
[3]Сухумский государственый университет

1. Общая характеристика задачи

Пусть X-сепарабельное Гильбертово пространство, а $\mu(A,\cdot)$ Гауссовская мера на (X,B(x)).

В этой статье изучается семейство Гауссовских мер $\mu(A,\cdot)$ со средним значением О и корреляционным оператором A, меняющимся в некотором множестве M. Нас будут интересовать условия, при которых существует состоятельный критерий для корреляционных операторов, т.е. такая последовательность операторозначных измеримых функций $\overline{A}_n(x)$, при которой для всех операторов $A \in M$ сходится по мере в некотором смысле к A.

Для этого необходимо и достаточно чтобы

$$S_p\left[A_2^{-1/2}A_1A_2^{-1/2}-E\right]^2=+\infty,$$

Где E – единичный параметр (см. [1]-[3]).

Как правило, требуется равномерная сходимость этого следа по всем $A_1, A_2 \in M$, лежащем на некотором «расстоянии» друг от друга, причем это „расстояние" в каждом случае свое и оно же определяет и характер сходимости последовательности $\overline{A}_n(x)$, к A. Кроме того будут рассматриваться только такие семейства M, для которых области значений операторов $A^{1/2}$, совпадают для всех операторов $A \in M$, ;

Замыкание этих областей совпадает с X и операторы $A_1^{-1/2}A_2^{1/2}$ ограничены. В дальнейшем рассмотрим методы получения состоятельных критериев с помощью минимизации некоторой последовательности квадратических функционалов. Накладываемое на множество M условие позволяет представить все $A^{1/2}$, где $A \in M$, в виде $A^{1/2} = UA_0^{1/2}$, где U – ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратимый, а Ao – некоторый фиксированный оператор из M. Поэтому для оценки оператора A достаточно оценить оператор U . Это оказывается более удобным в силу существующего у него ограниченного обратного оператора.

2. Метод максимума правдоподобия

Напомним, что X сепарабельное гильбертово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $B(x)$, а $\mu(A.,)$ семейство гауссовских мер с нулевыми средними и коррелляционными операторами $A,\ A \in M$ на $(X, B(x))$.

Выберем последовательность $X_n \subset X_{n+1}$ конечномерных подпространств так, чтобы $\bigcup X_n$ было плотно в X. Положим

$\mu_n(A,\cdot)=\mu(P_n A P_n,\cdot)$,

где P_n – оператор проектирования на подпространство X_n ,

$\mu_n(A,\cdot)$ – проэкция меры $\mu(A,\cdot)$ на X_n. Фиксируем некоторый оператор $A_1 \in M$ и похожим

$$\Phi_n(A_1^{(n)}, A^{(n)}, x) = -2\ln\frac{d\mu_n(A,\cdot)}{d\mu_n(A_n,\cdot)}, \tag{1}$$

Где $A_1^{(n)} = P_n A_1 P_n$, $A^{(n)} = P_n A\ P_n$. Оператор $A^{(n)}$ обратим в X_n . Введем переменную

$$Z = A_1^{1/2}\ A^{-1/2} \tag{2}$$

Положим $$Z_n = A_1^{(n)^{1/2}} A^{(n)^{-1/2}}, \qquad Z_n^* = A^{(n)^{-1/2}} A_1^{(n)^{1/2}} \tag{3}$$

$$H_n(\omega_n) = -\sum_{k=2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} S_p D_n^k, \tag{4}$$

$$D_n = Z_n Z_n^* - P_n = W_n W_n^* + W_n + W_n^*, \quad W_n = Z_n - P_n$$

(Z^* - оператор сопряжений с Z). (5)

Обозначим

$$\widetilde{M} = \left\{Z : ZA^{1/2} = A_1^{1/2},\ \ A \in M\right\}$$

Предположим, что существует числовая последовательность $\gamma_n > 0,\ \gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n S_p\left[A_1^n A^{(n)^{1/2}} - p_n\right]\left[A_1^{n^{1/2}} A^{(n)^{-1/2}} - p_n\right]^* < \infty \tag{6}$$

(сходимость относительно A равномерная).

