ავთანდილ ბენდუქიძე

მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო

ავთანდილ გენდუქიძე

მათემატიკა

სერიოზული და სახალისო

„ნაკადული", თბილისი, 1988

22.18
518.92
ბ 482

ავტორისაგან

წინამდებარე წიგნი მოსწავლე ახალგაზრდობისათვისაა დაწერილი. მასში თავმოყრილია ოცდახუთი ნარკვევი მათემატიკაზე. წიგნის გამოცემა ორმა რამემ განაპირობა: მშობლიურ ენაზე მეცნიერულ-პოპულარული ლიტერატურის სიღარიბემ და გამომცემლობა „ნაკადულის" მიერ ჩემი ნაშრომისადმი გამოჩენილმა ყურადღებამ. ხელნაწერის გამოსაცემად მომზადებასა და, აგრეთვე, კორექტურის კითხვაში უდიდესი დახმარება გამიწიეს არკადი ქურჩიშვილმა და რომანოზ დანელიამ. ორივეს უღრმეს მადლობას მოვახსენებ. აქვე მინდა აღვნიშნო ის კეთილისმყოფელი გავლენა, რომელიც ჩემზე სტუდენტობის წლებში და შემდგომშიც იქონია პროფესორმა ვლადიმერ ჭელიძემ. ლექციის კითხვისას იგი ხშირად გვთავაზობდა მსმენელებს ძნელ ამოცანებს, გვესაუბრებოდა ამა თუ იმ პრობლემაზე, რითაც გვიღვივებდა ინტერესს საგნისადმი. პირველმა სწორედ მან მირჩია მეცნიერულ-პოპულარული წერილის დაწერა. მოხარული ვარ, რომ საშუალება მეძლევა ეს წიგნი მის ნათელ ხსოვნას ვუძღვნა.

რედაქტორი
არკადი ქურჩიშვილი

პირველი გამოცემა

70803—124
Б ———————— —88
M—603(08)—88

მარტივი რიცხვების შესახებ

მინდა მარტივ რიცხვებზე გესაუბროთ. ამ რიცხვებმა უხსოვარი დროიდან მიიპყრო ჩვენი წინაპრების ყურადღება, მათთან დაკავშირებით უამრავი საინტერესო კითხვა დაისვა. საგულისხმოა, რომ ზოგიერთ ამ კითხვაზე პასუხის გაცემას საუკუნეები დასჭირდა, ზოგის პასუხი კი... ჯერაც უცნობია!

1. მარტივი და შედგენილი რიცხვები. ავიღოთ ნატურალურ რიცხვთა მწკრივი:

1, 2, 3, 4, 5,...

რიცხვთა ამ მწკრივში არ არის უდიდესი რიცხვი. ეს ნიშნავს, რომ რაგინდ დიდი უნდა იყოს ნატურალური n რიცხვი, მასზე დიდი რიცხვი მოიძებნება. მართლაც, ასეთი იქნება უკვე n-ის მომდევნო — მასზე **1**-ით მეტი რიცხვი, ესე იგი $n+1$.

ამრიგად, ნატურალური რიცხვები უსასრულოდ ბევრია. სწორედ ამას გულისხმობენ მათემატიკოსები, როცა ამბობენ, — ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოაო.

დავუბრუნდეთ ისევ ნატურალურ რიცხვთა მწკრივს. უმცირესი რიცხვი ამ მწკრივში არის **1**. შემდეგი რიცხვია **2**. მას ორი გამყოფი აქვს: **1** და **2**. **2**-ს მოსდევს **3**. მასაც ორი გამყოფი აქვს: **1** და **3**. მომდევნო რიცხვს, ესე იგი **4**-ს, სამი გამყოფი აქვს: **1, 2** და **4.** **5**-ს ორი გამყოფი აქვს, **6**-ს ოთხი და ასე შემდეგ. რიცხვს შეიძლება ბევრი გამყოფიც ჰქონდეს. **60**-ს, მაგალითად, **12** გამყოფი აქვს: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30** და **60.**

როგორც ხედავთ, თუ 1-ს გამოვრიცხავთ, ნატურალურ რიცხვს ან ორი გამყოფი აქვს — 1 და თავად ეს რიცხვი, ან ორზე მეტი. პირველ შემთხვევაში რიცხვს **მარტივი** ეწოდება, მეორე შემთხვევაში — **შედგენილი**. ასე, მაგალითად, **2, 3, 5, 7, 11** მარტივი რიცხვებია, **4, 6, 8, 9, 10** — შედგენილი. **1**-იანს რაღა ვუყოთ? — იკითხავთ თქვენ, — მას ხომ მხოლოდ ერთი გამყოფი აქვს! გიპასუხებთ: ეს რიცხვი არც მარტივად ითვლება, არც შედგენილად.

მაშასადამე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება სამ ნაწილად ან, როგორც ამბობენ ხოლმე, სამ ქვესიმრავლედ დავყოთ. პირველი ამ სიმრავლეებიდან მხოლოდ ერთ რიცხვს, სახელდობრ, **1**-ს შეიცავს, მეორე — ყველა მარტივ რიცხვს, ხოლო მესამე — შედგენილ რიცხვებს. თითოეული ნატურალური რიცხვი ერთ და მხოლოდ ერთ დასახელებულ ქვესიმრავლეში მოხვდება. სხვანაირად, — ეს ქვესიმრავლეები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან.

2. **მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობა**. ადვილი მისახვედრია, რომ შედგენილ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. მართლაც, უკვე 2^n სახის რიცხვები, სადაც n იღებს **2, 3, 4,...** მნიშვნელობებს, უსასრულოდ ბევრია, მაგრამ მათ გარდა ხომ სხვა შედგენილი რიცხვებიც არსებობენ!

რა შეიძლება ითქვას მარტივ რიცხვთა სიმრავლის შესახებ — სასრულია ის თუ უსასრულო? სახელგანთქმულმა **ევკლიდემ** — ბერძენმა მათემატიკოსმა, რომელიც ძველი წელთაღრიცხვის **III** საუკუნეში ცხოვრობდა, დაამტკიცა, რომ **მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა**.

ნახეთ, რა მოხდენილად მსჯელობს ევკლიდე ამ ფაქტის დამტკიცებისას.

ვთქვათ, p რაიმე მარტივი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ აუცილებლად არსებობს მასზე დიდი მარტივი რიცხვი. მართლაც, ავიღოთ ყველა მარტივი რიცხვის ნამრავლი **2**-დან p-მდე, ამ უკანასკნელის ჩათვლით, და ამ ნამრავლს 1 დავუმატოთ. მივიღებთ რაღაც m რიცხვს:

$$m=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p+1.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ, საზოგადოდ, m საკმაოდ დიდი რიცხვია. მაგალითად, თუ $p=11$, მაშინ $m=29331$. მაგრამ ეს ისე, სხვათაშორის. ისევ ჩვენთვის საინტერესო საკითხს დავუბრუნდეთ და განვიხილოთ p-ზე ნამდვილად მეტი m რიცხვი. ცხადია, რომ ეს უკანასკნელი ან მარტივია, ან შედგენილი. თუ ის მარტივია, ყველა-

ფერი რიგზეა — დამტკიცებულია, რომ არსებობს p-ზე დიდი მარტივი რიცხვი. თუკი m შედგენილია, ის უნაშთოდ უნდა გაიყოს რომელიმე მარტივ რიცხვზე. მაგრამ იგი არ იყოფა არც 2-ზე, არც 3-ზე, არც 5-ზე,..., არც p-ზე, რადგან ყველა შემთხვევაში ნაშთს 1-ს მივიღებთ. გამოდის, რომ m იყოფა p-ზე მეტ რომელიღაც მარტივ რიცხვზე. ეს კი სწორედ იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში მოიძებნება p-ზე დიდი მარტივი რიცხვი. მაშასადამე, როგორიც უნდა იყოს m, — მარტივი თუ შედგენილი, ორივე შემთხვევაში მტკიცდება p-ზე დიდი მარტივი რიცხვის არსებობა, რაც ადასტურებს მარტივ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულობას.

3. ერატოსთენეს საცერი. ამრიგად, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. ამასთანავე, ცხადია, რომ სიმრავლე მარტივი რიცხვებისა, რომლებიც რაღაც n-ს არ აღემატებიან, სასრულია. როგორ ვიპოვოთ ეს მარტივი რიცხვები? ამის გაკეთება ძალიან ადვილია, თუ მოვიშველიებთ წესს, რომელიც ძველი საბერძნეთის გამოჩენილ მეცნიერს **ერატოსთენეს** ეკუთვნის. (მკითხველისთვის უინტერესო არ იქნება იმის გაგება, რომ ტერმინი „გეოგრაფია“ სწორედ ერატოსთენეს შემოღებულია.) გავეცნოთ ამ წესს.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ n-ზე არა უმეტესი ყველა მარტივი რიცხვი. ამოვწეროთ ყველა რიცხვი 1-დან n-მდე, ამ უკანასკნელის ჩათვლით:

1, 2, 3, 4, 5,..., n.

რიცხვთა ამ რიგში პირველია 1. იგი, როგორც ვიცით, არც მარტივია და არც შედგენილი, ამიტომაც წავშალოთ. შემდეგი რიცხვია 2. იგი მარტივია. დავტოვოთ ეს რიცხვი და წავშალოთ მისი ჯერადი ყველა რიცხვი. ამისათვის საკმარისია, 3-დან დაწყებული ყოველი მეორე რიცხვი წავშალოთ. ამით ჩვენ წავშლით ყველა შედგენილ რიცხვს, რომელიც 2-ზე იყოფა. წავიდეთ წინ. პირველი წაუშლელი რიცხვი არის 3. ის მარტივია (წინააღმდეგ შემთხვევაში წავშლიდით!) ვტოვებთ მას ხელუხლებლად და ვშლით მის ჯერად ყველა მომდევნო რიცხვს, ესე იგი, 4-დან დაწყებული ყოველ მესამეს. (დათვლისას ადრე წაშლილი რიცხვებიც უნდა მივიღოთ მხედველობაში. ასე, რომ ზოგიერთი რიცხვის მეორედ წაშლა მოგვიწევს. ადვილი მისახვედრია, რომ ასეთები იქნება **6, 12, 18, 24,...,** ესე იგი ერთდროულად 2-ისა და 3-ის, ანუ 6-ის ჯერადი რიცხვები.) ამის შემდეგ დარჩენილი პირველი წაუშლელი რიცხვი მარტივი იქ-

ნება. ეს რიცხვია 5. მას ვტოვებთ და ვშლით მის ჯერად ყველა მომდევნო რიცხვს, ესე იგი 6-დან დაწყებული ყოველ მეხუთეს. გადავდივართ შემდეგ ამოუშლელ, და მაშასადამე, მარტივ რიცხვზე — ასეთია 7 და ასე შემდეგ და ასე შემდეგ. საბოლოოდ ყველა შედგენილი რიცხვი წაშლილი აღმოჩნდება, ყველა მარტივი — წაუშლელი. აი რას მივიღებთ, მაგალითად, თუ $n=60$:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ 1-დან 60-მდე სულ 17 მარტივი რიცხვია: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53** და **59.**

ერატოსთენეს წესით რომ ვსარგებლობთ, ჩვენ თითქოსდა ვცრით რიცხვებს — საცერში, ცხავში ვატარებთ შედგენილებს და მხოლოდ მარტივებს ვიტოვებთ. ამიტომაც, მარტივი რიცხვების მოძებნის ამ წესს **ერატოსთენეს საცერი** ჰქვია.

ერთი შეხედვით, ერატოსთენეს საცრით სარგებლობა არაეკონომიურია — ბევრი წაშლა გვიხდება, ზოგი რიცხვისა ორჯერ, სამჯერ ან მეტჯერაც კი. მაგრამ ეს ასე არ არის, — როგორც კი იმ მარტივ რიცხვამდე მივალთ, რომლის კვადრატი n-ზე მეტია, წაშლა შეიძლება შევწყვიტოთ — ყველა შედგენილი რიცხვი 1-დან n-მდე მონაკვეთში წაშლილი აღმოჩნდება. მაგალითად, 1-დან 10 000-მდე მარტივი რიცხვების მოსაძებნად, წაშლა, 101-მდე რომ მივალთ, შეიძლება აღარ გავაგრძელოთ. (101 მარტივი რიცხვია და $101^2 > 10000$).

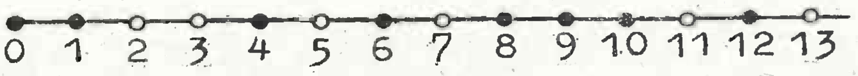
4. რას უდრის „მანძილი“ ორ მეზობელ მარტივ რიცხვს შორის? მარტივ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე არის ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლის ნაწილი. ბუნებრივია, ვიკითხოთ: როგორ არის განლაგებული ეს ნაწილი მთელში? სამწუხაროდ, მარტივ რიცხვთა განაწილების არავითარი მარტივი კანონი აღმოჩენილი არ არის, თუმცა ზოგიერთი კანონზომიერება შეიძლება ადვილადაც კი დამტკიცდეს.

ავიღოთ, მაგალითისათვის, **100**-ზე ნაკლებ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ამ რიგის დასაწყისში ორი მარტივი რიცხვი დგას: **2** და **3**. ისინი ერთმანეთის მეზობლად დგანან. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ერთადერთი შემთხვევაა, როცა ორი მეზობელი ნატურალური რიცხვიდან ორივე მარტივია — ყველა მარტივი რიცხვი, **2**-ის გარდა ხომ კენტია!

წავიდეთ წინ. **3**-ის შემდეგ დგას **5**. „მანძილი“ მათ შორის ორის ტოლია, — ეს ძალიან კარგად ჩანს, თუ რიცხვებს ღერძზე განლაგებულად წარმოვიდგენთ. აი, ასე:



იგივე „მანძილითაა“ დაშორებული ერთმანეთისაგან მარტივ რიცხვთა შემდეგი წყვილი — **5** და **7**. მაგრამ აი, **7**-სა და **11**-ს შორის უკვე სამი შედგენილი რიცხვია. მერე კვლავ მეზობელ კენტ რიცხვთა წყვილი მოდის: **11** და **13**. ყველაზე „დაშორებული“ ერთმანეთისაგან ჩვენს სიაში **(89,97)** წყვილის რიცხვებია — მათ შორის შვიდი შედგენილი რიცხვია. მაგრამ, თუკი მარტივ რიცხვთა მწკრივს გავაგრძელებთ, აღმოვაჩენთ რიცხვებს, რომელთა შორის „მანძილი“ რვაზე მეტია. ასეთებია, მაგალითად, **113** და **127**, **139** და **149**. ამასთანავე, კვლავ შეგვხვდება რიცხვები უმცირესი შესაძლო „მანძილით“, მაგალითად, **149** და **151**, **179** და **181**, **191** და **193**. შევეცადოთ გავარკვიოთ, რამდენად დიდი შეიძლება იყოს „მანძილი“ ორ მეზობელ მარტივ რიცხვს შორის.

ავიღოთ, მაგალითად, რიცხვი **100** და დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება ვიპოვოთ ერთიმეორის მომდევნო **100** ნატურალური რიცხვი, რომელთაგან არც ერთი მარტივი არ არის. ამისათვის გადავამრავლოთ ყველა ნატურალური რიცხვი **2**-დან **101**-მდე, ამ უკანასკნელის ჩათვლით. მიღებული რიცხვი A-თი აღვნიშნოთ:

$$A = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101.$$

ცხადია, რომ A უნაშთოდ იყოფა **2**-ზე, **3**-ზე, **4**-ზე..., **100**-ზე, **101**-ზე. ახლა განვიხილოთ ერთიმეორის მომდევნო შემდეგი **100** ნატურალური რიცხვი:

$$A+2,\ A+3,\ A+4, \ldots, A+99,\ A+100,\ A+101.$$

ყველა ეს რიცხვი შედგენილია. მართლაც, პირველი ამ რიცხვებიდან იყოფა 2-ზე, რადგან თითოეული შესაკრები იყოფა 2-ზე, მეორე, ვინაიდან ორივე შესაკრები 3-ის ჯერადია, იყოფა 3-ზე და ასე შემდეგ, უკანასკნელი — $A+101$ იყოფა 101-ზე.

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ ერთიმეორის მომდევნო 100 შედგენილი რიცხვი. ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ 1000, 10000 და მეტი ერთიმეორის მომდევნო შედგენილი რიცხვი. ამრიგად, „მანძილი" ორ მარტივ რიცხვს შორის შეიძლება რაგინდ დიდი იყოს.

5. ტყუპი მარტივი რიცხვები. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ერთადერთ გამონაკლისს — 2 და 3 რიცხვების შემთხვევას, უმცირესი შესაძლო „მანძილი" ორ მეზობელ მარტივ რიცხვს შორის ორს უდრის. პირველ ასეულში ასეთ რიცხვთა რვა წყვილია:

(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73).

ასეთ მარტივ რიცხვთა წყვილებს ტყუპები ჰქვია. აი, საკმაოდ დიდი ტყუპი რიცხვების წყვილი:

(1000000009649, 1000000009651).

სასრულია თუ უსასრულო ტყუპი რიცხვების სიმრავლე? ეს არავინ არ იცის — ვერც იმის დამტკიცება მოხერხდა, რომ ეს სიმრავლე სასრულია და ვერც იმისა, რომ იგი უსასრულოა.

6. მარტივ რიცხვთა განაწილება. შევეხოთ მარტივ რიცხვებთან დაკავშირებულ კიდევ ერთ საკითხს. ავიღოთ ნატურალურ რიცხვთა მონაკვეთი 1-დან n-მდე, ამ უკანასკნელის ჩათვლით. ამ მონაკვეთზე მარტივ რიცხვთა გარკვეული რაოდენობაა. მათი რიცხვი $\pi(n)$-ით აღინიშნება (π-ბერძნული ასო „პი", $\pi(n)$ იკითხება: „პი ენ"). რას უდრის $\pi(n)$ n-ის ცალკეულ მნიშვნელობათათვის?

თუ n პატარაა, $\pi(n)$-ის მნიშვნელობის გამოთვლა სულაც არ არის ძნელი — ამას ჩვენ სულ ადვილად შევძლებთ. მაგალითად,

$\pi(1)=0,\ \pi(2)=1,\ \pi(3)=2,\ \pi(4)=2,$

$\pi(5)=3,\ \pi(6)=3,\ \pi(7)=4,\ \pi(8)=4,$

$\pi(9)=4,\ \pi(10)=4,\ \pi(11)=5,\ \pi(12)=5.$

დავაკვირდეთ დაწერილ ტოლობებს. უცბად თვალში გვეცემა $\pi(n)$-ის ცვლილების არარეგულარულობა. საზოგადოდ, არავითარი მარტივი ფორმულა $\pi(n)$-ისათვის არ არსებობს.

მიუხედავად ამისა, n-ის ზრდასთან ერთად შეიმჩნევა, რომ მარტივ რიცხვთა „საშუალო სიმკვრივე", ესე იგი $\pi(n):n$ შეფარ-

დება სულ უფრო მცირე და მცირე ხდება. ეს კარგად ჩანს შემდეგი ცხრილიდანაც:

n	$\pi(n)$	$\pi(n):n$
10	4	0,4
100	25	0,4
1000	168	0,17
10000	1229	0,12
100000	9592	0,096
1000000	78498	0,078
10000000	664579	0,066
100000000	5761455	0,057
1000000000	50847478	0,051

დამტკიცებულია, რომ n-ის ზრდასთან ერთად $\pi(n):n$ შეფარდება ნულს უახლოვდება. პირველად ეს ფაქტი **XVIII** საუკუნის უდიდესმა მათემატიკოსმა **ლეონარდ ეილერმა** დაამტკიცა. შემდგომში დიდმა რუსმა მათემატიკოსმა **ჩებიშოვმა** დააზუსტა ეილერის შედეგი — დაამტკიცა უფრო ზოგადი თეორემა, მაგრამ ამაზე აქ აღარ შევჩერდებით.