Обозначим через H_M гильбертово пространство, элементами которого служит последовательности операторов

$$W = \left\{w_1', w_2', \ldots\ldots. w_n', \ldots\ldots.\right\}$$

Где w_n' – оператор вида $P_k C_k P_k$, C_k – оператор в X, а скалярное произведение в H_M введено равенством

$$\left(\left\{w_1', w_2', \ldots\ldots w_n', \ldots\ldots\right\}\left\{w_1'', w_2'', \ldots\ldots w_n'', \ldots\ldots\right\}\right)_M = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k S_p W_k' W_k'' \qquad (7)$$

Норму W обозначим $\|W\|_M$. Обозначим через W(A) элемент из H_M, определенный равенством $W(A) = \{W_1, W_2, \ldots\ldots W_n, \ldots\ldots\}$, где W_n указаны выше. Очевидно, функция W(A) непрерывная па A. Поэтому множество являющиеся образом M при отображении $W(\cdot)$, компактно в H_M. Легко видеть, что отображение $W(\cdot)$ взаимно однозначно, поэтому и обратное отображение непрерывно.

Лемма 1. Пусть найдется a<2 такое, что для всех $A_1, A_n \in M$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a} \le \left\| A_1^{1/2} A_2^{-1/2} \right\| \le a . \qquad (8)$$

Тогда

1) $\dfrac{1}{a} \le \left\| A_1^{(n)^{1/2}} \; A_2^{(n)^{-1/2}} \right\| \le a;$

2) $\left\| D_n \right\| \le \delta < 1;$

3) функция $Hn(W_n)$ определена.

Доказательство. Докажем условие 1). Очевидно, что (8) можно заменить следующими неравенствами:

$$\frac{1}{a} \le \frac{\left\| A_1^{1/2} U \right\|}{\left\| A_2^{1/2} U \right\|} \le a \text{ Или } \frac{1}{a} \le \frac{(A_1 U, U)}{(A_2 U, U)} \le a \qquad (9)$$

Для любого U и $A_1 A_2 \in M$. Если заменить U на $P_n U$, то согласно (9) получим

$$\frac{(A_1 P_n U, P_n U)}{(A_1 P_n U, P_n U)} \le \frac{\left(A_1^{(n)} U, U\right)}{\left(A_2^{(n)} U, U\right)} \le \frac{\left\| A_1^{(n)^{1/2}} U \right\|^2}{\left\| A_2^{(n)^{1/2}} U \right\|^2}$$

Следовательно

$$\frac{1}{a} \le \frac{\left\| A_1^{(n)^{1/2}} U \right\|}{\left\| A_2^{(n)^{1/2}} U \right\|} \le a \qquad (10)$$

Полагая $U = A_2^{n^{-1/2}} V$ из (10) получим требуемое.

Теперь докажем условие 2. Из неравенства (10) после замены U , учитывая (3) и (5), получим

$$\frac{(U,U)}{a} \le \left([W_n + P_n]U, [W_n + P_n]U\right) \le a(U,U).$$

Таким образом

$$\frac{(U,U)}{a} - (U,U) \le (D_n U, U) \le a(U,U) - (U,U) \text{ . и } \left\| D_n \right\| \le \delta, \text{ где } \delta = \max\left\{a-1, 1-\frac{1}{a}\right\} < 1;$$

Очевидно что для $k \succ 2$

$$\left| S_p D_n^k \right| \le S_p D_n^2 \left\| D_n \right\|^{k-2}$$

И следовательно, должно иметь место соотношения

$$\left| -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{K} S_p D_n^k \right| \le S_p D_n^2 \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть выполнены следующие предложения:

Для всех $A_1, A_2 \in M$

$$\frac{1}{a} \le \left\| A_1^{1/2} A_2^{-1/2} \right\| \le a$$

Где a<2;

1) сушествует числовая последовательность $\gamma_n > 0,\ \gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ такая, что выполнено (6) для всех $A_0, A \in M$ и $\sqrt{\gamma_n} H_n(W_n) \to +\infty$ при $n \to \infty$ равномерно при $\|W\|_M \ge \varepsilon$, какого бы не было $\varepsilon > 0$;

2) M принадлежит некоторому классу C^2 в норме $\|\cdot\|_M$ тогда для оператора $A \in M$ существует состоятельный критерии $\overline{A}_n^*(x)$ в следующем смысле:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_0, \left\{ x \left\| A_0^{1/2} A_n^{-1/2}(x) - E \right\} \right) = 0 \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $\overline{A}_n^*(x)$ тот линейный оператор из M, при котором функционал (1) достигает минимума/Функционал (1) отличается от функционала

$$\Phi_n(A_0^{(n)}, A^{(n)}, x) = -2\ln\frac{d\mu_n(A,\cdot)}{d\mu_n(A_0,\cdot)}(x) \tag{12}$$

на величину, не зависящую от A^n,.

$$-2\ln\frac{d\mu_n(A,\cdot)}{d\mu_n(A_0,\cdot)}(x)$$

Значит, (12) также имеет минимум в точке $\overline{A}_n(x)$. Поэтому , можно использовать функционал (12) для того, чтобы показать, что $\overline{A}_n(x)$ – состоятельный критерий для оператора $A_0 \in M$. Учитывая (1)- (5) и функциионал (12), можно записать

$$\Phi_n(A_0^{(n)}, A^{(n)}, x) = \left(\left[Z_n Z_n^* - P_n\right] A_0^{(n)^{-1/2}} x, A_0^{(n)^{-1/2}} x\right) + F_n(Z_n), \quad (13)$$

Где

$$F_n(Z_n) = -2\ln\det Z_n = -\ln\det[D_n + P_n].$$

Если использовать разложение в ряд

$$\ln\det(E+B) = \sum_{k=0}^{\infty}\ln(1+\lambda k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} S_p B^k,$$

Получим представление

$$F_n(Z_n) = -S_p D_n + H_n(W_n) \quad (14)$$

Обозначим

$$Z_n(x) = A_0^{1/2} A_n^{-1/2}(x),$$

$$\varphi_n(W_n, x) = (D_n A_0^{(n)^{-1/2}} x, A_0^{(n)^{-1/2}} x) - S_p D_n . \quad (15)$$

Тогда из (5), (13) – (15) следует

$$\Phi_n(W_n, x) = \varphi_n(W_n, x) + H_n(W_n). \quad (16)$$

Покажем, что $\overline{Z}_n(x) \to E$ при $n \to \infty$ по мере $\mu(A_0,\cdot)$. Поскольку $\Phi_n(W_n, x) = 0$ при $W_n = 0$, достаточно показать, что $\inf \Phi_n(W_n, x) \to +\infty$ при $n \to \infty$ по мере $\mu(A_0,\cdot)$ при $\|Z - E\|_M \geq \varepsilon, Z \in \widetilde{M}$. Кроме того $\|W_n\| \leq \text{const},$, где $\|W_n\| = \sqrt{S_p W_n W_n^*}$.

Очевидно, что $MA_0\varphi_n(W_n, x) = 0$ и из (5) и(15) следует что

$$M\left[\varphi_n(W_n', x) - \varphi_n(W_n'', x)\right]^2 = 2S_p[(W_n' W_n'^* - W_n'' W_n''^*) + (W_n' - W_n'') + (W_n' - W_n'')^*]^2 -$$

$$-\{S_p[(W_n' W_n'^* - W_n'' W_n''^*) + (W_n' - W_n'')^* + (W_n' - W_n'') \leq 6[S_p(W_n' W_n'^* - W_n'' W_n''^*)^2 +$$

$$+ S_p(W_n' - W_n'')^2 + S_p(W_n'^* - W_n''^*)^2] \quad (17).$$

Поскольку

$$S_p W^2 \prec S_p W W^* = \|W\|^2$$

и

$$W_n^{'}W_n^{'*} - W_n^{"}W_n^{"*} = (W_n^{'} - W_n^{"})W_n^{'*} + W_n^{"}(W_n^{'*} - W_n^{"*})$$