არითმეტიკული კურიოზები

$$1+2+3+4+5+6+7+8\cdot 9=100$$
$$12+3-4+5+67+8+9=100$$
$$123+4-5+67-89=100$$
$$123-45-67+89=100$$

ფიგურული რიცხვები

I

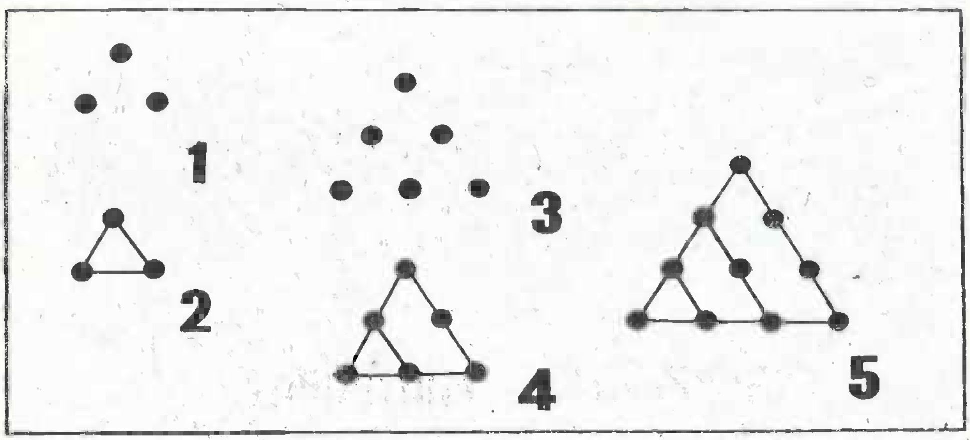
აი, მე აღვნიშნე სიბრტყეზე სამი წერტილი (ნახ. 1). აღვნიშნე ისე, რომ თუ მათ წყვილ-წყვილად შევაერთებთ, ტოლგვერდა, ანუ წესიერ სამკუთხედს მივიღებთ (ნახ. 2). თუმცა, აღებული წერტილები შეერთების გარეშეც ქმნიან, ასე ვთქვათ, სამკუთხედის „შთაბეჭდილებას“.

ოთხი წერტილი რომ ავიღოთ, შეიძლება თუ არა მათი ანალოგიური განლაგება? თურმე — არა. არც ხუთი წერტილი ვარგა. მაგრამ ექვსი წერტილი სასურველ შედეგს იძლევა (ნახ. 3). ამასთანავე, ახალი „ექვსწერტილოვანი“ სამკუთხედი „სამწერტილოვანის“ ორჯერ გადიდებით მიიღება (ნახ. 4). სწორედ ეს იწვევს სამი ახალი წერტილის დამატებას.

კიდევ რამდენი წერტილი უნდა დავუმატოთ ამ ექვსს, რომ სამკუთხედის „შთაბეჭდილება“ შევინარჩუნოთ? პასუხი ადვილი მოსაძებნია: ოთხი (ნახ. 5). მიაქციეთ ყურადღება, რომ ახალი სამკუთხედი თავდაპირველი სამკუთხედის სამჯერ გადიდებით მიიღება.

წერტილების სათანადო რიცხვის დამატებით სულ ახალ-ახალ სამკუთხედებს მივიღებთ. ამისათვის უკვე აღებულ ათ წერტილს კიდევ ხუთი წერტილი უნდა დავუმატოთ, მიღებულ თხუთმეტს — ექვსი, მათ კიდევ შვიდი და ასე შემდეგ.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რამდენი წერტილი უნდა გვქონდეს, რომ „სამკუთხა კონფიგურაცია“ შევადგინოთ? შევეცადოთ პასუხი გავცეთ ამ კითხვას.



ზემოთ განხილულ მაგალითებში წერტილთა რაოდენობა შესაბამისად **3,6** და **10** იყო. შემდეგ, როგორც ვთქვით, უნდა იყოს **15, 21,28,**... ამ რიცხვებს, სრულიად გასაგები მიზეზისა გამო **სამკუთხა რიცხვები** ეწოდება. ჩვენ გვინდა დავადგინოთ, რა სახე აქვს სამკუთხა რიცხვებს. ამის გაკეთება სულაც არ არის ძნელი, თუ შევნიშნავთ, რომ:

$$
\begin{aligned}
3 &= 1+2,\\
6 &= 1+2+3,\\
10 &= 1+2+3+4,\\
15 &= 1+2+3+4+5,\\
21 &= 1+2+3+4+5+6,\\
28 &= 1+2+3+4+5+6+7,
\end{aligned}
$$

უცბად თვალში გვეცემა კანონზომიერება, რომლითაც ეს რიცხვებია შედგენილი. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ეს კანონზომიერება შემდეგშიც ძალაში რჩება. ამრიგად, თუ n-ურ სამკუთხა რიცხვს T_n-ით აღვნიშნავთ და, ამასთანავე, შევთანხმდებით, რომ $T_1=1$, მაშინ:

$$T_n = 1+2+3+\dots+n.$$

სამკუთხა რიცხვების ეს ფორმულა თავისი აგებულებით ძალიან მარტივი კი არის, მაგრამ გამოთვლებისათვის ნამდვილად მოუხერხებელია. გავამარტივოთ იგი. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში თავიდან და ბოლოდან ტოლად დაშორებულ შესაკრებთა ჯამი ერთი და იგივეა, სახელდობრ $(n+1)$-ს უდრის. ახლა ყველაფერი ადვილია: დავწეროთ ჩვენი ფორმულა ორჯერ, თანაც მეორე შემთხვევაში შესაკრებთა მიმდევრობა შევცვალოთ:

$$T_n=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n,$$
$$T_n=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1.$$

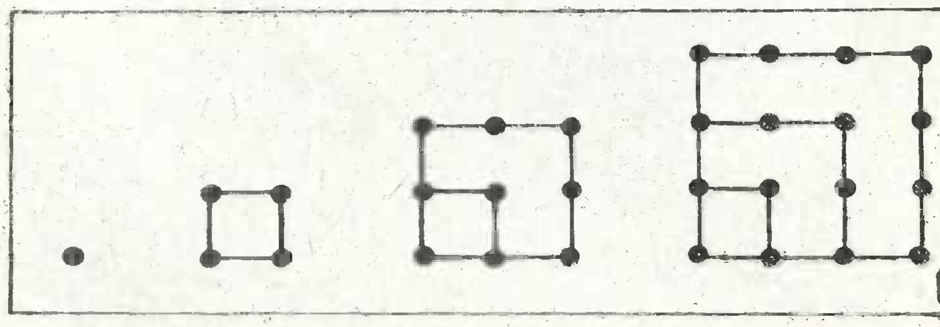
შევკრიბოთ ეს ტოლობები „სვეტების“ მიხედვით. მაშინ მარცხენა ნაწილში $2\,T_n$-ს მივიღებთ, ხოლო მარჯვენა ნაწილში — $(n+1)$ რიცხვს აღებულს n-ჯერ. ამიტომაც, $2\,T_n=n(n+1)$, საიდანაც საბოლოოდ:

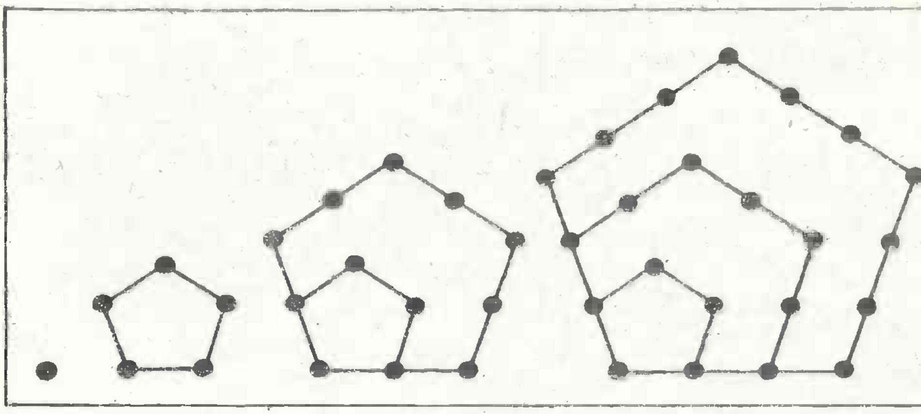
$$\boxed{T_n=\frac{1}{2}n(n+1).}$$

ამრიგად, შესაკრებთა დაწყვილების მეთოდმა საშუალება მოგვცა გაგვემარტივებინა საკმაოდ რთული გამოსახულება. ამასთან დაკავშირებით მინდა მოვიყვანო ტრადიციული მოთხრობა პატარა კარლზე, რომელმაც ბრწყინვალედ გამოიყენა ეს მეთოდი მსგავსი ამოცანის ამოხსნისას.

„კარლი დაწყებითი სკოლის მოსწავლე იყო... ერთხელ მასწავლებელმა, რომელსაც უნდოდა, რაც შეიძლება მეტი ხნით დაეკავებინა მოსწავლეები, დაავალა მათ შეეკრიბათ ყველა მთელი რიცხვი 1-დან 100-მდე, ამ უკანასკნელის ჩათვლით, მოსწავლეებს არც კი ჰქონდათ დაწყებული ამ ძნელი ამოცანის ამოხსნა, როდესაც კარლმა შენიშნა, რომ რიცხვთა წყვილები: 1 და 100, 2 და 99, 3 და 98 და ასე შემდეგ, ჯამში 101-ს იძლევიან. იანგარიშა რა ზეპირად, რომ ასეთ წყვილთა რაოდენობა 50-ია, მან თავის გრიფელის დაფაზე დაწერა პასუხი — 5050 და იგი მასწავლებელს გაუწოდა. მასწავლებელი მეტად გაკვირვებული იყო...“

მომავალმა გვიჩვენა, რომ მასწავლებელს გაკვირვების საფუძველი არ უნდა ჰქონოდა, ვინაიდან პატარა კარლი შემდგომში დიდი კარლ ფრიდრიხ გაუსი გახდა, რომელიც სიცოცხლეშივე „მათემატიკოსების მეფედ“ იქნა აღიარებული.


6



7

2

სამკუთხა რიცხვებს გარდა, არის **კვადრატული, ხუთკუთხა, ექვსკუთხა** და სხვა **მრავალკუთხა რიცხვები**. ეს რიცხვები დაკავშირებულია სათანადოდ კვადრატთან, წესიერ ხუთკუთხედთან, წესიერ ექვსკუთხედთან და სხვა წესიერ მრავალკუთხედებთან.

ვთქვათ, K_n და Q_n აღნიშნავს შესაბამისად n-ურ კვადრატულ და n-ურ ხუთკუთხა რიცხვს. მაშინ:

$$\boxed{K_n = n^2.} \qquad \boxed{Q_n = \frac{1}{2}\, n(3n-1).}$$

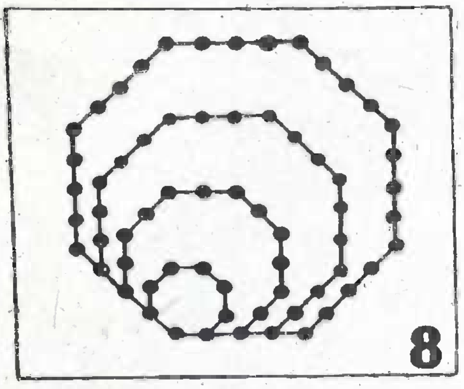
ამ ტოლობების მისაღებად საჭიროა თითოეული K_n და Q_n რიცხვიდან სათანადო ჯამის სახით წარმოვადგინოთ (იხ. ნახ. 6 და 7) და შესაკრებთა დაწყვილების ჩვენთვის ცნობილი მეთოდი გამოვიყენოთ. იმედია, ამას მკითხველი თავად მოახერხებს.

ანალოგიურად მიიღება გამოსახულებანი სხვა მრავალკუთხა რიცხვებისთვისაც. ამოვხსნათ ზოგადი ამოცანა — ვიპოვოთ ნებისმიერი n-კუთხა რიცხვის ფორმულა.

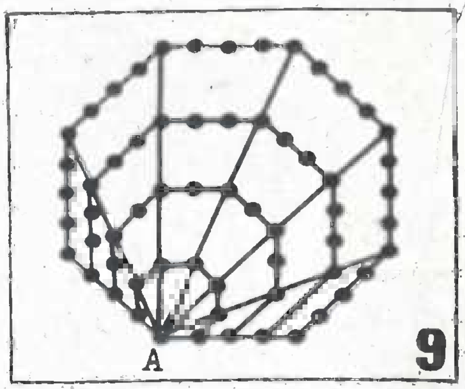
3

მაშ ასე, ვთქვათ, $F_n^{(k)}$ არის n-ური k-კუთხა რიცხვი. განვიხილოთ მისი წარმომქმნელი წესიერი k-კუთხედი (ნახ. 8).

ავიღოთ ამ მრავალკუთხედის რომელიმე წვერო — დავარქვათ მას A და მისგან დიაგონალები გავავლოთ. რამდენი დიაგონალი გაივ-



8



9

ლება? დავითვალოთ. A წვერო შეიძლება შევაერთოთ k-კუთხედის ნებისმიერ დარჩენილ $k-1$ წვეროსთან, მაგრამ A-ს მეზობელ წვეროებთან შეერთებით დიაგონალები არ მიიღება, მაშასადამე, დიაგონალების რიცხვია $k-3$. ეს დიაგონალები აღებულ k-კუთხედს $k-2$ სამკუთხედად ჰყოფენ (ნახ. 9). თითოეული ეს სამკუთხედი n-ურ სამკუთხა T_n რიცხვთან არის დაკავშირებული და რამდენადაც ჩვენ უკვე ვიცით, რას უდრის T_n, სულ ადვილად დავითვლით წერტილების რაოდენობას მრავალკუთხედში, ესე იგი, ვიპოვით $F_n^{(k)}$-ს. მართლაც, თითოეულ სამკუთხედში T_n რიცხვია, სამკუთხედების რაოდენობა კი $k-2$ არის, ესე იგი, სულ $(k-2)T_n$ წერტილია. მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ზოგიერთი წერტილი, სახელდობრ, დიაგონალებზე მდებარე წერტილები, ორ-ორჯერ დავითვალეთ — ყოველი დიაგონალი ხომ ორი მეზობელი სამკუთხედის გვერდია, ხოლო A წერტილი, რომელიც ყველა სამკუთხედს ეკუთვნის, $(k-2)$-ჯერ არის საითვალავში აღებული. მაშ, დავაზუსტოთ წერტილთა რაოდენობა k-კუთხედში. თითოეულ დიაგონალზე n წერტილია. თუ მათ A წერტილს ჩამოვაშორებთ, $n-1$ წერტილი დარჩება. გამოდის, რომ $(n-1)(k-3)$ წერტილი ორ-ორჯერაა დათვლილი, ხოლო A წერტილი ერთის ნაცვლად $(k-2)$-ჯერ. მაშასადამე, წერტილთა საერთო რაოდენობა რომ მივიღოთ, $(k-2)\cdot T_n$-ს უნდა $(n-1)(k-3)$ და კიდევ $k-3$ გამოვაკლოთ. ეს $F_n^{(k)}$-სათვის შემდეგ გამოსახულებას მოგვცემს:

$$(k-2)T_n-(n-1)(k-3)-(k-3).$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ T_n-ის მნიშვნელობას, მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ საძიებელ ფორმულას $F_n^{(k)}$-სათვის:

$$F_n^{(k)}=\frac{1}{2}n((k-2)n-k+4).$$

თუ ამ ფორმულაში k-ს მივცემთ, კერძოდ, $k=3,4,5$ მნიშვნელობებს, შესაბამისად T_n-ის, K_n-ისა და Q_n-ის ფორმულებს მივიღებთ.

4

მრავალკუთხა, ან, როგორც მათ ხშირად უწოდებენ **ფიგურული რიცხვები** უძველესი დროიდანაა ცნობილი. ვარაუდობენ, რომ პირველად ეს რიცხვები პითაგორელებმა შემოიღეს (VI საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). შემდგომში არა ერთი და ორი მათემატიკოსი სწავლობდა ამ რიცხვების თვისებებს, ბევრი საინტერესო და ამავე დროს ძნელი თეორემაც კი დაამტკიცეს მათ შესახებ. გაგაცნობთ ერთ მათგანს: **ყოველი ნატურალური რიცხვი არის ჯამი ან არაუმეტეს სამი სამკუთხა რიცხვისა, ან ჯამი არაუმეტეს ოთხი კვადრატული რიცხვისა, ან ჯამი არაუმეტეს ხუთი ხუთკუთხა რიცხვისა და ასე შემდეგ.**

ეს თეორემა დაუმტკიცებლად ჩამოაყალიბა XVII საუკუნის ერთ-ერთმა უდიდესმა მათემატიკოსმა **პიერ ფერმამ.** მან მრავალი მათემატიკოსის ყურადღება მიიპყრო. გულგრილნი არ დარჩენილან მის მიმართ არც მათემატიკის კორიფეები — **ეილერი, ლაგრანჟი, ლეჟანდრი, გაუსი,...** თითოეულმა მათგანმა გარკვეული წვლილი შეიტანა ამ თეორემის დამტკიცებაში, მაგრამ სრული დამტკიცება მხოლოდ XIX საუკუნეში შესძლო გამოჩენილმა ფრანგმა მათემატიკოსმა **ოგიუსტენ კოშიმ.**

რიცხვთა თეორიასა და ალგებრაში მჟღავნდება რიცხვთა სამყაროს იდუმალი რეალობა.

რიხარდ კურანტი

7-ზე გაყოფადობის ნიშანი

ერთხელ, ეს იყო 1977 წლის გაზაფხულზე, „მეცნიერება და ტექნიკა“ ჟურნალის რედაქციიდან დამირეკეს, მთხოვეს — თავისუფალი დრო რომ გექნებათ, შემოიარეთ, წერილი მივიღეთ და იქნებ უპასუხოთო. მეორე დღესვე მივედი. გადმომცეს თერჯოლის რაიონის სოფ. ზედა საზანოს საშუალო სკოლის IX კლასის მოსწავლის გია გიორგაძის წერილი, რომელმაც ჯერ კიდევ წაკითხვამდე სიმპათიით განმაწყო ახალგაზრდა კორესპონდენტისადმი. საქმე ის არის, რომ იგი დაწერილი იყო საოცრად ლამაზი, თითქმის კალიგრაფიული ხელით. ამას განსაკუთრებით იმიტომ აღვნიშნავ, რომ ჩვენი ახალგაზრდები, მით უმეტეს ვაჟები, არავითარ ყურადღებას არ აქცევენ ხელს, ბევრი მათგანის ნაწერი ისეთია, რომ ცოტა ვინმე თუ გაარჩევს... მაგრამ დავუბრუნდეთ გიას წერილს. მისი გაცნობისთანავე დავასკვენი: ამ ახალგაზრდა კალიგრაფისტს მშობლიური ენაც კარგად სცოდნია და მათემატიკაც. მის მიერ წამოჭრილმა საკითხმაც დამაინტერესა...

ორ-სამ დღეში დავწერე გიას წერილის პასუხი, რომელიც ჟურნალმა იმავე წლის ივლისის ნომერში გამოაქვეყნა.

ქვემოთ მომყავს გიას წერილიცა და ჩემი პასუხიც.

პატივცემულო რედაქცია!

როგორც ცნობილია, რიცხვები შედგება ერთეულებისაგან, ათეულებისაგან, ასეულებისაგან და ასე შემდეგ. 7-ზე გაყოფადობის ნიშნის დასადგენად ჯერ ვიპოვოთ 10-ის, 100-ის, 1000-ის, 10000-

ის, **100000**-ისა და **1000000**-ის **7**-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები. ეს ნაშთებია შესაბამისად: **3, 2, 6, 4, 5** და **1**. შემდეგ ნაშთები პერიოდულად მეორდება, ესე იგი **10 000 000**-ის **7**-ზე გაყოფისას ნაშთი **3** მიიღება, **100 000 000**-ის გაყოფისას **2** და ასე შემდეგ.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი რიცხვი, მაგალითად, **243** და დავადგინოთ იყოფა ის **7**-ზე, თუ არა. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ ერთეულების, ათეულების და ასეულების **7**-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთების ჯამი. ერთეულები ნაშთს **3**-ს გვაძლევს, ათეულები — $4\cdot 3$-ს, ესე იგი **12**-ს (რადგან **10** ნაშთს **3**-ს გვაძლევს, მოცემულ რიცხვში კი **4** ათეულია). იგივე მოსაზრების გამო ასეულები ნაშთს $2\cdot 2=4$-ს გვაძლევს. შევკრიბოთ ეს ნაშთები: $3+12+4=19$. ეს რიცხვი **7**-ზე არ იყოფა, მაშასადამე **7**-ზე არ გაიყოფა არც **243**. განვიხილოთ კიდევ მაგალითი. ავიღოთ **6342**. ნაშთების ჯამია $2+4\cdot 3+3\cdot 2+6\cdot 6=56$. რადგან **56** უნაშთოდ იყოფა **7**-ზე, ამიტომ **6342**-იც უნაშთოდ გაიყოფა **7**-ზე. ახლა ავიღოთ უფრო დიდი რიცხვი, მაგალითად, **265481704**. ვიპოვოთ ნაშთების ჯამი. გვაქვს: $4+0\cdot 3+7\cdot 2+1\cdot 6+8\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 1+6\cdot 3+2\cdot 2=103$. იყოფა თუ არა **7**-ზე **103**? ამის დასადგენად შეიძლება იგივე წესი გამოვიყენოთ — ვიპოვოთ ნაშთების ჯამი **103**-ისათვის: $3+0\cdot 3+1\cdot 2=5$. ამრიგად, **103** არ იყოფა **7**-ზე, არც მოცემული რიცხვი გაიყოფა **7**-ზე. იგი ნაშთს **5**-ს მოგვცემს.

როგორც ვხედავთ, **7**-ზე იყოფა მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის ნაშთების ჯამი იყოფა **7**-ზე.

გთხოვთ შეამოწმოთ, სწორია თუ არა გაყოფადობის ეს ნიშანი. თუ სწორია, როგორ შეიძლება მისი დამტკიცება?

გია გიორგაძე

ძვირფასო გია!

თქვენი წერილის გაცნობა ჩემთვის მეტად სასიამოვნო იყო. მისასალმებელია, რომ თქვენ დამოუკიდებლად მიაგენით **7**-ზე გაყოფადობის ნიშანს და აგრეთვე იმ კანონზომიერებასაც, რაც **10**-ის ნატურალური ხარისხების **7**-ზე გაყოფისას გვხვდება. ამასთან, წერილიდან ჩანს, რომ დამტკიცება თქვენს მიერ მიგნებული ფაქტებისა ვერ მოგიხერხებიათ. სიამოვნებით გაგაცნობთ მათ.

დავიწყოთ $10^n (n=1, 2, 3,\ldots)$ სახის რიცხვების **7**-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთებით. როგორც თქვენ თავად აღნიშნავთ **10**, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 რიცხვების **7**-ზე გაყოფის შემდეგ მიღე-

ღებთ ნაშთებს: **3, 2, 6, 4, 5, 1.** მერე ნაშთები პერიოდულად მეორდება. მართლაც, ვთქვათ, $n>6$. მაშინ იგი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $n=6k+m$, სადაც k მთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო m — მთელი არაუარყოფითი რიცხვი, რომელიც **6**-ს არ აღემატება, ესე იგი m არის **0, 1, 2, 3, 4, 5,** ან **6**. გვაქვს:

$$10^n=10^{6k+m}=10^{6k}\cdot 10^m=(10^6)^k\cdot 10^m=(7p+1)^k\cdot 10^m,$$

რადგან 10^6, როგორც ვიცით, **7**-ზე გაყოფისას ნაშთს **1**-ს იძლევა და, მაშასადამე, $10^6=7p+1$ (აქ p მთელი დადებითი რიცხვია). თუ ბინომის ფორმულას მოვიშველიებთ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $(7p+1)^k=7q+1$, ესე იგი, $7p+1$ სახის რიცხვის ნებისმიერი ნატურალური ხარისხი **7**-ზე გაყოფისას ნაშთს კვლავ **1**-ს იძლევა. (სხვათა შორის, ეს ფაქტი შეიძლება დავადგინოთ ბინომის ფორმულის გარეშეც, შემდეგი მარტივი მსჯელობით. $(7p+1)^k$ ხარისხი არის

$$(7p+1)(7p+1)\dots(7p+1)$$

სახის ნამრავლი, სადაც სულ k მამრავლია. მის მოსაძებნად ფრჩხილები უნდა გავხსნათ — ყველანაირი ნამრავლები გამოვთვალოთ და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ. მაგრამ, ცხადია, რომ ყველა ნამრავლი, ერთის გარდა, **7**-ის ჯერადი იქნება, რადგან თითოეულ ამ ნამრავლში ერთხელ მაინც იქნება მამრავლად **7**. ის ერთი კი, მიიღება ყველა ფრჩხილის მეორე წევრების გამრავლებით, რაც **1**-ს უდრის. მაშასადამე, $(7p+1)^k$ იქნება ჯამი **7**-ის ჯერადი რიცხვებისა და **1**-ისა, ანუ $7q+1$ სახის რიცხვი.)

ამრიგად, 10^n-ისათვის გვაქვს:

$$10^n=10^{6k+m}=10^{6k}\cdot 10^m=(7p+1)^k\cdot 10^m=$$
$$=(7q+1)\cdot 10^m=7\cdot 10^m q+10^m=7r+10^m,$$

სადაც $r=10^m q$ მთელი რიცხვია. როგორც ვხედავთ, მივიღეთ ჯამი, რომლის პირველი შესაკრები **7**-ის ჯერადია, ხოლო მეორე 10^m-ს უდრის. ეს კი იმას ნიშნავს, 10^n და 10^m ($m=1, 2, 3, 4, 5, 6$) სახის რიცხვები **7**-ზე გაყოფისას ერთსა და იმავე ნაშთს გვაძლევენ. ეს სწორედ ის არის, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა გადავიდეთ **7**-ზე გაყოფადობის თქვენს მიერ შემოთავაზებული ნიშნის დამტკიცებაზე.

იმის გამო, რომ ნაშთები, როგორც ვნახეთ, პერიოდულად მეორდება, საკმარისია იმ შემთხვევით შემოვიფარგლოთ, როცა გამოსაკვლევი რიცხვი **9999999**-ს არ აღემატება, ესე იგი, როცა ის არა უმეტეს შვიდნიშნაა. თქვენ ალბათ იცით, რომ ყოველი ასეთი A რიცხვი შეიძლება

$$A=10^6a_6+10^5a_5+10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10a_1+a_0$$

სახით წარმოვადგინოთ, სადაც a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, ნაკლები 9-ზე ან ტოლი 9-ისა (სხვანაირად, ეს არის ციფრები, რომელთა მეშვეობით A რიცხვია ჩაწერილი).

რამდენადაც ვიცით, თუ რა ნაშთს გვაძლევს 7-ზე გაყოფისას $10^n (n=1, 2, 3, \ldots, 6)$ სახის რიცხვი, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$10=7b_1+3,\ 10^2=7b_2+2,\ 10^3=7b_3+6,$$

$$10^4=7b_4+4,\ 10^5=7b_5+5,\ 10^6=7b_6+1,$$

სადაც $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_6$ მთელი დადებითი რიცხვებია ($b_1=1$, $b_2=14$ და ასე შემდეგ).

თუ ზემოთ დაწერილი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში $10^n (n=1, 2, 3, \ldots, 6)$ სახის რიცხვების ნაცვლად მათ შესაბამის მნიშვნელობებს შევიტანთ, A-სათვის, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$A=7B+(a_6+5a_5+4a_4+6a_3+2a_2+3a_1+a_0),$$

სადაც B რაღაც მთელი რიცხვია. ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ A რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ გაიყოფა უნაშთოდ 7-ზე, თუკი 7-ზე იყოფა $a_6+5a_5+4a_4+6a_3+2a_2+3a_1+a_0$ რიცხვი, ესე იგი, როგორც თქვენ მას უწოდებთ ნაშთების ჯამი (თუ $a_0 \geqslant 7$, გამოთვლების გამარტივების მიზნით ამ ჯამში მის ნაცვლად $(a_0 - 7)$-ს ავიღებთ).

დასასრულ გეტყვით, რომ ჩვენ არა მარტო 7-ზე გაყოფადობა დავამტკიცეთ, არამედ ისიც ვაჩვენეთ, რომ A რიცხვისა და ნაშთთა ჯამის 7-ზე გაყოფისას ერთი და იგივე ნაშთი მიიღება, რაც თქვენც შეგიმჩნევიათ.

გისურვებთ წარმატებას.

ავთანდილ გენდუქიძე

მინაწერი. პასუხის გაშოქვეყნების შემდეგ გიამ წერილი მომწერა — მთხოვდა დამესახელებინა მისთვის მათემატიკის საკითხებისადმი მიძღვნილი პოპულარული ლიტერატურა. სიამოვნებით შევუსრულე თხოვნა და მალე მივიღე მისგან მეტად თბილი მადლობის წერილი, რომელსაც ჩემს არქივში ვინახავ და ზოგჯერ გადავიკითხავ კიდეც.

ასე, დაუსწრებლად, გავიცანით მე და გიამ ერთმანეთი. ერთი წლის შემდეგ კი შევხვდით — გია, სკოლის დამთავრების შემდეგ უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე ჩაირიცხა. მან ფაკულტეტიც წარმატებით დაამთავრა და ახლა ასპირანტურაში სწავლობს. ვიმედოვნებ, როცა ეს წიგნი გამოვა, გია უკვე მეცნიერებათა კანდიდატი იქნება.

თვლის სისტემების შესახებ

ვინც კი ბოლო წლებში საშემოდგომო არდადეგებზე ბათუმში მოხვედრილა, უთუოდ მიაქცევდა ყურადღებას ჩვენი ქვეყნის სხვადასხვა კუთხიდან ჩამოსულ უამრავ მოსწავლეს. ესენი „მათემატიკის ზეიმის“ მონაწილენი არიან. ამ საინტერესო და ნამდვილად სასარგებლო ღონისძიებას ბათუმის მე-7 საშუალო სკოლის მათემატიკის მასწავლებელმა მედეა ჟღენტმა ჩაუყარა საფუძველი. იგი ახლაც ყოველი „ზეიმის“ უცვლელი ორგანიზატორი, მისი სულის ჩამდგმელია.

ერთ-ერთ ასეთ „ზეიმზე“ გავიცანი ჩემი მოსკოველი კოლეგის შვილი სერიოჟა. ჩვენ მალე დავმეგობრდით, სახელიც „შევუცვალე“ და ქართულ ყაიდაზე სერგოს ვეძახდი. თავისუფალ დროს მე და სერგო სხვადასხვა საინტერესო თემაზე ვსაუბრობდით. სწორედ ერთ-ერთმა ასეთმა საუბარმა მომცა საბაბი გამომექვეყნებინა „კვანტის“ ფურცლებზე ქვემოთ მოყვანილი ორი წერილი.

ძვირფასო სერგო!

გახსოვს ჩვენი შეხვედრები ბათუმში? ერთ დღეს შენ გამომიტყდი, კოსმონავტობას ვაპირებო. ჩემს შენიშვნას, რომ ამისათვის ბეჯითად უნდა ისწავლო, კარგად დაეუფლო ბიოლოგიას, ქიმიას, ფიზიკას, მათემატიკას, შენ მეტად ორიგინალურად უპასუხე — დაიწყე საკუთარი ცოდნის დემონსტრირება. გამოირკვა, რომ მათემატიკა, მართლაც, კარგად გცოდნია, გყვარებია კიდევ. და მაშინ

გადაწყვიტე ხრიკიანი კითხვა დამესვა: „რატომ არის $7+8=15$ ტოლობა სწორი და შეიძლება თუ არა სწორი იყოს $7+8=16$ ტოლობა?“

შენ შეცბი, მგონი დაიბენი კიდეც, მაგრამ მალე გონს მოეგე და საკმაოდ რიხიანად მიპასუხე: „იმიტომ, რომ $7+8=15$, ხოლო $7+8=16$ ტოლობა სწორი არ არის!“ შეგატყვე, რომ ასეთი პასუხით თავადაც არ იყავი კმაყოფილი, მინდოდა კიდეც ამეხსნა ყველაფერი, მაგრამ დრო არ გვქონდა — სახალისო მათემატიკის საღამო იწყებოდა და მაშინ შეგპირდი, — ამ თემაზე წერილს დავწერ-მეთქი „კვანტში“. ვასრულებ ჩემს დაპირებას.

მაშ ასე, პირველი კითხვა.

რატომ არის $7+8=15$ ტოლობა სწორი?

ამ კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, უნდა გავარკვიოთ, რას ვგულისხმობთ, როცა ვწერთ: „15“. ეჭვი არ მეპარება, ძალიან კარგად იცი, თუ რას ნიშნავს ეს: მოცემული ჩანაწერი გვიჩვენებს, რომ ამ რიცხვში 1 ათეული და 5 ერთეული. სხვანაირად, 15 ეს არის $1\cdot10+5\cdot1$ ჯამი. ასევე, 287, მაგალითად, არის $2\cdot100+8\cdot10+7\cdot1$ ჯამი. ამ უკანასკნელს შეიძლება უფრო მოსახერხებელი, თითქოსდა უფრო სიმეტრიული სახე მივცეთ:

$$2\cdot10^2+8\cdot10^1+7\cdot10^0.$$

შენ, რა თქმა უნდა, იცი, რომ ნებისმიერი რიცხვის პირველი ხარისხი თვით ამ რიცხვის ტოლია, ამიტომაც 10-ის ნაცვლად შეგვიძლია 10^1 დავწეროთ. რაც შეეხება უკანასკნელ შესაკრებს, გეტყვი, რომ ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვის ნულოვანი ხარისხი 1-ის ტოლად მიიღება. კერძოდ, $10^0=1$ და ერთიანი შეიძლება 10^0-ით შევცვალოთ. ამ შემთხვევაში ეს მოსახერხებელია.

ამრიგად, გვაქვს:

$$15=1\cdot10^1+5\cdot10^0,$$

$$287=2\cdot10^2+8\cdot10^1+7\cdot10^0.$$

მიაქციე, თუ შეიძლება, ყურადღება მუქად დაბეჭდილი ციფრების თანამიმდევრობას ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში.

აი, კიდევ ორი მაგალითი:

$$1975=1\cdot10^3+9\cdot10^2+7\cdot10^1+5\cdot10^0,$$

$$2904770=2\cdot10^6+9\cdot10^5+0\cdot10^4+4\cdot10^3+7\cdot10^2+$$
$$+7\cdot10^1+0\cdot10^0.$$

შეეცადე ასეთივე სახით ჩაწერო **103009, 222669** და **23456789.**

რიცხვების წარმოდგენა ასეთი ჯამების სახით ნებისმიერი, თუნდაც ძალიან დიდი რიცხვის, სულ ათი — **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** ციფრით ჩაწერის საშუალებას იძლევა. ამასთანავე, როგორც ხედავ, განსაკუთრებულ როლს ასრულებს რიცხვი ათი. ამიტომაც რიცხვთა ჩაწერის ამ სისტემას **ათობითი სისტემა** ჰქვია, ხოლო ათს — სისტემის **ფუძე**. მეორე მნიშვნელოვანი გარემოება რიცხვების ასეთი ჩაწერისას ის არის, რომ ყოველი ციფრის მნიშვნელობა განისაზღვრება არა მხოლოდ ამ ციფრით, არამედ იმ ადგილითაც, იმ **პოზიციით,** რომელიც მას ამ რიცხვის ჩანაწერში უკავია. ავიღოთ, მაგალითად, ორი რიცხვი — **325** და **872.** ორივე ჩანაწერში არის ციფრი **2,** მაგრამ პირველში ის ათეულებს აღნიშნავს, მეორეში — ერთეულებს. ამიტომაც პირველ შემთხვევაში **2** ათჯერ მეტს „ფასობს“, ვიდრე მეორეში. ამის გამო რიცხვების ჩაწერის ასეთ სისტემას **პოზიციურსაც** უწოდებენ.

ამრიგად, რიცხვების ჩაწერისას ჩვენ ვსარგებლობთ **თვლის ათობითი პოზიციური სისტემით.** სწორედ ამიტომაც არის სწორი $7+8=15$ ტოლობა.

გადავიდეთ მეორე კითხვაზე.

შეიძლება თუ არა სწორი იყოს $7+8=16$ ტოლობა?

შენ, ჩემო სერგო, რა თქმა უნდა, კარგად გესმის რომ ათობით სისტემაში ეს ტოლობა არ შეიძლება სწორი იყოს. მაგრამ ათობითი სისტემა ერთადერთი შესაძლო როდია! სულაც არ არის აუცილებელი, რომ სისტემის ფუძე ათს უდრიდეს, ფუძედ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის აღება შეიძლება. განვიხილოთ, მაგალითად, თვლის **შვიდობითი** სისტემა.

შვიდობით სისტემაში ფუძედ აღებულია რიცხვი **შვიდი,** და ამ სისტემაში რიცხვების ჩასაწერად სულ შვიდი ციფრია საკმარისი: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.** თავად რიცხვი შვიდი, ესე იგი, სისტემის ფუძე ჩაიწერება როგორც **10** (ეს დამახასიათებელია ნებისმიერი პოზიციური სისტემისათვის — მასში სისტემის ფუძე ჩაიწერება როგორც **10**). რიცხვი რვა შვიდობით სისტემაში ჩაიწერება ასე: **11,** რადგან $8=1\cdot7^1+1\cdot7^0$, ცხრა ასე: **12,** ათი ასე: **13,** ხოლო თოთხმეტი იქნება: **20.** რიცხვ ორმოცდაცხრას ამ სისტემაში ექნება ასეთი სახე: $100(100=1\cdot7^2+0\cdot7^1+0\cdot7^0)$.

ყველაფერი ეს შეიძლება უცნაურად და ძნელად მოგეჩვენოს, მაგრამ სინამდვილეში აქ არაფერია არაბუნებრივი და ადვილიც კი არის, მთავარია კარგად გავიგოთ ეს თავისებური არითმეტიკა და მივეჩვიოთ მას.

საზოგადოდ, როცა რიცხვებს სხვადასხვა სისტემაში იხილავენ, ყოველ რიცხვთან წერენ ნიშნაკს — იმ სისტემის ფუძეს, რომელშიცაა ეს რიცხვი ჩაწერილი. მაშინ ზემოთ განხილული მაგალითები შესაძლოა ასე ჩავწეროთ:

$$7_{10}=10_7,\ 8_{10}=11_7,\ 9_{10}=12_7,\ 10_{10}=13_7,$$

$$14_{10}=20_7,\ 49_{10}=100_7.$$

ეს ტოლობები შეიძლება ასე წავიკითხოთ: „შვიდი ათობითი არის ათი შვიდობითი“ ან „შვიდი ათობითი ტოლია ათი შვიდობითისა“, „რვა ათობითი არის თერთმეტი შვიდობითი (უდრის თერთმეტ შვიდობითს)“ და ასე შემდეგ.

გთავაზობ სავარჯიშოს: შეამოწმე, რომ

$$2_7+6_7=11_7,\ 4_7+5_7=12_7,\ 11_7+16_7=30_7,$$

$$3_7^2=12_7,\ 4_7\cdot 6_7=33_7,\ 101_7:34_7=2_7$$

ტოლობანი ჭეშმარიტია.

შეეცადე აგრეთვე შეადგინო შვიდობით სისტემაში ერთნიშნა რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები.

ახლა კი გავარკვიოთ, რომელ სისტემაში შეიძლება იყოს სწორი $7+8=16$ ტოლობა.

ალბათ შენ თავად მიხვდი, ჩემო სერგო, რომ სისტემის ფუძე ისეთი რიცხვი უნდა იყოს, რომელიც ექვს ერთეულთან ჯამში თხუთმეტს გვაძლევს. მართლაც, 16_a ხომ $1\cdot a^1+6\cdot a^0$ ჯამს ნიშნავს, ესე იგი

$$16_a=a_{10}+6_{10}.$$

მაგრამ, მეორე მხრივ, ცხადია, რომ

$$7_a+8_a=7_{10}+8_{10}=15_{10}$$

და, მაშასადამე, უნდა გვქონდეს:

$$a_{10}+6_{10}=15_{10}.$$

აქედან უკვე სულ ადვილად ვიპოვით a რიცხვს — იგი **ცხრას** უდრის.