Учитывая (17) получем следующую оценку:

$$M\left\{\sqrt{\gamma_n}\left[\varphi_n(W_n^{'},x) - \varphi_n(W_n^{'},x)\right]\right\}^2 \le const\gamma_n \left\|W_n^{'} - W_n^{"}\right\|^2 \le const\left\|W_n^{'} - W_n^{"}\right\|_M^2 \qquad (18)$$

Функционал (16) можно записать так:

$$\Phi_n(W_n,x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_n}}[\sqrt{\gamma_n}\varphi_n(W_n,x) + \sqrt{\gamma_n}H_n(W_n)] \qquad (19)$$

По условию 2) теоремы $\sqrt{\gamma_n}\varphi_n(W_n,x) + \sqrt{\gamma_n}H_n(W_n) \to +\infty$ при $n \to \infty$ по мере $\mu(A_0,\cdot)$ при $\|Z - E\|_M \ge \varepsilon, Z \in \widetilde{M}$ равномерно по W, так как функция $\sqrt{\gamma_n}\varphi_n(W_n,x)$, равномерно относительно n ограничена по W в силу условия 3) теоремы. Так как M компактно в метрике $\|\cdot\|_M$, то $\inf \Phi_n(W_n,x) \to \infty$ при $n \to \infty$ по мере $\mu(A_0,\cdot)$ при $\|Z - E\|_M \ge \varepsilon, Z \in \widetilde{M}$. Поэтому

$$\mu(A_0,\{x: \left\|\overline{Z}_n(x) - E\right\|_M \ge \varepsilon = \mu(A_0,\{x: A_0^{1/2}\overline{A}_n^{-1/2}(x) - E\|M > \varepsilon\}) \le \mu(A_0,\{\inf_{\|\|Z-Z_0\|\|_M > \varepsilon} \Phi_n(W_n,x) \le$$

$$\le 0\}) \le 1 - \mu(A_0,\{\inf_{\|\|Z-Z_0\|\|_M > \varepsilon} \Phi_n(W_n,x) > 0\})$$

Теория доказана.

Литература

1. Zerakidze Z. Generalization of Neumanu-Person ctierion. Collected scientific of wirks (in Georgian) the ministry of Edication and Science of Georgia/. Gori state University. Pp. 63-69, Tbilisi, 2005.
2. Zerakidze Z. Hilbert space of measurens. Ukr.Mathen Journ. 38, 2, p. 148-154, Kew, 1986.
3. Dunforg N., Schwart J.T. Linear Operators. Part. I. General Theory. Interscience Publishers. New-York, London, 1958.

ჰიპოთეზათა შემოწმების ძალდებული კრიტერიუმები გაუსის სტატისტიკური სტრუქტურებისათვის

ზერაკიძე ზ., ქირია ჯ., ქირია თ., ჭანია მ.

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები ძალდებული კრიტერიუმების არსებობის შესახებ გაუსის სტატისტიკური სტრუქტურებისათვის.

Состоятельные критерии проверки гипотез для статистических структур Гаусса

Зеракидзе З., Кириа Д., Кириа Т., Чаниа М.

Реферат

В труде доказаны необходимые и достаточные условия о существовании состоятельныех критериев проверки гипотез для статистических структур Гаусса.

A consistent criteria for Gaussian Statistical structure

Zerakidze Z., Kiria J., Kiria T., Chania M.

Abstract

In the paper we prove necessary and sufficient conditions for existence of Gaussian statistical structure.