ამრიგად, ჩვენთვის საინტერესო $7+8=16$ ტოლობა სწორია **თვლის ცხრაობით სისტემაში**. სწორედ ეს არის სათაურში დასმული კითხვის პასუხი.

ამით, ძვირფასო სერგო, დღევანდელ წერილს ვამთავრებ. მართალია, სურვილი მქონდა მომეთხრო შენთვის, მრავალმხრივ საინტერესო თვლის ორობით სისტემაზე, მაგრამ, ვფიქრობ, უკეთესი იქნება, თუ ამ საკითხზე შემდეგში ვისაუბრებთ.

გისურვებ წარმატებას! „კვანტის“ ფურცლებზე მომავალ შეხვედრამდე.

ავთანდილ ბენდუქიძე

თუ რაიმე გაუგებარი იქნება, მომწერე, სიამოვნებით გიპასუხებ.

გამარჯობა, ძვირფასო სერგო!

მივიღე შენი წერილი, რომელმაც ძალიან გამახარა. მწერ — წავიკითხე თქვენი წერილი „კვანტში“, ყველაფერი გასაგებიაო, ყველა სავარჯიშოც ამოვხსენიო. ამაში ეჭვის შეტანაც არ შეიძლება, მით უმეტეს, რომ ბოლოში მიგიწერია: „დაწერილია მოსკოვს, **30400** წლის **111** სექტემბერს, შაბათს“. ოჰ, რა ორიგინალური კაცი ხარ, ჩემო სერგო! ცოტა გაუგებარი კი არის; რატომ ჩაწერე წელი და რიცხვი თვლის სხვადასხვა სისტემაში. თუმცა, ამ შემთხვევაში, ეს, რა თქმა უნდა შენი საქმეა.

არ გაინტერესებს, როგორ მივხვდი, როდის მომწერე წერილი? წელი, რომ **1975**-ია, ადვილი მისახვედრია. ჩემი წერილი ხომ „კვანტის“ **1975** წლის აგვისტოს ნომერში დაიბეჭდა, ახლა **1976** წლის თებერვალია, მაშასადამე, პასუხი **1975** წლის სექტემბერში მომწერე. იმის დასადგენად კი, თუ რა სისტემით ისარგებლე, დავწერე $30400_a=1975_{10}$ ან, რაც იგივეა, $a^2(3a^2+4)=1975$ განტოლება. მისი მარჯვენა ნაწილი უნაშთოდ იყოფა **5**-ზე ესე იგი, მარცხენაც უნდა გაიყოს. მაგრამ $3a^2+4$ არც ერთი მთელი a-სათვის არ არის **5**-ის ჯერადი. გამოდის, რომ ასეთი უნდა იყოს a^2, ანუ a. ერთადერთი შესაძლებლობა გვაქვს: $a=5$. რაც შეეხება წერილის დაწერის რიცხვს, აქ არსებითად ვისარგებლე იმით, რომ ვიცოდი კვირის დღე — შაბათი. ჩავიხედე კალენდარში და ვნახე, რომ შაბათი იყო **6, 13, 20** და **27** სექტემბერი. რადგან **111** თვლის საძიებელ სისტემაში სამნიშნა რიცხვია, ამიტომ სისტემის ფუძე არ შეიძლება **4**-ზე მეტი იყოს. ვნახე, რას უდრის 111_2, 111_3, 111_4. მხოლოდ 111_3 არის **13,** სხვა არც ერთი არ არის არც **6,** არც **13,** არც **20** და არც **27.**

ახლა კი გავაგრძელოთ ადრე დაწყებული ჩვენი საუბარი.

1. როგორც შეგპირდი, დღეს ჩვენ უნდა გავეცნოთ **თვლის ორობით სისტემას**. ეს ყველაზე მარტივი თვლის სისტემაა. მასში მხოლოდ ორი ციფრია — 0 და **1**. რიცხვი **2,** ესე იგი, სისტემის ფუძე, ჩაიწერება როგორც 10. შენ ეს, რაღა თქმა უნდა, ძალიან კარგად იცი.

აი, პირველი ათეულის რიცხვები, ჩაწერილი ორობით სისტემაში:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.

ვნახოთ, რა სახე ექნებათ ორობით სისტემაში შეკრებისა და

გამრავლების ცხრილებს, რადგან სულ ორი ციფრი გვაქვს, ამიტომ შეკრების ცხრილი ასეთი იქნება:

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=10.$$

მაგრამ, დამეთანხმები ალბათ, რომ პირველი სამი ტოლობა შეიძლება უკუვაგდოთ — ძალიან კარგად ვიცით, რომ ნულის მიმატება რიცხვს არ ცვლის! დაგვრჩა ერთადერთი

$$1+1=10$$

ტოლობა. მარტივია, არა? გამრავლების ცხრილი კიდევ უფრო მარტივია. მართლაც, იმავე ორი ციფრისთვის გვაქვს:

$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1.$$

არცერთი ამ ტოლობათაგანი საჭირო არ არის — ისედაც ცნობილია, რომ ნულზე გამრავლება ნულს გვაძლევს, ხოლო ერთზე გამრავლება რიცხვს არ ცვლის. გამოდის, რომ ორობით სისტემაში გამრავლების ცხრილი სულაც არა გვაქვს!

არითმეტიკული მოქმედებანი მრავალნიშნა რიცხვებზე ორობით სისტემაში იმავე წესებით სრულდება, რაც ათობით სისტემაში. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

1. შევკრიბოთ 101101_2 და 10100_2. მივუწეროთ ეს რიცხვები ერთმანეთს, თანრიგების დაცვით (სიმარტივისათვის ნიშნაკ 2-ს აღარ დავწერ):

$$\begin{array}{r} 101101 \\ +\ \ 10100 \\ \hline \end{array}$$

ვიწყებთ შეკრებას: $1+0=1$; $0+0=0$; $1+1=10$, 0-ს ვწერთ და 1-ს ვიმახსოვრებთ; დაბოლოს, 1 და კიდევ 1 (დამახსოვრებული რომ გვქონდა), მოგვცემს 10-ს. ამრიგად, საბოლოოდ:

$$\begin{array}{r} 101101 \\ +\ \ 10100 \\ \hline 1000001 \end{array}$$

შევამოწმოთ ჩვენი გამოთვლების სისწორე. ამისათვის მოცემული რიცხვები ათობით სისტემაში ჩავწეროთ:

$$101101_2=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=45_{10},$$
$$10100_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=20_{10}.$$

ამ რიცხვების ჯამია 65. ასეც არის:

$$1000001_2=1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+$$
$$+1\cdot 2^0=65_{10}.$$

2. ახლა **1101**-ისა და **110**-ის ნამრავლი ვიპოვოთ. გვაქვს:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}1101\\110\end{array}\\
\hline
+\begin{array}{r}11010\\1101\end{array}\\
\hline
1001110
\end{array}
$$

მიღებული შედეგისა და აგრეთვე შემდეგი ორი შედეგის სისწორის შემოწმება შენთვის მომინდვია.

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r}111010111\\1100001\end{array}\\
\hline
101110110
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l}1111000\\1010\end{array} & 1010\\
\cline{2-2}
\overline{\quad -\begin{array}{l}1010\\1010\end{array}} & 110\\
\hline
\end{array}
$$

გარდა ამისა, შეასრულე შემდეგი მოქმედებანი და შეამოწმე მიღებული პასუხის სისწორე:

$10101+101$, $111110+1011$, $101101-111$,
$10101\cdot101$, $11011:11$, $1001110001:111101$.

2. როგორც ხედავ, ორობითი სისტემა მართლაცდა მეტად მარტივია. მართალია, ათობითთან შედარებით იგი ერთგვარად მოუხერხებელია — მრავალნიშნა რიცხვები გვხვდება, მაგრამ მას ბევრი უპირატესობაც აქვს. მოგითხრობ მხოლოდ ერთზე.

ვთქვათ, რიცხვების აღსანიშნავად... ხელის თითებით ვსარგებლობთ. ასე იქცევიან, მაგალითად, კალათბურთის მსაჯები, როცა სამდივნოს აჩვენებენ იმ მოთამაშის ნომერს, რომელმაც პერსონალური შენიშვნა მიიღო. მიგიქცევია ყურადღება, როგორ აკეთებს ამას მსაჯი? თუ მოთამაშის ნომერი ათს არ აღემატება, იგი უბრალოდ უჩვენებს თითების სათანადო რაოდენობას, თუკი ნომერი ათზე მეტია, მსაჯი უჩვენებს მუშტად შეკრულ ერთი ხელის თითებს — ეს ათეულია, და უმატებს მეორე თითების სათანადო რაოდენობას — ერთეულებს. ამ წესით მას შეუძლია აჩვენოს ნომრები: **11, 12, 13, 14, 15.** როგორღა მოვიქცეთ, თუ მოთამაშეთა რაოდენობა მეტია?

წარმოვიდგინოთ ერთი წუთით, რომ მსაჯი თვლის ათობითი კი არა, ორობითი სისტემით სარგებლობს. როგორ ფიქრობ, რა რიცხვე-

ბის ჩვენება შეეძლება მას მხოლოდ ერთი ხელის თითებით? ალბათ არ დამიჯერებ, თუ გეტყვი, რომ ამ წესით მას შეუძლია აჩვენოს ნებისმიერი რიცხვი ერთიდან... ოცდათერთმეტამდე ამ უკანასკნელის ჩათვლით! არ გჯერა, ხომ? მიუხედავად ამისა, ეს მაინც ასეა! მართლაც შევთანხმდეთ და მოღუნული თითი ნულად ჩავთვალოთ, გამართული კი — ერთად. მაშინ ჩვენ საშუალება გვექნება ვაჩვენოთ ყველა რიცხვი **00001_2**-დან **11111_2**-მდე. უკანასკნელი კი სწორედ **31_{10}** არის.

დაგიხატავ „ხელის თითებზე ჩაწერილ“ რამდენიმე რიცხვს.

1 **13** **28**

რამდენი რიცხვი შეიძლება „ჩავწეროთ“, თუ ორივე ხელის თითებს მოვიშველიებთ?

3. დასასრულ, ჩემო სერგო, მინდა მოგითხრო ერთი ფოკუსის შესახებ, რომელსაც ბათუმელი მოსწავლეები წარმატებით იყენებენ „მათემატიკური ზეიმის“ დროს.

ავიღოთ რაიმე **15** ობიექტის, მაგალითად, **15** გეომეტრიული ფიგურის სახელწოდებანი და შევადგინოთ მათგან ასეთი ცხრილი:

1. **წერტილი**	6. **კუთხე**	11. **რომბი**
2. **წრფე**	7. **სამკუთხედი**	12. **კვადრატი**
3. **სხივი**	8. **ოთხკუთხედი**	13. **ტრაპეცია**
4. **მონაკვეთი**	9. **პარალელოგრამი**	14. **წრეწირი**
5. **ტეხილი**	10. **მართკუთხედი**	15. **წრე**

ამ ცხრილში დაწერილ გეომეტრიულ ფიგურათა სახელწოდებებისაგან კიდევ შემდეგი ოთხი ცხრილი შევადგინოთ:

1	2	3	4
წერტილი	წრფე	მონაკვეთი	ოთხკუთხედი
სხივი	სხივი	ტეხილი	პარალელოგრამი
ტეხილი	კუთხე	კუთხე	მართკუთხედი
სამკუთხედი	სამკუთხედი	სამკუთხედი	რომბი
პარალელოგრამი	მართკუთხედი	კვადრატი	კვადრატი
რომბი	რომბი	ტრაპეცია	ტრაპეცია
ტრაპეცია	წრეწირი	წრეწირი	წრეწირი
წრე	წრე	წრე	წრე

მეფოკუსე უჩვენებს მაყურებლებს ძირითად ცხრილს და სთხოვს მათ, ჩაიფიქრონ რაიმე ფიგურის სახელწოდება. შემდეგ, დგება ზურგშექცევით **1—4** ცხრილებისაკენ და ეკითხება ერთ-ერთ მაყურებელს, ამ ცხრილებიდან რომელში წერია მის მიერ ჩაფიქრებული ფიგურის სახელწოდება. როცა პასუხს მიიღებს, იგი უმალ ასახელებს ჩაფიქრებულ ფიგურას და იმავე შეკითხვით მიმართავს მეორე მაყურებელს, შემდეგ მესამეს, მეოთხეს, მეხუთეს... ამასთან, პასუხს ყოველთვის უშეცდომოდ იძლევა. მაყურებლები გაკვირვებულნი არიან...

ღირს კია გაკვირვება? მთელი საიდუმლოება ის არის, — თუკი ამას საიდუმლოება შეიძლება დავარქვათ, — რომ მეფოკუსემ იცის რიცხვების ორობითი სისტემიდან ათობითში გადაყვანა. მართლაც, ყოველ ფიგურას თავისი ნომერი აქვს **1**-დან **15**-მდე, ესე იგი, ორობით სისტემაში **1**-დან **1111**-მდე და ეს ფიგურა წერია n-ურ ცხრილში, თუ მის ორობით ნომერში მარჯვნიდან n-ურ ადგილზე ერთიანია, ხოლო არ წერია, თუკი ამ ადგილზე ნულია. მაგალითად, კვადრატი წერია მხოლოდ მე-**3** და მე-**4** ცხრილებში, ამიტომ მისი ნომერი (ორობითი) არის **1100.** რაღა დარჩენია მეფოკუსეს? გადაიყვანოს 1100_2 რიცხვი ათობით სისტემაში, მიიღებს **12**-ს. დახედავს ძირითად ცხრილს და ნახავს, რომ ამ ნომრით ცხრილში კვადრატი წერია...

ამით, ჩემო კარგო, დავამთავროთ საუბარი ორობითი სისტემის შესახებ. თუ რამე დაგაინტერესებს, მომწერე, — სიამოვნებით გიპასუხებ.

გისურვებ წარმატებას! კეთილი სურვილებით

ავთანდილ ბენდუქიძე

რიცხვთა ჯადოსნურ სამყაროში

ჰოლანდიელი მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ინჟინერი სიმონ სტევინი (1548—1620), რომელმაც, სხვათა შორის, პირველმა შემოიღო მათემატიკაში ათწილადები, ამბობდა: „...რიცხვებს შორის ისეთი სრულყოფა და შეთანხმებულობა არსებობს, რომ დღეები და ღამეები უნდა ვიფიქროთ მათ საოცარ კანონზომიერებაზე...“

მართლაცდა, რამდენ საიდუმლოებას ინახავს რიცხვთა სამყარო!.. ზოგჯერ იმდენად საკვირველ რამეს წააწყდები, რომ ეჭვიც კი გეპარება მის ჭეშმარიტებაში... მაგრამ, ხომ გაგიგიათ, — ფაქტი ჯიუტია და მას ვერსად გაექცევიო...

მინდა მკითხველს ზოგიერთი ასეთი „ეჭვმიტანილი“ ფაქტი გავაცნო.

სიმეტრიული ნამრავლები

დახედეთ შემდეგ ტოლობებს:

$$12\cdot 42=24\cdot 21, \qquad (1)$$

$$102\cdot 402=204\cdot 201 \qquad (2)$$

$$1002\cdot 4002=2004\cdot 2001 \qquad (3)$$

$$10002\cdot 40002=20004\cdot 20001 \qquad (4)$$

საოცარია, არა? რა საინტერესო სიმეტრიაა! ვერაფერს ვიტყვით, მართლაც მეტად ორიგინალური „რიცხვითი ტრაპეციაა“, მაგრამ ნუთუ ამ ოთხი ტოლობით ამოიწურა ყველაფერი? საეჭვოა, ასე იყოს — რიცხვებზე დაკვირვება გვაფიქრებინებს, რომ ტოლობათა

ეს რიგი უნდა გაგრძელდეს. მოდით, ყოველი შემთხვევისათვის, შევამოწმოთ სწორია თუ არა მომდევნო, ესე იგი,

$$100002\cdot400002=200004\cdot200001 \tag{5}$$

ტოლობა.

$$100002\cdot400002=40001000004,$$
$$200004\cdot200001=40001000004.$$

ამრიგად, მეხუთე „სიმეტრიული ტოლობაც" გვაქვს. შემდეგი მეექვსე ტოლობაც შევამოწმოთ, თუ... პირდაპირ ზოგადი შემთხვევის დამტკიცება ვცადოთ? ცხადია, უპირატესობა მეორე ვარიანტს უნდა მივანიჭოთ — თუკი მოხერხდა, განა ზოგადი შედეგის მიღება არ ჯობს?!

მაშ, შევუდგეთ საქმეს — ვნახოთ, ჭეშმარიტია თუ არა

$$10...02\cdot40...02=20...04\cdot20...01 \tag{6}$$

ტოლობა, რომლის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში მდგომ თითოეულ მამრავლში ნულების ერთი და იგივე რაოდენობაა, ვთქვათ, $n-1$, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. (თუ $n=1$, მაშინ $n-1=0$ და, მაშასადამე, მამრავლებში არც ერთი ნული არ არის — ეს (1) ტოლობის შესაბამისი შემთხვევაა!)

რა თქმა უნდა, (6) ტოლობის ჭეშმარიტება ან მცდარობა შეიძლება სათანადო ნამრავლთა უშუალო მოძებნით შემოწმდეს — ეს სულაც არ არის ძნელი, მაგრამ უკეთესია, თუ მოცემულ რიცხვებს შემდეგი ჯამების სახით წარმოვადგენთ:

$$10...02=10^n+2,\ 40...02=4\cdot10^n+2,$$
$$20...04=2\cdot10^n+4,\ 20...01=2\cdot10^n+1.$$

ახლა ყველაფერი იმის შემოწმებაზე დაიყვანება, არის თუ არა

$$(10^n+2)(4\cdot10^n+2)=(2\cdot10^n+4)(2\cdot10^n+1) \tag{7}$$

ტოლობა იგივეობა. თუ ეს ასეა, მაშინ სიმეტრიულ ნამრავლთა რიგი უსასრულოდ გრძელდება, თუკი არა, — იძულებულნი ვიქნებით ვაღიაროთ, რომ ეს რიგი სადღაც შეწყდება.

თუმცა, ჩვენი „შეშფოთება" უსაფუძვლოა — (7) ტოლობა იგივეობაა, ესე იგი „სიმეტრიულ" ტოლობათა რიგი უსასრულოა.

მადა ჭამაში მოდისო, — ამბობს ცნობილი ანდაზა. არ შეიძლება ჩვენც მადა არ გაგვეღვიძოს და არ მოვინდომოთ სხვა სიმეტრიულ მამრავლთა აღმოჩენა.

ამ სურვილს შემდეგ ამოცანამდე მივყავართ: ვთქვათ, $\overline{a00...0b}$, $\overline{c00...0d}$, $\overline{d00...0c}$ და $\overline{b00...0a}$ ოთხი $(n+1)$-ნიშნა რიცხვია. როგორ უნდა შეირჩეს a, b, c და d ციფრები, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის გვქონდეს:

$$\overline{a00...0b}\cdot\overline{c00...0d}=\overline{d00...0c}\cdot\overline{b00...0a}\ ? \tag{8}$$

ცხადია, (7) ტოლობის მსგავსად (8) შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$(10^n a+b)(10^n c+d)=(10^n d+c)(10^n b+a) \tag{9}$$

ვნახოთ, როგორი უნდა იყოს a, b, c და d, რომ უკანასკნელი ტოლობა იგივეობად იქცეს. ფრჩხილების გახსნისა და მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ (9) შემდეგ სახეს იღებს:

$$(10^{2n}-1)ac=(10^{2n}-1)bd.$$

რადგან $10^{2n}-1\neq 0$, ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს:

$$ac=bd.$$

სწორედ ესაა საძიებელი თანაფარდობა a, b, c და d რიცხვებს შორის. ზემოთ განხილულ (1)—(6) ტოლობებში გვქონდა: $a=1$, $b=2$, $c=4$, $d=2$ და ეს რიცხვები (10) თანაფარდობას აკმაყოფილებენ. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ოთხი ციფრი შეიძლება სხვანაირადაც შევარჩიოთ. თუ ავიღებთ, მაგალითად, $a=2$, $b=6$, $c=3$, $d=1$, შემდეგ „სიმეტრიულ" ტოლობებს მივიღებთ:

$$26\cdot 31=13\cdot 62,$$
$$206\cdot 301=103\cdot 602,$$
$$2006\cdot 3001=1003\cdot 6002,$$
$$20006\cdot 30001=10003\cdot 60002,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

სხვა სიმეტრიულ მამრავლთა პოვნა მკითხველისთვის მიგვინდვია.

„მდგრადი" კვადრატები

ვინ არ იცის, რომ 121 კვადრატული რიცხვია — იგი ხომ 11-ის კვადრატს უდრის! მაგრამ საინტერესო აქ ის არის, რომ ეს რიცხვი კვადრატულია თვლის არა მარტო ათობით, არამედ ნებისმიერ სხვა სისტემაში, რომლის ფუძე 2-ზე მეტია.

მართლაც, ვთქვათ, თვლის სისტემის ფუძეა a და $a>2$. მაშინ

$$121_a=a^2+2a+1=(a+1)^2, \tag{1}$$

რაც გვიჩვენებს, რომ 121_a არის თვლის სისტემის ფუძეზე 1-ით მეტი რიცხვის კვადრატი. სამობით სისტემაში, მაგალითად, ის 4-ის კვადრატია, ოთხობით სისტემაში 5-ის კვადრატი და ასე შემდეგ. ეს ყველაფერი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$121_3=4^2=16=11_3^2, \qquad 121_7=8^2=64=11_7^2,$$
$$121_4=5^2=25=11_4^2, \qquad 121_8=9^2=81=11_8^2,$$
$$121_5=6^2=36=11_5^2, \qquad 121_9=10^2=100=11_9^2,$$
$$121_6=7^2=49=11_6^2, \qquad 121_{10}=11^2=121=11_{10}^2.$$

საინტერესოა გაირკვეს, 121 ერთადერთი „მდგრადი" კვადრატია, თუ სხვა ასეთი რიცხვებიც არის. შევისწავლოთ ეს საკითხი.

უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ, რომ, როგორიც უნდა იყოს თვლის სისტემის a ფუძე

$10^{2n}_a=(10^n_a)^2$

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

ასე, მაგალითად,

$100_2=4=2^2=10^2_2,\ 100_3=9=3^2=10^2_3,$

$10000_5=625=25^2=100^2_5,\ 10000_6=1296=36^2=100^2_6.$

მაგრამ მკითხველი ალბათ დამეთანხმება, რომ 10^2_a-ის „მდგრადობა“, შეიძლება ითქვას, თავისთავად ცხადია, რის გამო ნაკლებად საინტერესოა. 121-ის შემთხვევა, მაგალითად, გაცილებით საგულისხმოა. ვეძებოთ ამ ტიპის სხვა რიცხვები, თანაც იმ პირობით, რომ თვლის სისტემის ფუძე 3-ია ან 3-ზე მეტი.

რით დავიწყოთ? გავიხსენოთ (1) ტოლობა. მის მარჯვენა ნაწილში ფრჩხილებს შიგნით ფუძეზე 1-ით მეტი რიცხვი წერია. რა იქნება, ფუძეზე კი არა, ფუძის კვადრატზე 1-ით მეტი რიცხვი რომ ავიღოთ? ვნახოთ:

$$(a^2+1)^2=a^4+2a^2+1=10201_a. \tag{2}$$

მეორეს მხრივ, $a^2+1=101_a$ და, მაშასადამე,

$$10201_a=101^2_a. \tag{3}$$

10201-იც „მდგრადი“ კვადრატი ყოფილა!

ახლა $(a^3+1)^2$ ავიღოთ:

$$(a^3+1)^2=a^6+2a^3+1=1002001_a, \tag{4}$$

რაც შეიძლება

$$1002001_a=1001^2_a \tag{5}$$

ტოლობის სახით ჩავწეროთ, კვლავ სასურველი შედეგი!

როგორც ვხედავთ, 121-ის მსგავსად 10201 და 1002001 რიცხვებიც „მდგრადი“ კვადრატებია. მათზე დაკვირვება გვაფიქრებინებს, რომ ასეთივე უნდა იყოს

$$10...020...01$$

რიცხვიც, სადაც ორჯერვე ერთმანეთის მიმდევრობით $n-1$ ნულია. და მართლაც, 2-ზე მეტი ნებისმიერი a-სათვის

$$10...020...01_a=a^{2n}+2a^n+1=(a^n+1)^2,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანია

$$10...020...01_a=10...01^2_a \tag{6}$$

ტოლობა, რომლის მარჯვენა ნაწილშიც მიმდევრობით $n-1$ ნული წერია. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

$10201_5=276=26^2=101^2_5,$

$100020001_3=6624=82^2=10001^2_3,$

$1002001_4=4225=65^2=1001^2_4.$

არსებობს თუ არა სხვა „მდგრადი“ კვადრატები? არსებობს! ასეთებია, მაგალითად, **144** და **441** — შესაბამისად **12**-ისა და **21**-ის კვადრატები. ორივე ეს რიცხვი სრული კვადრატია თვლის ყველა სისტემაში, რომლის ფუძე 4-ზე მეტია. მათი მეშვეობით ამავე თვისებების მქონე სხვა უამრავი კვადრატული რიცხვის მოძებნა შეიძლება. იმედი გვაქვს, მკითხველი ამას თავადაც მოახერხებს.

დასასრულ, გთავაზობთ შემდეგ ამოცანას: დაამტკიცეთ, რომ თვლის ნებისმიერ სისტემაში, რომლის ფუძე **3**-ზე მეტია,

10...030...030...01

რიცხვი, სადაც სამჯერვე ერთმანეთის მიმდევრობით $n-1$ ნულია ($n=1, 2, 3,...$), არის კუბური რიცხვი.

კვადრატში ახარისხების ორიგინალური ხერხი

ნახეთ, რა ორიგინალდ შეიძლება ავახარისხოთ კვადრატში **44, 55, 66**:

$$\begin{array}{ccc} 44^2 & 55^2 & 66^2 \\ \hline 16 & 25 & 36 \\ +1616 & +2525 & +3636 \\ 16 & 25 & 36 \\ \hline 1936 & 3025 & 4356 \end{array}$$

მსგავსადვე მოიძებნება 77^2, 88^2, 99^2. ყველაფერი კი

$$11^2=121=10+101+10$$

ტოლობას ემყარება.

მართლაც, ავიღოთ, მაგალითად, 44^2. გვაქვს:

$$44^2=(4\cdot 11)^2=16\cdot 121=16(10+101+10)=160+$$
$$+1616+160,$$

რაც შეიძლება ზემოთ მოყვანილი პირველი ჩანაწერის სახით წარმოვადგინოთ.

ანალოგიურად, თუ

$$111^2=12321=100+1010+10101+1010+100$$

ტოლობით ვისარგებლებთ, სულ ადვილად დავადგენთ ზოგიერთი

სამნიშნა რიცხვის კვადრატის მოძებნის თავისებურ წესს. განვიხილოთ, მაგალითისათვის, 555^2 და 666^2. გვაქვს:

$$555^2 = 25 \cdot 111^2 = 25(100 + 1010 + 10101 + 1010 + 100) =$$
$$= 2500 + 25250 + 252525 + 25250 + 2500,$$
$$666^2 = 36 \cdot 111^2 = 36(100 + 1010 + 10101 + 1010 + 100) =$$
$$= 3600 + 36360 + 363636 + 36360 + 3600.$$

ამ ტოლობების საფუძველზე ვწერთ:

$$\begin{array}{cc} & 555^2 \\ \hline & 25 \\ & 2525 \\ + & 252525 \\ & 2525 \\ & 25 \\ \hline & 308025 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 666^2 \\ \hline & 36 \\ & 3636 \\ + & 363636 \\ & 3636 \\ & 36 \\ \hline & 443556 \end{array}$$

ეს ორიგინალური ხერხი გამოდგება ამ ტიპის ოთხნიშნა, ხუთნიშნა,... რიცხვების კვადრატების მოსაძებნადაც.

დაუჯერებელია, მაგრამ... ფაქტია,

რომ 101010101 და 110010011 რიცხვების შეფარდების მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ ორივე მათგანში შუა ციფრის, ესე იგი 1-ის ნაცვლად ერთიანების ნებისმიერ კენტ რაოდენობას დავწერთ.

პიერ ფერმა

(1601 – 1665)

ფერმას დიდი თეორემა

ძნელად თუ მოიძებნება მათემატიკური წინადადება, რომელსაც ფართო საზოგადოებრიობის ისეთი ინტერესი გამოეწვიოს, როგორიც თავის დროზე ფერმას ერთმა თეორემამ გამოიწვია. ეს ინტერესი დღესაც არ შენელებულა და ამას ორი მიზეზი აქვს. პირველი ის გახლავთ, რომ თეორემის შინაარსი სულ ელემენტარულია — იგი გასაგებია ყველასათვის, ვისაც ოდნავი წარმოდგენა მაინცა აქვს მათემატიკაზე: არ არსებობს ისეთი სამი მთელი დადებითი რიცხვი, რომ პირველი ორის **2**-ზე მეტი ნატურალური ხარისხების ჯამი მესამის იმავე ხარისხის ტოლი იყოს. რა მარტივი რამ არის, — ვფიქრობთ ჩვენ, — ალბათ დამტკიცებაც სულ ადვილია, იქნებ ვცადოთ? ნურას უკაცრავად! სიადვილეს ვინ ჩივის — თეორემის დამტკიცება ცნობილიც კი არ არის! უფრო ზუსტად: დღემდე ვერავინ შესძლო ხსენებული თეორემის ვერც დამტკიცება და ვერც უარყოფა. სამი საუკუნეა თეორემა „ჰაერშია ჩამოკიდებული" და ეს არის მისი პოპულარობის მეორე მიზეხი. აი, სწორედ ამ თეორემაზეა საუბარი წინამდებარე ნარკვევში.

ვინ არ იცის, რომ თუ x, y და z მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების გამომსახველი რიცხვებია, მაშინ ისინი ერთმანეთთან

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

ტოლობით არიან დაკავშირებულნი? მართლაც, ეს ხომ სხვა არაფერია, თუ არა ყველასათვის კარგად ცნობილი პითაგორას თეორემა: კათეტების კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია!?

შებრუნებით, თუ დადებით x, y და z რიცხვებს შორის (1) თანაფარდობა არსებობს, მაშინ სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეებია x, y და z, მართკუთხაა. ეს უკვე პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემაა.

ამრიგად, (1) განტოლება უშუალოდ არის დაკავშირებული პითაგორას თეორემასა და მის შებრუნებულ თეორემასთან — იგი მათი ალგებრული ეკვივალენტია. ამიტომაც გასაკვირი არ არის, რომ მას ხშირად პითაგორას განტოლებას უწოდებენ, ხოლო მის მთელ დადებით ამონახსნებს — **პითაგორას რიცხვებს** ან **პითაგორას სამეულებს**.

ყველაზე ცნობილი პითაგორას სამეულია (3, 4, 5), რომელიც ეგრეთ წოდებულ ეგვიპტურ სამკუთხედს შეესაბამება. აი კიდევ რამდენიმე პითაგორას სამეული: (15, 8, 17), (5, 12, 13), (21, 20, 29).

ცხადია, თუ (x, y, z) პითაგორას სამეულია, მაშინ ასეთივეა (kx, ky, kz) სამეულიც, სადაც k ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. მაშასადამე, პითაგორას ყოველი სამეული უამრავ სხვა სამეულს წარმოშობს. მაგალითად, (3, 4, 5) სამეულიდან (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20) და კიდევ ბევრი სხვა სამეული მიიღება. სამეულთა ეს უსასრულო სიმრავლე, ძირითადი — (3, 4, 5) სამეულის ჩათვლით, შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$(3k,\ 4k,\ 5k),\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

პითაგორას ესა თუ ის (x, y, z) სამეული გარკვეულ მართკუთხა სამკუთხედს შეესაბამება — სახელდობრ, სამკუთხედს, რომლის კათეტებია x და y, ხოლო ჰიპოტენუზა — z. თუ ამ სამკუთხედში კათეტებს, ასე ვთქვათ, ადგილებს შევუცვლით, სამკუთხედი, რასაკვირველია, არ შეიცვლება, რაც იმას ნიშნავს, რომ (x, y, z) და (y, x, z) სამეულები ერთმანეთისაგან არ უნდა განვასხვავოთ — ეს ერთი და იგივე სამეულებია.

ამრიგად, არსებობს უსასრულო სიმრავლე მთელი დადებითი x, y, z რიცხვებისა, რომლებიც (1) განტოლებას აკმაყოფილებენ. ახლა განვიხილოთ (1)-ის მსგავსი

$$x^3+y^3=z^3$$

განტოლება. ვცადოთ მისი მთელი დადებითი ამონახსნების მოძებნა. ამაოდ დავშვრებით! — ერთი რა არის, ერთ ასეთ ამონახსენსაც ვერ ვიპოვით... არც არის გასაკვირი: განტოლებას საერთოდ არა აქვს მთელი დადებითი ამონახსნები, თუმცა ამის დამტკიცება ადვილი როდია. შედარებით იოლია იმის ჩვენება, რომ ასეთი ამონახსნები არც

$$x^4+y^4=z^4 \tag{2}$$

განტოლებას აქვს.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: აქვს თუ არა მთელი დადებითი ამონახსნები უფრო ზოგად

$$x^n+y^n=z^n \tag{3}$$

განტოლებას?

სწორედ ამ კითხვის პასუხს შეიცავს თეორემა, რომელიც შესავალში ვახსენეთ. მას ფერმას დიდ თეორემას უწოდებენ. იგი შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: **როგორიც უნდა იყოს 2-ზე მეტი ნატურალური n რიცხვი, არ არსებობს მთელ დადებით რიცხვთა ისეთი (x, y, z) სამეული, რომელიც (3) განტოლებას აკმაყოფილებს.**

ქვემოთ მოყვანილია ამ თეორემის დამტკიცება იმ შემთხვევაში, როცა $n=4$. ახლა კი ცოტა რამ ისტორიიდან — გავეცნოთ თეორემის ავტორს და აგრეთვე თვით თეორემასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.

ისტორიული ექსკურსი

მათემატიკის ისტორიაში არა ერთსა და ორ კოლორიტულ და რომანტიკულ პიროვნებას შეხვდებით. ერთ-ერთი მათგანია გენიალური ფრანგი მათემატიკოსი პიერ ფერმა (**P. Fermat, 1601—1665**).

განათლებით იურისტი (მან ტულუზის უნივერსიტეტი დაამთავრა და სიცოცხლის ბოლომდე ამავე ქალაქში მუშაობდა თავისი სპეციალობით) სამუშაოსაგან თავისუფალ მთელ დროს ფერმა თა-

ვისი გატაცების საგანს — მათემატიკას ანღომებდა. ამიტომაც, თუკი ვინმეზე შეიძლება ითქვას მათემატიკის მოყვარულიაო, ეს უპირველესად ფერმაზე უნდა ითქვას. და რაოდენ საოცარია, რომ ეს მოყვარული ტოლს არ უდებდა პროფესიონალებს! ამას ქვემოთ მოყვანილი რამდენიმე ფაქტიც ადასტურებს.

ფერმამ დეკარტზე ადრე შემოიღო კოორდინატები, თანაც მხოლოდ სიბრტყით კი არ შემოისაზღვრა, სივრცის შემთხვევაც განიხილა. მნიშვნელოვანი როლი შეასრულა მან აგრეთვე უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვისთვის საფუძვლის მომზადებაში. მათემატიკის ერთი გამოჩენილი ისტორიკოსი აღნიშნავს, რომ ფერმამ ნიუტონის დაბადებამდე 13, ხოლო ლაიბნიცის დაბადებამდე 17 წლით ადრე გაიაზრა და გამოიყენა კიდეც დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი იდეა. საქმე ის არის, რომ ფერმას მიერ **1629** წელს ჩამოყალიბებულ ერთ წესს, რომელსაც ის წარმატებით იყენებდა ექსტრემუმების მოსაძებნად და მხებების გასავლებად, ბუნებრივად მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე. ამაში მკითხველი თავად დარწმუნდება, როცა გაეცნობა ამ წიგნში მოთავსებულ ნარკვევს: „ექსტრემუმების მოძებნის ფერმას წესი". მეტად საინტერესო, ამავე დროს საგულისხმოა ფერმას მიერ დამუშავებული მეთოდი, რომლის მეშვეობით ხარისხოვანი ფუნქციების გრაფიკებით შემოსაზღვრული ფიგურების ფართობები მოიძებნება: აქ მან მეტად ზოგადი შედეგი მიიღო, რომელიც თანამედროვე აღნიშვნებში ასე ჩაიწერება:

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \ (0 < a < b, \ m \neq -1).$$

ისიც უნდა ვთქვათ, რომ ფერმამ პასკალთან ერთად საფუძველი ჩაუყარა ისეთ მნიშვნელოვან მათემატიკურ მეცნიერებას, როგორიცაა ალბათობის თეორია.

ის შედეგებიც კი, რაც ფერმამ ანალიზურ გეომეტრიაში, უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვასა და ალბათობის თეორიაში მიიღო, საკმარისია, რომ იგი **XVII** საუკუნის პირველი ნახევრის უდიდეს მათემატიკოსად იყოს მიჩნეული. მაგრამ მისი ყველა ეს მიღწევა, შეიძლება ითქვას, ფერმკრთალდება იმ უზარმაზარ წვლილთან შედარებით, რაც მან რიცხვთა თეორიაში შეიტანა. ის მათემატიკის ამ დარგის აღიარებული კლასიკოსია, მის სახელთანაა დაკავშირებული რიცხვთა თეორიის აღმავლობა. ჩამოთვლაც კი ძნელია ყველაფრისა, რაც ფერმამ რიცხვთა თეორიაში გააკეთა... მან უამრავი დებულება გამოთქვა, თანაც ბევრი — დაუმტკიცებლად. მათი უმრავლესობა ფართო მათემატიკური საზოგადოებრიობისათვის მხოლოდ **1670** წელს — ფერმას გარდაცვალებიდან 5 წლის შემდეგ გახდა

ცნობილი, როცა მისმა ვაჟმა გამოსცა დიოფანტეს — III საუკუნის ალექსანდრიელი მათემატიკოსის თხზულება „არითმეტიკა". ამ გამოცემაში მოყვანილი იყო ის შენიშვნებიც, რაც ფერმას დიოფანტეს წიგნის საკუთარი ეგზემპლარის არეებზე გაეკეთებინა. და აი, იქ, სადაც დიოფანტე $x^2+y^2=z^2$ განტოლების მთელ ამონახსნებზე საუბრობს, ფერმას მიუწერია: „პირიქით, არ შეიძლება არც კუბის ორ კუბად დაშლა, არც ბიკვადრატისა ორ ბიკვადრატად და, საზოგადოდ, ორზე მეტი არც ერთი ხარისხისა იმავე მაჩვენებლის ორ ხარისხად. მე აღმოვაჩინე ამის მართლაც საოცრად მშვენიერი დამტკიცება, მაგრამ იგი ამ არეებზე არ დაეტევა". ფერმას პირად არქივში არსად არ აღმოჩნდა ხსენებული დამტკიცება, თუმცა მის ქაღალდებში იპოვეს თეორემის დამტკიცების მონახაზი იმ შემთხვევისათვის, როცა $n=4$. იცოდა თუ არა ფერმამ ზოგადი დამტკიცება, იქნებ მას რაიმე შეეშალა? ღმერთმა უწყის — ფაქტი ის არის, რომ ეს დამტკიცება დღემდე უცნობია...

ფერმას შემდეგ მრავალი მათემატიკოსი, და გაცილებით მეტი არამათემატიკოსი, ცდილობდა დაემტკიცებინა ფერმას თეორემა, მაგრამ... უშედეგოდ. დღესაც არ ვიცით, სწორია თუ არა თავად თეორემა!.. მაგრამ ეს იმას როდი ნიშნავს, რომ თეორემის შესახებ არაფერია ცნობილი. პირიქით, — ძალიან ბევრი რამ ვიცით, მნიშვნელოვანი შედეგებიც კი არის მიღებული. მხოლოდ ერთი რამ ვერ მოხერხდა — თეორემის დამტკიცება ან მისი უარყოფა!..

როგორც ითქვა, ის შემთხვევა, როცა $n=4$, თავად ფერმამ განიხილა, 1770 წელს ეილერმა დაამტკიცა თეორემა იმ შემთხვევისათვის, როცა $n=3$, 1825 წელს დირიხლემ და ლეჟანდრმა — როცა $n=5$. შემდეგ — 1857 წელს გერმანელმა მათემატიკოსმა კუმერმა საგრძნობლად წინ წასწია საქმე — დაამუშავა სპეციალური მეთოდი, რომლის მეშვეობით დამტკიცდა ფერმას დიდი თეორემის ჭეშმარიტება 100-ზე ნაკლები ყველა მარტივი n რიცხვისათვის. დღეისთვის თეორემა დამტკიცებულია n-ის რამდენიმე ათასეული მნიშვნელობისათვის.

პითაგორას სამეულების ზოგადი სახე

დავუბრუნდეთ კვლავ (1) განტოლებას და გამოვიყვანოთ ფორმულები, რომელთა დახმარებით მისი ყველა მთელი ამონახსენი მოიძებნება.

როგორც ვიცით, (x, y, z)-თან ერთად (1) განტოლების ამონახ-

სენია აგრეთვე (kx, ky, kz), სადაც $k=1, 2, 3,\ldots$ მაშასადამე, საკმარისია შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა x, y და z ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვებია. ასეთ ამონახსნებს **ძირითადი ამონახსნები** ვუწოდოთ.

ამრიგად, (x, y, z) სამეულს (1) განტოლების ძირითადი ამონახსენი ეწოდება, თუ x, y, z ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვებია. დავამტკიცოთ, რომ თუ (x, y, z) არის (1) განტოლების ძირითადი ამონახსენი, მაშინ

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2, \tag{4}$$

სადაც m და n ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვებია (ცხადია, $m>n$), რომელთაგან ერთი ლუწია, მეორე — კენტი.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ რადგან x, y და z ურთიერთმარტივია, ამიტომ x და y ორივე ლუწი არ შეიძლება იყოს (მაშინ ხომ z-იც ლუწი აღმოჩნდებოდა!). არც ის შეიძლება, რომ ორივე კენტი იყოს. მართლაც, ეს რომ ასე ყოფილიყო, ესე იგი, რომ ყოფილიყო

$$x=2p+1,\ y=2q+1,$$

მაშინ გვექნებოდა:

$$z^2=x^2+y^2=4(p^2+q^2+p+q)+2.$$

აქედან ჩანს, რომ z^2 და, მაშასადამე, z-იც ლუწია. მაგრამ, თუკი ეს ასეა, z^2 უნაშთოდ უნდა იყოფოდეს 4-ზე. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ z^2-ის 4-ზე გაყოფისას ნაშთი 2 მიიღება.

მაშასადამე, x და y რიცხვებიდან ერთი კენტია, მეორე — ლუწი. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ x კენტია, y — ლუწი. გადავწეროთ (1) განტოლება შემდეგნაირად:

$$y^2=(z+x)(z-x). \tag{5}$$

ვინაიდან x კენტია, y კი — ლუწი, ამიტომ z კენტია, ესე იგი $z+x$ და $z-x$ ლუწი რიცხვებია. აღვნიშნოთ ეს რიცხვები შესაბამისად $2a$-თი და $2b$-თი:

$$z+x=2a,\ z-x=2b. \tag{6}$$

ძნელი მისახვედრი არ არის, რომ a და b ურთიერთმარტივი რიცხვები უნდა იყოს. მართლაც, მათ რომ რაიმე საერთო გამყოფი ჰქონდეთ, იგი x-ისა და z-ის და მათთან ერთად y-ის გამყოფიც იქნებოდა, რაც შეუძლებელია — x, y, z ხომ ურთიერთმარტივია!

ახლა, თუ გავიხსენებთ, რომ y ლუწია და მას $2c$-თი აღვნიშნავთ, (5) და (6) ტოლობების საფუძველზე გვექნება:

$$c^2=ab.$$

როგორც ვხედავთ, ურთიერთმარტივი a და b რიცხვების ნამრავლი ნატურალური c რიცხვის კვადრატს უდრის. ეს კი მხოლოდ

მაშინ შეიძლება მოხდეს, როცა a და b რიცხვები თავადაც სრული კვადრატებია:

$$a=m^2,\ b=n^2.$$

ამასთანავე, ცხადია, m და n ურთიერთმარტივია. მაშასადამე,

$$x=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2$$

და, გარდა ამისა,

$$y=2c=2\sqrt{ab}=2mn,$$

რითაც (4) ტოლობები დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ (4) ფორმულებით (1) განტოლების ძირითადი ამონახსნების გარდა სხვა ამონახსნებიც მიიღება. მაგალითად, თუ $m=3,\ n=1$, მაშინ $x=8,\ y=6,\ z=10$. ეს კი ძირითადი ამონახსენი არ არის! თუ გვინდა მხოლოდ ძირითადი ამონახსნებით შემოვიფარგლოთ, ურთიერთმარტივი m და n რიცხვებთაგან ერთი ლუწი უნდა იყოს, მეორე კენტი.

ფერმას თეორემის დამტკიცება იმ შემთხვევისათვის, როცა $n=4$

ახლა უკვე შეგვიძლია იმის დამტკიცება, რომ ფერმას თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როცა $n=4$, ესე იგი, რომ (2) განტოლებას არა აქვს მთელი დადებითი ამონახსენი. ჩვენ მეტს დავამტკიცებთ, ვაჩვენებთ, რომ

$$x^4+y^4=z^2 \tag{7}$$

განტოლებას არა აქვს მთელი დადებითი ამონახსენი. აქედან, როგორც ადვილი შესამჩნევია, გამომდინარეობს, რომ არც (2) განტოლებას აქვს ასეთი ამონახსენი.

დამტკიცება ჩავატაროთ საწინააღმდეგოს დაშვებით: დავუშვათ, რომ (7) განტოლებას აქვს რაიმე მთელი დადებითი ამონახსენი და ვაჩვენოთ, რომ ამ დაშვებას აბსურდამდე მივყავართ.

მაშ ასე, ვთქვათ, $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ არის (7) განტოლების რომელიმე დადებითი ამონახსენი, ესე იგი,

$$x_1^4+y_1^4=z_1^2.$$

ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_1,\ y_1,\ z_1$ რიცხვები წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივია. მაშინ, თუ უკანასკნელ ტოლობას

$$(x_1^2)^2+(y_1^2)^2=z_1^2$$

სახით წარმოვადგენთ და (4) ფორმულებით ვისარგებლებთ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x_1^2 = m^2 - n^2,\ y_1^2 = 2mn,\ z_1 = m^2 + n^2 \tag{8}$$

სადაც m და n ურთიერთმარტივია. ვაჩვენოთ, რომ ამ რიცხვებიდან პირველი კენტია, მეორე — ლუწი. მართლაც, ჯერ ერთი, ცხადია, ორივე ლუწი ან ორივე კენტი არ შეიძლება იყოს — მაშინ ხომ x_1, y_1, z_1 სამივე ლუწი იქნებოდა, რაც თავიდანვე გამორიცხული გვაქვს! შემდეგ, თუ m ლუწია, ხოლო n — კენტი:

$$m = 2p,\ n = 2q + 1,$$

მაშინ

$$x_1^2 = m^2 - n^2 = 4(p^2 - q^2 - q) - 1, \tag{9}$$

ესე იგი, x_1^2 და, მაშასადამე, x_1-იც კენტია:

$$x_1 = 2r + 1,$$

ამ ტოლობიდან

$$x_1^2 = 4(r^2 + r) + 1.$$

მაშასადამე, x_1^2-ის 4-ზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს ვიღებთ. მაგრამ ეს (9) ტოლობას ეწინააღმდეგება, ვინაიდან უკანასკნელიდან

$$x_1^2 = 4(p^2 - q^2 - q - 1) + 3,$$

რაც გვიჩვენებს, რომ 4-ზე გაყოფისას x_1^2 ნაშთს 1-ს კი არა 3-ს გვაძლევს!

გამოდის, რომ არ შეიძლება m ლუწი იყოს, n კი — კენტი. რადგან არც ის შეიძლება, რომ ორივე ეს რიცხვი ერთდროულად ლუწი ან კენტი იყოს, დარჩა ერთადერთი: m კენტია, n — ლუწი.

ვთქვათ, $n = 2k$. რამდენადაც y_1^2 და, მაშასადამე, y_1-იც ლუწია, ესე იგი $y_1 = 2y_0$, ამიტომ

$$y_1^2 = 4y_0^2 = 2mn = 4mk.$$

როგორც ვხედავთ, mk ნამრავლი სრული კვადრატია. მაგრამ m და k ურთიერთმარტივია (წინააღმდეგ შემთხვევაში არც m და n იქნებოდნენ ურთიერთმარტივი!) და ამიტომ ორივე ეს რიცხვი სრული კვადრატია:

$$m = z_2^2,\ k = k_0^2$$

ამრიგად,

$$x_1^2 = m^2 - n^2 = z_2^4 - 4k_0^4$$

ან, რაც იგივეა,

$$x_1^2 + (2k_0^2)^2 = (z_2^2)^2. \tag{10}$$

მიღებული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ x_1, $2k_0^2$, z_2^2 პითაგორას რიცხვებია. როგორც ვიცით, m და n ურთიერთმარტივია და რადგან $m = z_2^2$, $n = 2k_0^2$, ამიტომ z_2^2 და $2k_0^2$-იც ურთიერთმარტივია. აქედან, (10) ტოლობის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ x_1, $2k_0^2$ და z_2^2

წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ესე იგი $(x_1, 2k_0^2, z_2^2)$ სამეული (1) განტოლების ძირითადი ამონახსენია. თუკი ეს ასეა, მაშინ

$$x_1=m_1^2-n_1^2,\ 2k_0^2=2m_1n_1,\ z_1^2=m_1^2+n_1^2,$$

სადაც m_1 და n_1 ურთიერთმარტივია. რამდენადაც ამ მთელი რიცხვების ნამრავლი k_0^2-ს უდრის, ამიტომ თითოეული მათგანი სრული კვადრატია:

$$m_1=x_2^2,\ n_1=y_2^2.$$

თუ m_1-ისა და n_1-ის ამ მნიშვნელობებს $z_2^2=m_1^2+n_1^2$ განტოლებაში შევიტანთ,

$$x_2^4+y_2^4=z_2^2$$

იგივეობას მივიღებთ. ამასთანავე, ცხადია, რომ x_2, y_2 და z_2 წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივი მთელი დადებითი რიცხვებია.

მაშასადამე, (x_2, y_2, z_2) სამეულის რიცხვები ურთიერთმარტივია და ეს სამეული (7) განტოლების ამონახსენია. ამავე დროს, ვინაიდან

$$z_2=\sqrt{m}\ ,\ z_1=m^2+n^2,$$

ამიტომ $z_2<z_1$.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ (7) განტოლებას წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივ რიცხვთა რაიმე (x_1, y_1, z_1) სამეული აკმაყოფილებს, მას დააკმაყოფილებს ასეთივე რიცხვთა (x_2, y_2, z_2) სამეულიც, ამასთან $z_2<z_1$. ამას უკვე აბსურდამდე მივყავართ!

მართლაც, ანალოგიური მსჯელობით (7) განტოლების ისეთი მთელი დადებითი (x_3, y_3, z_3) ამონახსენი არსებობს, რომ $z_3<z_2$, მერე ისეთი, კვლავ მთელი დადებითი (x_4, y_4, z_4) ამონახსენი, რომ $z_4<z_3$ და ასე შემდეგ. ამრიგად, გვექნებოდა უსასრულო სიმრავლე მთელი დადებითი

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),\dots,(x_n, y_n, z_n),\dots$$

ამონახსნებისა, თანაც ისეთი, რომ

$$z_1>z_2>\dots>z_n>\dots,$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია და z რიცხვების უსასრულოდ შემცირება არ შეიძლება.

მაშასადამე, დაშვებამ, რომ (7) განტოლებას ერთი მთელი დადებითი ამონახსენი მაინცა აქვს, აბსურდამდე მიგვიყვანა. დასკვნა: (7) განტოლებას არც ერთი მთელი დადებითი ამონახსენი არა აქვს, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

უსასრულო დაშვების მეთოდი

ალბათ მკითხველისათვის გასაგებია ძირითადი იდეა, რომელიც ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას უდევს საფუძვლად. ზოგადად იგი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: **იმის დასამტკიცებლად, რომ მოცემულ განტოლებას არა აქვს მთელი დადებითი ამონახსენი, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუკი მას ერთი ასეთი ამონახსენი მაინცა აქვს, მაშინ ექნება სხვა, ამ რიცხვებზე ნაკლები მთელი დადებითი ამონახსენიც**.

დამტკიცების ეს იდეა პირველად ფერმამ გამოიყენა. აი, რას წერს იგი ერთ-ერთ კერძო წერილში: „რამდენადაც ჩვეულებრივი მეთოდები, რომლებიც წიგნებშია გადმოცემული, არ არის საკმარისი ასეთ ძნელ წინადადებათა დასამტკიცებლად, მე მოვნახე სრულიად განსაკუთრებული გზა, რათა ამისათვის მიმეღწია. დამტკიცების ამ ხერხს მე **უსასრულო** ან **განუსაზღვრელი დაშვება** დავარქვი...“

თავად ფერმას უამრავი წინადადება აქვს დამტკიცებული უსასრულო დაშვებით, მათ შორის შემდეგიც: „რომ არსებობდეს მთელგვერდებიანი მართკუთხა სამკუთხედი, რომელსაც კვადრატის ტოლი ფართობი აქვს, მაშინ იარსებებდა მეორე, ნაკლები ფართობის სამკუთხედი, რომელსაც იგივე თვისება ექნებოდა“. სხვანაირად, ფერმა ასაბუთებს, რომ თუ არსებობს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეები მთელი რიცხვებით გამოისახება, ხოლო მისი S ფართობი სრული კვადრატია, მაშინ იარსებებს იმავე თვისებების მქონე მეორე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის S_1 ფართობი S-ზე ნაკლებია. ცხადია, ასეთი სამკუთხედის არსებობის დაშვებას წინააღმდეგობამდე მივყავართ: სამკუთხედების ფართობები სულ უფრო და უფრო მცირე მთელი რიცხვებია, ეს კი შეუძლებელია! სწორედ ამ დებულებიდან გამომდინარეობს ფერმას თეორემის ჭეშმარიტება $n=4$-სათვის.

უსასრულო დაშვების მეთოდი ახლაც წარმატებით გამოიყენება და არა მარტო რიცხვთა თეორიაში.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა, ასე ვთქვათ, უარყოფითი ხასიათისაა: იგი გვიჩვენებს, რომ მთელგვერდიანი მართკუთხა სამკუთხედი, თანაც ისეთი, რომლის ფართობი სრული კვადრატია, არ არსებობს. თავდაპირველად ფერმა თავის მეთოდს მხოლოდ ასეთი შემთხვევებისათვის იყენებდა, მაგრამ შემდგომში შეძლო „მოერგო“ იგი დადებითი ხასიათის წინადადებების დასამტკიცებლად. მაგალითად, ამ მეთოდით მან დაამტკიცა, რომ $4n+1$ სახის ყოველი მარტივი რიცხვი წარმოიდგინება როგორც ჯამი არა უმეტეს ორი კვადრატისა.

აუცილებელი ბოლოთქმა

დიახ, ეს ბოლოთქმა აუცილებელია. აუცილებელი, რადგან ყველას, ვინც კი პირველად გაეცნობა ფერმას თეორემას, მის ეგზოტიკურ ისტორიას, უმალ ებადება კითხვა: ნუთუ მხოლოდ სპორტული ინტერესი ამოძრავებთ მათემატიკოსებს, ზოგჯერ გამოჩენილებსაც კი, როცა ცდილობენ დაამტკიცონ თეორემა, რომელსაც არავითარი პრაქტიკული გამოყენება არა აქვს?

ვერაფერს გეტყვით, ფერმას თეორემა მართლაც რიცხვთა თეორიის ერთი მეტად კონკრეტული საკითხია, მას არც პრაქტიკული გამოყენება აქვს... მეტიც, მისი ჭეშმარიტება ან მცდარობა სრულიადაც არ არის მნიშვნელოვანი მათემატიკის განვითარებისათვის მთლიანად. მაგრამ, ჯერ ერთი, არ უნდა შემოვისაზღვროთ ასეთი წმინდა გამოყენებითი, უტილიტარული თვალსაზრისით. რა ვუყოთ, რომ დღეს ფერმას თეორემას არ იყენებენ, შესაძლოა ხვალ გამოიყენონ კიდეც!? მსგავსი ვითარება არაერთხელ ყოფილა...

მეორეც, და ეს უფრო მნიშვნელოვანია: ფერმას თეორემასთან დაკავშირებულმა კვლევამ მეცნიერები ახალ-ახალ აღმოჩენებამდე მიიყვანა. ზემოთ ნათქვამი იყო, რომ კუმერმა სპეციალური მეთოდი დაამუშავა, რომლის მეშვეობით მოხერხდა თეორემის ჭეშმარიტების დადგენა 100-ზე ნაკლები ყველა მარტივი რიცხვისათვის. კუმერმა არამცთუ მეთოდი დაამუშავა, მთელი თეორია — ალგებრულ რიცხვთა თეორია შექმნა. საზოგადოდ, უნდა გვახსოვდეს, რომ ყოველი მათემატიკური პრობლემა, რაგინდ ელემენტარული შინაარსისა უნდა იყოს ის, იწვევს მისდამი ინტერესს და მისი შესწავლის პროცესში მეცნიერები ახალ-ახალ აღმოჩენებამდე მიდიან, რაც მთლიანობაში ხელს უწყობს მათემატიკის წინსვლას.

დაბოლოს, არც ეს ყბადაღებული სპორტული ინტერესია უგულებელსაყოფი. საქმე ის არის, რომ ყოველი გადაუწყვეტელი, ამოუხსნელი ამოცანა, მიუხედავად იმისა, ადვილია ის თუ ძნელი, აღიზიანებს ადამიანს და ისიც ცდილობს თავისი ძალა, უფრო სწორად — უძლეველობა გამოამჟღავნოს და დაამარცხოს „მტერი"...

კომბინატორიკის ელემენტები

კომბინატორიკა შეისწავლის ეგრეთ წოდებულ კომბინატორულ ამოცანებს. ამ საერთო სახელითაა ცნობილი ამოცანები, სადაც საჭიროა მოცემული საგნებიდან საგნების განლაგებით ან თვით საგნებით განსხვავებული ჯგუფების შედგენა და შემდეგ შესაძლო კომბინაციათა რიცხვის დათვლა.

აი, მაგალითი ასეთი ამოცანისა: ფეხბურთში მსოფლიო პირველობის გათამაშების ნახევარფინალში ოთხი გუნდი გავიდა — a და b ერთ ნახევარფინალში, c და d — მეორეში. მათ შორის ადგილების განაწილების სულ რამდენი ვარიანტი არსებობს?

ამ ამოცანის ამოხსნა ძნელი არ არის. მართლაც, თუ პირველ ადგილზე a გუნდი გავიდა, მაშინ ადგილების განაწილების შემდეგი ოთხი შესაძლო ვარიანტი წარმოგვიდგება:

$a, c, b, d; \quad a, c, d, b; \quad a, d, b, c; \quad a, d, c, b.$

ასევე ოთხ-ოთხი ვარიანტი იქნება b, c ან d გუნდის პირველ ადგილზე გასვლის შემთხვევაში. ამრიგად, სულ ადგილების განაწილების თექვსმეტი ვარიანტია.

კომბინატორულ ამოცანებში ძირითადად საგანთა სასრული რაოდენობა ან, როგორც ამბობენ ხოლმე, სასრული სიმრავლეები გვხვდება. ასეთი სიმრავლეების შესწავლა კომბინატორული ამოცანების ამოხსნისათვის ზოგად მეთოდებსა და მზა ფორმულებს გვაძლევს. ქვემოთ ჩვენ გავეცნობით კომბინატორიკის სამ ძირითად ფორმულას. რამდენადაც ეს ფორმულები, როგორც აღვნიშნე, სასრულ სიმრავლეებთანაა დაკავშირებული, მიზანშეწონილია, თხრობა ისე წარვმართოთ, რომ პარალელურად სიმრავლეთა თეორიის უმარტივეს ცნებებსაც გავეცნოთ.

სიმრავლეები

ხშირად ვამბობთ: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე, განტოლების ფესვთა სიმრავლე, წერტილთა სიმრავლე და ასე შემდეგ. ამასთანავე, ყველას კარგად გვესმის, მაგალითად, რომ სიტყვათა წყობა „ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე" გულისხმობს ყველა ნატურალურ რიცხვს ერთად აღებულს, ეს სამი სიტყვა თითქოს ერთიანად წარმოგვიდგენს 1, 2, 3, 4, 5,... რიცხვებს. ასევე, როცა ვამბობთ — „$x^2-7x+6=0$ განტოლების ფესვთა სიმრავლე", ვგულისხმობთ ორ რიცხვს, სახელდობრ 1-სა და 6-ს, ვინაიდან მხოლოდ ეს რიცხვებია ამ განტოლების ფესვები. სრულიად გარკვეული აზრი აქვს აგრეთვე შემდეგ წინადადებას: „წრეწირი არის სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან." მართლაც, ამ წინადადებით ნათქვამია, რომ წრეწირი არის სიბრტყის ყველა ის წერტილი ერთად აღებული, რომელიც მოცემული წერტილიდან გარკვეული მანძილით არის დაშორებული.

მსგავსი მაგალითების მოყვანა მრავლად შეიძლება და ყველა მათგანში „სიმრავლე" სიტყვას ყველასთვის გასაგები, გარკვეული აზრი აქვს. ბუნებრივად ისმის კითხვა: რა არის, საზოგადოდ, სიმრავლე? გავარკვიოთ ეს საკითხი.

სიმრავლე მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. ის იმდენად ზოგადი და პირველადია, რომ მისი განსაზღვრა სხვა, უფრო მარტივი ცნებებით შეუძლებელია. ამ ცნების შინაარსის გარკვევა მხოლოდ მაგალითებით ხერხდება. ასე, მაგალითად, შეიძლება საუბარი რომელიღაც კლასის მოსწავლეთა სიმრავლეზე, ამა თუ იმ ქალაქის მცხოვრებთა სიმრავლეზე, წიგნის მოცემულ გვერდზე დაბეჭდილ სასტამბო ნიშანთა სიმრავლეზე, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლეზე, კოსმონავტების სიმრავლეზე და სხვა.

„სიმრავლე" სიტყვას არაერთი სინონიმი აქვს როგორც ქართულ, ისე უცხოურ ენებზე და ამ სინონიმებით, შეიძლება ითქვას, ყოველ ნაბიჯზე ვსარგებლობთ. მაგალითად, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლის ნაცვლად ვამბობთ ქართული ანბანი, ან ქართული ალფაბეტი, განტოლებათა სიმრავლის ნაცვლად — განტოლებათა სისტემა, ცხენების სიმრავლის ნაცვლად — ცხენის ჯოგი, ცხვრების სიმრავლის ნაცვლად — ცხვრის ფარა და ასე შემდეგ. ცხადია, რომ ანბანი, ალფაბეტი, სისტემა, ჯოგი, ფარა — ყველა ეს სიტყვა სიმრავლის სინონიმია. ასეთივე სინონიმებია გაერთიანება, ერთობლიობა, გროვა, ჯგუფი, კლასი, კომპლექსი და მრავალი სხვა.

მოყვანილი მაგალითებიდან ჩანს, რომ სიმრავლის ქვეშ გარკვეული საგნების, ანუ ობიექტების გაერთიანება იგულისხმება და გაერთიანების სწორედ ეს აქტია მნიშვნელოვანი: სიმრავლე განიხილება როგორც ერთიანი, მთლიანი რამ. ამას, თითოეულ კონკრეტულ შემთხვევაში ყველანი ვხვდებით და ვგრძნობთ კიდეც. მაგალითად, როცა ვამბობთ — „ქართული ანბანი", ვგულისხმობთ ყველა ქართულ ასოს ანიდან ჰაემდე ერთად და არა ცალკე ანს, ცალკე ბანს, ცალკე განს და ასე შემდეგ. ასევე, თუ ვინმემ გვითხრა, მაგალითად, „IX[1] კლასი მოწინავეაო", ჩვენ ამას ისე კი არ გავიგებთ, თითქოს ამ კლასის ყველა ცალკეული მოსწავლე ყოფილიყოს მოწინავე, არამედ უცბად წარმოვიდგენთ მთელ კლასს, რომელიც გამოირჩევა სწავლითაც, დისციპლინითაც, საზოგადოებრივი მუშაობითაც... ის, რომ სიმრავლე ერთიანი რაღაც არის, ძალიან კარგად ჩანს გეომეტრიული ფიგურების განხილვისას. რა არის გეომეტრიული ფიგურა? ეს არის წერტილთა სიმრავლე! მაგრამ წრეწირს, მაგალითად, განა ვინმე აღიქვამს როგორც მოცემული წერტილიდან მოცემული მანძილით დაშორებულ ცალკეულ წერტილს? არავითარ შემთხვევაში! თითოეული ჩვენგანისათვის, ასე ვთქვათ, უთქმელადაც გასაგებია, რომ წრეწირი არის ხსენებული თვისების მქონე ყველა წერტილი ერთად. სიმრავლეთა თეორიის შემქმნელმა გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა (1845—1918) ის გარემოება, რომ სიმრავლე არის ერთიანი რამ, შემდეგნაირად გამოთქვა: „სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ".

საგნებს, რომელთაგან მოცემული სიმრავლე შედგება, მისი **ელემენტები** ეწოდება. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტები ნატურალური რიცხვებია:

1, 2, 3, 4, 5,...,

ქართული ანბანისა — ქართული ასოები:

ა, ბ, გ, დ, ე,...,ჰ.

გასაგებია, რომ პირველი ამ სიმრავლეებიდან უსასრულოა — იგი ელემენტთა უსასრულო რაოდენობას შეიცავს, მეორე სასრული — მასში სულ 33 ელემენტია.

ვთქვათ, E მოცემული სიმრავლეა, ხოლო a — რაიმე საგანი. თუ a არის E სიმრავლის ელემენტი, მაშინ ვწერთ:

$$a \in E$$

(იკითხება: „a ეკუთვნის E-ს"). თუ a არ არის E-ს ელემენტი, ვწერთ:

$$a \notin E$$

(იკითხება: „a არ ეკუთვნის E-ს“). მაგალითად; თუ N-ით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა აღნიშნული, Z-ით კი — მთელ რიცხვთა სიმრავლე, მაშინ:

$$5 \in N,\ 5 \in Z,\ -10 \notin N,\ -10 \in Z,\ 0{,}3 \notin N,\ 0{,}3 \notin Z.$$

თუ E სიმრავლე a, b, c,... ელემენტებისაგან შედგება, მაშინ ვწერთ:

$$E = \{a,\ b,\ c, \ldots\}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფიგურული ფრჩხილები გაერთიანების იმ აქტზე მიუთითებს, ზემოთ რომ გვქონდა საუბარი, ტოლობის ნიშანი კი იმაზე, რომ E და $\{a,\ b,\ c, \ldots\}$ სიმრავლეები თანატოლია. საზოგადოდ; ორი A და B სიმრავლე თანატოლია, თუკი ისინი ერთი და იგივე ელემენტებისაგან შედგებიან. ეს იმას ნიშნავს, რომ, როგორიც უნდა იყოს a, თუ ის ეკუთვნის A-ს, ეკუთვნის B-საც და, როგორიც უნდა იყოს b, თუკი ის ეკუთვნის B-ს, ეკუთვნის A-საც.

ყველა დამეთანხმება, რომ „სიმრავლე“ სიტყვა ჩვენდა უნებურად მრავლის ასოციაციას იწვევს — იგი ხომ ამ სიტყვისგან არის ნაწარმოები! ამიტომაც იქმნება შთაბეჭდილება, რომ სიმრავლე აუცილებლად ბევრ ელემენტს უნდა შეიცავდეს. მაგრამ ეს ასე არ არის, — სიმრავლეში შესაძლოა ცოტა ელემენტიც იყოს. მათი რაოდენობა შეიძლება უდრიდეს, მაგალითად, 2-ს, 1-ს და... თქვენ წარმოიდგინეთ, 0-საც კი! მართლაც, ვთქვათ, A, B, C შესაბამისად

$$x^2 - 6x + 5 = 0,\ x^2 - 6x + 9 = 0,\ x^2 - 6x + 13 = 0$$

განტოლებათა ფესვების სიმრავლეებია (ვიხილავთ მხოლოდ ნამდვილ ფესვებს). ცხადია, რომ

$$A = \{2,\ 3\}, \quad B = \{3\},$$

ხოლო რაც შეეხება C-ს, მასში არც ერთი ელემენტი არ არის, რადგან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში სათანადო განტოლებას ამონახსენი არა აქვს. როგორც ვხედავთ, A ორელემენტიანი სიმრავლეა, B ერთელემენტიანი, C კი — უელემენტო... თურმე ასეთი სიმრავლეების განხილვაც არის საჭირო.

სიმრავლეს, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს, ცარიელი ეწოდება. ცარიელი სიმრავლე $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცარიელი სიმრავლის შემოღება მეტად მოსახერხებელია და ამაში მკითხველი ქვემოთ დარწმუნდება. ახლა კი ვიტყვი, რომ სიმრავლე, საზოგადოდ, წარმოდგენილი გვაქვს როგორც გარკვეული თვისების მქონე საგნების გაერთიანება. მაგრამ არ არის გამორიცხული, რომ სასურველი თვისების საგანი სულაც არ არსებობდეს! მაშინ სიმრავლე ცარიელი იქნება...

სიმრავლის დალაგება. გადანაცვლებანი

როგორც ითქვა, სიმრავლე შეიძლება სასრული იყოს, შეიძლება — უსასრულო. შემდეგში მხოლოდ სასრულ სიმრავლეებს განვიხილავთ და ჩვენთვის არსებითი მნიშვნელობა ექნება სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას (და არა თვით ელემენტთა ბუნებას!). ამიტომაც შევთანხმდეთ: თუ სიმრავლე აღნიშნული იქნება ერთი ასოთი (ასეთებად კი ლათინური ანბანის მთავრულ ასოებს ვიხმართ), მაშინ ამ ასოს სიმრავლის ელემენტების რაოდენობის აღმნიშვნელი ნიშნაკიც მივუწეროთ. ამრიგად,

A_n, B_n, C_n,...

n-ელემენტიანი სიმრავლეებია (n შეიძლება ნულიც იყოს — მაშინ სიმრავლე ცარიელია).

ზემოთ სიმრავლეთა ტოლობა განვსაზღვრეთ, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სიმრავლეში ელემენტთა რიგს მნიშვნელობა არა აქვს — მთავარია თვით ელემენტები და არა მათი რიგი. მაგალითად, როგორიც უნდა იყოს ოთხი — a, b, c, d საგანი,

$A_4=\{a, b, c, d\}$, $\quad B_4=\{a, b, d, c\}$, $\quad C_4=\{d, c, b, a\}$

სამი სხვადასხვა სიმრავლე კი არ არის, ეს ერთი და იგივე სიმრავლეა, ესე იგი,

$A_4=B_4=C_4$.

ამასთანავე, ზოგჯერ საჭირო ხდება ეგრეთ წოდებული დალაგებული სიმრავლეების განხილვა. მაშინ მხედველობაში მიიღება არა მარტო თავად ელემენტები, არამედ მათი რიგიც. დავაზუსტოთ დალაგებული სიმრავლის ცნება.

სასრულ სიმრავლეს დალაგებული ეწოდება, თუ მასში გარკვეული რიგია დამყარებული — რომელიღაც ელემენტს უკავია პირველი ადგილი, მას მოსდევს მეორე ელემენტი, მეორეს — მესამე და ასე შემდეგ. სხვანაირად, n-ელემენტიანი სიმრავლე დალაგებულია, თუ მისი ელემენტები რაიმე წესით გადანომრილია

$1, 2, 3, .., n$

რიცხვებით.

ბუნებრივია, რომ დალაგებული სიმრავლეების განხილვისას, თანატოლად მხოლოდ ისეთი სიმრავლეები მიიღება, რომლებიც არა მარტო ერთსა და იმავე ელემენტებისაგან შედგებიან, არამედ ერთნაირადაც არიან დალაგებულნი. ამ თვალსაზრისით, ცხადია, რომ ზემოთ მოყვანილი სამი — A_4, B_4, C_4 სიმრავლე წყვილ-წყვილად განსხვავებულია.

ერთი და იგივე სიმრავლე, თუკი ის ცარიელი ან ერთელემენტიანი არ არის, შეიძლება სხვადასხვა წესით დავალაგოთ. მაგალითად, ამა თუ იმ კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე საკლასო ჟურნალში ერთი წესით — ანბანის მიხედვით არის დალაგებული, ფიზკულტურის გაკვეთილზე სხვა წესით — სიმაღლის მიხედვით. შეიძლება იმავე სიმრავლის დალაგების სხვა წესებიც მოვიგონოთ (მაგალითად, ასაკის მიხედვით, წონის მიხედვით და მრავალი სხვა).

რამდენი სხვადასხვა წესით შეიძლება n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგება? სანამ ამ კითხვაზე პასუხს გავცემდეთ, შემოვიღოთ ერთი აღნიშვნა, რომლითაც შემდეგშიც ვისარგებლებთ, და აგრეთვე ერთი განსაზღვრება.

ვთქვათ, n რაიმე ნატურალური რიცხვია, მეტი 1-ზე. ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან n-მდე ამ უკანასკნელის ჩათვლით, მოკლედ $n!$ სიმბოლოთი აღინიშნება (იკითხება: „n-ფაქტორიალი“). ამრიგად, თუ $n>1$, მაშინ

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n.$$

რას უდრის $n!$ თუ $n=1$? უკანასკნელი ტოლობა $n!$-ისათვის გვიჩვენებს, რომ ბუნებრივია მივიღოთ: $1!=1$. ფორმულების ზოგადობის შესანარჩუნებლად მიზანშეწონილია განვსაზღვროთ 0-ის ფაქტორიალიც, სახელდობრ, ისიც 1-ის ტოლად ჩავთვალოთ. მაშასადამე, საბოლოოდ შეიძლება დავწეროთ:

$$0!=1,\ 1!=1,\ n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\ (n=2,\ 3,\ 4,\ldots).$$

განსაზღვრება. n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგებებს n-ელემენტიანი გადანაცვლებები ეწოდება და მათი რაოდენობა P_n-ით აღინიშნება (იკითხება: „პე ენიდან“).

ამრიგად, P_n რიცხვი გვიჩვენებს, თუ რამდენი სხვადასხვა წესით შეიძლება n-ელემენტიანი სიმრავლის დალაგება.

ავიღოთ, მაგალითად, სამელემენტიანი $\{a, b, c\}$ სიმრავლე. ის შეიძლება დავალაგოთ 6 სხვადასხვა წესით, ანუ მისი ელემენტებისაგან 6 გადანაცვლება შევადგინოთ:

$$a, b, c;\quad a, c, b;\quad b, a, c;\quad b, c, a;\quad c, a, b;\quad c, b, a.$$

როგორც ვხედავთ, $P_3=6$. (შევნიშნავ, რომ გადანაცვლების დაწერისას, სიმრავლის აღმნიშვნელ ფრჩხილებს, როგორც წესი, არ წერენ. ჩვენც ასე მოვიქეცით.)

საინტერესოა, რას უდრის P_4? მას შემდეგ, რაც ვიცით, რომ $P_3=6$, P_4-ს სულ ადვილად ვიპოვით. მართლაც, ავიღოთ

$$A_4=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

სიმრავლე და წარმოვიდგინოთ, რომ მას პირველი ელემენტი ჩამოვაცილეთ. დაგვრჩება სამი — b, c და d. მათგან, როგორც ვიცით,

სულ ექვსი გადანაცვლება შედგება. თითოეულ ამ გადანაცვლებას წინ a მივუწეროთ. მივიღებთ იმ ოთხელემენტიან გადანაცვლებებს, რომელთა პირველი წევრია a. ამრიგად, იმ ოთხელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომელთა პირველი წევრია a, ზუსტად 6-ს უდრის. ცხადია, ამდენივე გადანაცვლების პირველი ელემენტი იქნება b, შემდეგ c და ბოლოს d. მაშასადამე,

$P_4=4P_3=24.$

ასევე შეიძლება გამოვთვალოთ P_5, P_6, P_7,... ჩვენ გამოვიყვანთ ზოგად ფორმულას ნებისმიერი n-ისათვის.

ამისათვის, წინასწარ შევნიშნოთ, რომ $P_0=P_1=1$ (ცარიელი და ერთელემენტიანი სიმრავლეები მხოლოდ ერთი წესით შეიძლება დავალაგოთ — ისინი თავისთავად დალაგებულია!), რაც უკვე მიღებულ შედეგებთან ერთად შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$P_1=1P_0$, $P_2=2P_1$, $P_3=3P_2$, $P_4=4P_3$. (1)

სხვანაირად,

$P_0=0!$, $P_1=1!$, $P_2=2!$, $P_3=3!$, $P_4=4!$

ეს ტოლობები გვაფიქრებინებს, რომ n-ელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა $n!$-ის ტოლია, ესე იგი,

$$P_n=n! \qquad (P)$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მართლაც ასეა. წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ (1) ტოლობათა მსგავსად, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$P_n=nP_{n-1}$ (2)

ვიმსჯელოთ ისევე, როგორც ზემოთ — ოთხელემენტიან გადანაცვლებათა შემთხვევაში. ავიღოთ n-ელემენტიანი

$A_n=\{a_1, a_2,...,a_n\}$

სიმრავლე და გამოვყოთ მისგან რომელიმე ელემენტი, ვთქვათ, a_1. რა თქმა უნდა, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $n>1$, რადგან 1-სათვის (2) ტოლობა რომ სწორია, უკვე ვიცით. ამიტომ a_1-ის გამოყოფის შემდეგ სიმრავლეში კიდევ დარჩება ელემენტები. მათი რაოდენობა იქნება $n-1$. განვიხილოთ მათგან შედგენილი ყველა გადანაცვლება, რომელთა რიცხვი, ცხადია, P_{n-1} არის. ახლა, თუ თითოეულ ამ გადანაცვლებას წინ გამოყოფილ a_1 ელემენტს მივუწერთ, მივიღებთ A_n სიმრავლის ელემენტების იმ გადანაცვლებებს, რომლებიც a_1 ელემენტით იწყება. მათი რიცხვიც P_{n-1}-ია. ამრიგად, a_1, a_2,...,a_n ელემენტების იმ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომლებიც a_1-ით იწყება, არის P_{n-1}. ამდენივე იქნება a_2-ით,

a_3-ით,..., a_n-ით დაწყებული გადანაცვლებები, თანაც ყველა ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. რადგან A_n სიმრავლეში n ელემენტია, ამიტომ ასეთი სულ nP_{n-1} გადანაცვლებაა. მაგრამ ეს რიცხვი ხომ P_n-ით გვაქვს აღნიშნული! მაშასადამე,

$$P_n = nP_{n-1},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა (P) ფორმულის მიღება სულ ადვილია — ამისათვის საკმარისია გადავამრავლოთ

$$P_1 = 1,\ P_2 = 2P_1,\ P_3 = 3P_2, \ldots,\ P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},\ P_n = nP_{n-1}$$

ტოლობები და მიღებული ტოლობა $P_1P_2P_3 \ldots P_{n-1}$ ნამრავლზე შევკვეცოთ (ცხადია, არც ერთი P_k ნული არ არის!).

ამოცანა. მოსწავლეთა მათემატიკურ ოლიმპიადაში გამარჯვებული 5 მოსწავლის დასაჯილდოებლად 5 სხვადასხვა წიგნია შეძენილი. გამარჯვებულთა შორის ამ წიგნების განაწილების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

ცხადია, წიგნების განაწილების იმდენი ვარიანტია, რასაც უდრის ხუთელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა. (ეს უფრო ნათელი გახდება, თუ წარმოვიდგენთ, რომ მოსწავლეთა სიმრავლე დალაგებულია რაიმე წესით და დაჯილდოება ამ რიგით წარმოებს.) ამრიგად, განაწილების

$$P_5 = 5! = 120$$

შემთხვევაა შესაძლებელი.

აღსანიშნავია, რომ 5 კი არა, არამედ 10 წიგნი რომ ყოფილიყო გასანაწილებელი 10 მოსწავლეს შორის, შემთხვევათა რაოდენობა საგრძნობლად გაიზრდებოდა. სახელდობრ, იგი 3628800-ის ტოლი იქნებოდა. საერთოდ, n-ის ზრდასთან ერთად $n!$ ძალიან სწრაფად, პირდაპირ ფანტასტიკურად იზრდება.

ქვესიმრავლეები. ჯუფთებები

მოცემული სიმრავლიდან შეიძლება ერთი ან ერთზე მეტი ელემენტი გამოვყოთ და მათგან შედგენილი ახალი სიმრავლე განვიხილოთ. მაგალითად, რომელიმე კლასის მოსწავლეთა სიმრავლიდან შეიძლება გამოვყოთ ამ კლასის ხუთოსანთა სიმრავლე, კომკავშირელთა სიმრავლე, სპორტსმენთა სიმრავლე და მრავალი სხვა. თითოეული მათგანი არის კლასის მოსწავლეთა სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე.

საზოგადოდ, A სიმრავლეს B-ს **ქვესიმრავლე** ეწოდება, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლესაც ეკუთვნის.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეა.

თუ დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ ქვესიმრავლის მოყვანილი განსაზღვრება ტოლფასია შემდეგისა: A სიმრავლეს B-ს ქვესიმრავლე ეწოდება, თუ არ არსებობს ელემენტი, რომელიც B-ს არ ეკუთვნის, A-ს კი ეკუთვნის. და ვინაიდან, როგორიც უნდა იყოს B, არ არსებობს ელემენტი, რომელიც მას არ ეკუთვნის და ცარიელ სიმრავლეს ეკუთვნის, ამიტომ ეს უკანასკნელი B-ს ქვესიმრავლეა.

მაშასადამე, ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა.

ეს, სხვათა შორის, სრულიად ბუნებრივია. მაგალითად, ზემოთ ვთქვით, რომ მოცემული კლასის ხუთოსან მოსწავლეთა სიმრავლე არის კლასის მოსწავლეთა სიმრავლის ქვესიმრავლე. მაგრამ, განა არ შეიძლება, კლასში არც ერთი ხუთოსანი არ იყოს, ესე იგი, ხუთოსანთა სიმრავლე ცარიელი იყოს?!

ჩვენი უახლოესი ამოცანაა გარკვევა იმისა, თუ რამდენი ქვესიმრავლე აქვს ამა თუ იმ სიმრავლეს. შევისწავლოთ ეს საკითხი.

ცხადია, რომ ცარიელ სიმრავლეს მხოლოდ ერთი ქვესიმრავლე აქვს — ცარიელი სიმრავლე. ერთელემენტიან სიმრავლეს ორი ქვესიმრავლე აქვს — ცარიელი სიმრავლე და თავად მოცემული სიმრავლე. ორელემენტიან $\{a, b\}$ სიმრავლეს უკვე ოთხი ქვესიმრავლე აქვს:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\},$$

სამელემენტიან $\{a, b, c\}$ სიმრავლეს — რვა:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

ამრიგად, თუ E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რიცხვს $p(E)$-თი აღვნიშნავთ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$p(A_0)=1, \; p(A_1)=2, \; p(A_2)=4, \; p(A_3)=8.$$

ამ ტოლობებზე დაკვირვება საფუძველს გვაძლევს ვივარაუდოთ, რომ, როგორიც უნდა იყოს არაუარყოფითი მთელი n რიცხვი,

$$p(A_n)=2^n. \tag{3}$$

და ეს მართლაც ასეა. ამის დასამტკიცებლად იმის მსგავსად ვიმსჯელოთ, როგორც ზემოთ — (P) ფორმულის დამტკიცებისას,

სახელდობრ, ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$p(A_n)=2p(A_{n-1}). \tag{4}$$

ავიღოთ ნებისმიერი n-ელემენტიანი

$$A_n=\{a_1,\ a_2,\dots,a_n\}$$

სიმრავლე და ჩამოვაშოროთ მას რომელიმე ელემენტი, მაგალითად, a_n. მივიღებთ $(n-1)$-ელემენტიან

$$A_{n-1}=\{a_1,\ a_2,\dots,a_{n-1}\}$$

სიმრავლეს. ვთქვათ,

$$\varnothing,\ \{a_1\},\ \{a_2\},\dots,\{a_1,\ a_2,\dots,a_{n-1}\} \tag{5}$$

მისი ქვესიმრავლეებია, რომელთა რაოდენობა, ჩვენი აღნიშვნის თანახმად არის $p(A_{n-1})$.

დავუბრუნდეთ ისევ A_n სიმრავლეს და მისი ქვესიმრავლეები ორ ჯგუფად გავყოთ: პირველ ჯგუფში თავი მოვუყაროთ ყველა იმ ქვესიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს a_n-ს, მეორეში — დანარჩენებს. ცხადია, პირველი ჯგუფის ქვესიმრავლეები იგივე A_{n-1} სიმრავლის ქვესიმრავლეებია. რაც შეეხება მეორე ჯგუფის ქვესიმრავლეებს, მათ მისაღებად საკმარისია A_{n-1} სიმრავლის თითოეულ ქვესიმრავლეს, ესე იგი, თითოეულ (5) სიმრავლეებიდან a_n ელემენტი დავუმატოთ. მივიღებთ:

$$\{a_n\},\ \{a_1,\ a_n\},\ \{a_2,\ a_n\},\dots,\{a_1,\ a_2,\dots,a_{n-1},\ a_n\} \tag{6}$$

სიმრავლეებს, რომელთა რიცხვი, რაღა თქმა უნდა, კვლავ $p(A_{n-1})$-ის ტოლი იქნება.

ცხადია, რომ A_n-ის ქვესიმრავლეები (5) და (6) სიმრავლეებით ამოიწურება. ამიტომაც

$$p(A_n)=p(A_{n-1})+p(A_{n-1})=2p(A_{n-1}).$$

ამრიგად, (4) თანაფარდობა დადგენილია.

ახლა, (3) ტოლობის მისაღებად საკმარისია გადავამრავლოთ ერთმანეთზე $p(A_1)=2p(A_0)$, $p(A_2)=2p(A_1),\dots,p(A_{n-1})=2p(A_{n-2})$, $p(A_n)=2p(A_{n-2})$ ტოლობები და შედეგი $p(A_1)p(A_2)\dots p(A_{n-1})$ ნამრავლზე შევკვეცოთ, თანაც მივიღოთ მხედველობაში, რომ $p(A_0)=1$.

ამრიგად, n-ელემენტიან სიმრავლეს სულ 2^n ქვესიმრავლე აქვს. მათ შორის არის ნულელემენტიანი, ერთელემენტიანი, ორელემენტიანი,... ქვესიმრავლეები. ამასთანავე, კომბინატორულ ამოცანათა ამოხსნისას ხშირად საჭიროა n-ელემენტიანი სიმრავლის m-ელემენტიანი $(0\leqslant m\leqslant n)$ ქვესიმრავლეების შედგენა და შემდეგ მათი დათვლა. გავარკვიოთ რამდენი m-ელემენტიანი ქვესიმრავლე აქვს n-ელემენტიან სიმრავლეს.

განსაზღვრება. n-ელემენტიან სიმრავლის m-ელემენტიან ქვესიმრავლეებს n ელემენტიდან m-ელემენტიანი ჯუფთებები ეწოდება და მათი რიცხვი C_n^m-ით აღინიშნება (იკითხება: „ცე ენიდან ემად").

მაგალითად, როგორც ვნახეთ, სამელემენტიან სიმრავლეს 1 ნულელემენტიანი (ესე იგი, ცარიელი) ქვესიმრავლე აქვს, 3 — ერთელემენტიანი, 3 — ორელემენტიანი და 1 — სამელემენტიანი. ამიტომაც, შეგვიძლია დავწეროთ:

$C_3^0=1,\ C_3^1=3,\ C_3^2=3,\ C_3^3=1.$

სანამ C_n^m-ის გამოსათვლელ ზოგად ფორმულას გამოვიყვანდეთ, დავადგინოთ ჯუფთებათა ორი მნიშვნელოვანი თვისება. სახელდობრ, ვაჩვენოთ, რომ:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n, \tag{7}$$

და

$$C_n^m=C_n^{n-m}. \tag{8}$$

ამ ტოლობებიდან პირველი თითქმის ცხადია. მართლაც, მის მარცხენა ნაწილში წერია n-ელემენტიანი სიმრავლის ნულელემენტიანი, ერთელემენტიანი, ორელემენტიანი,...,n-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობათა ჯამი, ესე იგი ყველა ქვესიმრავლის რიცხვი, რაც, როგორც ვიცით, 2^n-ს უდრის!

არც (8) ტოლობის დამტკიცებაა ძნელი. ამისათვის ასე ვიმსჯელოთ: სიმრავლიდან m-ელემენტიანი ქვესიმრავლის გამოყოფის შემდეგ დარჩენილი $n-m$ ელემენტი თავის მხრივ გარკვეულ ქვესიმრავლეს შეადგენს. ამრიგად, ყოველ m-ელემენტიან ქვესიმრავლეს ერთი (და მხოლოდ ერთი!) $(n-m)$-ელემენტიანი ქვესიმრავლე შეესაბამება. ამასთანავე, ამ შესაბამისობისას ყოველი $(n-m)$-ელემენტიანი სიმრავლე მხოლოდ ერთ m-ელემენტიან ქვესიმრავლეს შეესაბამება. ამიტომაც ასეთ ქვესიმრავლეთა რაოდენობა თანატოლია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{C}$$

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ A_n სიმრავლის ელემენტებისაგან $n!$ სხვადასხვა გადანაცვლება შეიძლება შევადგინოთ. დავითვალოთ ამ გადანაცვლებათა რაოდენობა სხვა გზით.

ავიღოთ A_n სიმრავლის რომელიმე m-ელემენტიანი ქვესიმრავლე, დავარქვათ მას E_m, და მის ელემენტებს A_n სიმრავლის დარჩენილი $n-m$ ელემენტი მივუწეროთ. E_m სიმრავლის ელემენტები შეიძლება $m!$ სხვადასხვა მიმდევრობით დავალაგოთ. ეს მოგვცემს ამ ელემენტების $m!$ სხვადასხვა გადანაცვლებას. თითოეულ ამ გადანაცვლებას დარჩენილი $n-m$ ელემენტი $(n-m)!$ სხვადასხვა მიმდევრობით მიეწერება. ამ გზით სულ $m!(n-m)!$ გადანაცვლებას მივიღებთ. ეს A_n სიმრავლის ის გადანაცვლებებია, რომლებშიც პირველი m ადგილი E_m ქვესიმრავლის ელემენტებს უკავიათ. მაგრამ A_n სიმრავლეს m-ელემენტიანი სხვა ქვესიმრავლეებიც აქვს და თითოეული $m!(n-m)!$ გადანაცვლებას წარმოშობს. ვინაიდან m-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა C_n^m, ამიტომ ამ გზით დათვლილი ყველა გადანაცვლების საერთო რიცხვი

$$C_n^m \, m!(n-m)!$$

იქნება. თუ ამ რიცხვს $n!$-ს გავუტოლებთ, ადვილად მივიღებთ (C) ფორმულას.

ამოცანა. მათემატიკოსთა საზოგადოებამ, რომელშიც სულ 100 წევრია, საერთო კრებაზე უნდა აირჩიოს საზოგადოების 3 წევრისაგან შემდგარი პრეზიდიუმი. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება პრეზიდიუმის არჩევა?

კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, უნდა გავარკვიოთ, რამდენი სხვადასხვა კომბინაციით შეიძლება 100-დან 3 კაცის არჩევა. სხვანაირად, უნდა დავადგინოთ, რამდენი 3-ელემენტიანი ქვესიმრავლე აქვს 100-ელემენტიან სიმრავლეს. პასუხი ცხადია: C_{100}^3. მოვიშველიოთ (C) ფორმულა;

$$C_{100}^3 = \frac{100!}{3!97!} = \frac{97!98 \cdot 99 \cdot 100}{2 \cdot 3 \cdot 97!} = 161700.$$

შევნიშნოთ, რომ ჯუფთებათა რიცხვის გამოთვლისას მოსახერხებელია (C) ფორმულის ნაცვლად შემდეგი ფორმულით ვისარგებლოთ:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m-1)}{m!}. \qquad (C')$$

ეს ტოლობა ადვილად მიიღება (C) ფორმულიდან, თუ უკანასკნელის მრიცხველსა და მნიშვნელს $(n-m)!$-ზე გავყოფთ. (სწორედ ასე მოვიქეცით ჩვენ C_{100}^3-ის გამოთვლისას).

დალაგებული ქვესიმრავლეები. წყობები

ზემოთ ჩვენ ვისაუბრეთ n-ელემენტიანი სიმრავლის m-ელემენტიან ქვესიმრავლეებზე, ვიპოვეთ კიდევაც მათი C_n^m რაოდენობის გამოსათვლელი (C) ფორმულა. ამასთანავე, ქვესიმრავლეებში ელემენტთა რიგს მხედველობაში არ ვიღებდით, ესე იგი ჯუფთებათა განხილვისას ყურადღებას ვაქცევდით თავად ელემენტებს და არა მათ რიგს. ამ თვალსაზრისით, მაგალითად,

$\{a, b, c, d\}$

სიმრავლით „წარმოშობილი" ორი — a, b, c და c, b, a ჯუფთება ერთი და იგივეა. მაგრამ, კომბინატორულ ამოცანებში ზოგჯერ საჭიროა ამ ჯუფთებათა განსხვავება. სხვანაირად, საჭიროა მოცემული n-ელემენტიანი სიმრავლის m-ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეთა განხილვა, მათი დათვლა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა. მათემატიკოსთა საზოგადოებამ, რომელშიც სულ 100 წევრია, საერთო კრებაზე საზოგადოების წევრებისაგან უნდა აირჩიოს საზოგადოების პრეზიდენტი, ვიცე-პრეზიდენტი და სწავლული მდივანი. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება მათი არჩევა?

ეს ამოცანა სულ ახლახან ამოხსნილ ამოცანას მოგვაგონებს, მაგრამ შემთხვევათა რაოდენობა აქ მეტი იქნება. საქმე ის არის, რომ ზემოთ ჩვენ დავითვალეთ 100-ელემენტიანი სიმრავლის 3-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, ახლა კი საჭიროა 3-ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეთა დათვლა — არსებითია არა მარტო ის, თუ საზოგადოების წევრთაგან რომელი 3 იქნება არჩეული, არამედ ისიც, ამ 3-იდან ვინ იქნება არჩეული პრეზიდენტად, ვინ ვიცე-პრეზიდენტად და ვინ სწავლულ მდივნად.

ამოცანის კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, ჯუფთებათა ზემოთ ნაპოვნი რიცხვი 6-ზე გავამრავლოთ, ვინაიდან თითოეულ 3-ელემენტიან ჯუფთებაში $3!=6$ გადანაცვლება შეიძლება მოვახდინოთ. ამრიგად, სულ

$$161700\cdot 6=970200$$

შემთხვევა გვაქვს.

განსაზღვრება. **n-ელემენტიანი სიმრავლის m-ელემენტიან ($0\leqslant m\leqslant n$) დალაგებულ ქვესიმრავლეებს n ელემენტიდან m-ელემენტიანი წყობები ეწოდება და მათი რიცხვი A_n^m-ით აღინიშნება** (იკითხება: „ა ენიდან ემად").

სულ ადვილი დასადგენია, რომ

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m-1). \qquad (A)$$

მართლაც, m-ელემენტიანი რომელიმე ჯუფთებიდან რომ ყველა ის წყობა მივიღოთ, რომლებიც ამ m ელემენტს შეიცავს, საჭიროა უკანასკნელთა ყველა შესაძლო გადანაცვლება მოვახდინოთ, ესე იგი, თითოეული m-ელემენტიანი ჯუფთება P_m წყობას მოგვცემს, C_n^m ჯუფთება კი $C_n^m P_m$ წყობას. ამრიგად,

$$A_n^m = C_n^m P_m.$$

თუ გავიხსენებთ (C) და (P) ტოლობებს, ადვილად მივიღებთ (A)-ს.

დასასრულ, გეტყვით რომ P, C და A ასოები, გადანაცვლების, ჯუფთების და წყობის აღსანიშნავად შემთხვევით არ იხმარება, — ეს არის პირველი ასოები ფრანგული სიტყვებისა *permutation* (გადანაცვლება), *combinaison* (კომბინაცია) და *arrangement* (დალაგება).

> ყოველ ამოცანას ისეთი სახე უნდა მივცეთ, რომ მისი ამოხსნა შეიძლებოდეს.
>
> **ნილს ჰენრიკ აბელი**

შეიძლება თუ არა ნაწილი მთელს უდრიდეს?

ვზივარ საწერ მაგიდასთან და ვკითხულობ. უცბად გაიღო კარი და ოთახში, კი არ შემოვიდა, ყუმბარასავით შემოვარდა გიორგი. მას ფეხდაფეხ თამუნიაც მოჰყვა. რაღაცას მეკითხებიან, მაგრამ, გაიგებ განა რამეს?! — ერთმანეთს ლაპარაკს არ აცლიან.

— ვატყობ, რაღაცას მეკითხებით, მაგრამ რომ არა მესმის რა!.. დასხედით, დაწყნარდით და მერე გავარკვიოთ ყველაფერი.

ჩემი პატარა მეგობრები სკამებზე ჩამოსხდნენ, სული მოითქვეს და თამუნიამ მკითხა:

— შეიძლება თუ არა, რომ ნაწილი მთელს უდრიდეს?

— ნაწილი — მთელს? არავითარ შემთხვევაში! ნაწილი ყოველთვის ნაკლებია მთელზე. სხვათა შორის, ძველმა ბერძენმა მათემატიკოსმა ევკლიდემ, რომელმაც გეომეტრიის პირველი სრული კურსი შეადგინა, ეს დებულება ერთ-ერთ აქსიომად გამოაცხადა.

— კი მაგრამ, დღეს ჩვენთან სკოლაში იყო კახა, თქვენ მას იცნობთ, ის სტუდენტია, და გვითხრა, რომ არის შემთხვევები, როცა ნაწილი მთელის ტოლია, მაგალითიც კი მოიყვანა.

— კახას მე ძალიან კარგად ვიცნობ, მან, რა თქმა უნდა, შესანიშნავად იცის, რომ ნაწილი მთელზე ნაკლებია, დარწმუნებული ვარ, თქვენი გამოცდა უნდოდა. მაგალითი გახსოვთ?

— ძალიან კარგად, აი, უსმინეთ...— თქვეს მათ ერთდროულად და ორივემ ქაღალდი და ფანქარი მოიმარჯვა.

— კი, ბატონო, ვნახოთ ეს მაგალითი. მაგრამ, მოდით, ერთ-ერთი თქვენგანი მოყვეს. აბა, თამუნია, მითხარი, რაზე იყო საუბარი.

— მაშ ასე. ავიღოთ ყველა ნატურალური რიცხვის.

{1, 2, 3, 4, 5,...}

სიმრავლე და აგრეთვე ლუწ რიცხვთა

{2, 4, 6, 8, 10,...}

სიმრავლე. ხომ არის მეორე პირველის ნაწილი?

— ცხადია, არის!

— ამავე დროს, ისინი თურმე ერთმანეთის ტოლია. აი, შეხედეთ, — და თამუნიამ შემდეგი ცხრილი დახატა:

1	2	3	4	5	...	100	101	...	500	501	...
2	4	6	8	10	...	200	202	...	1000	1002	...

ამ ცხრილში ყოველი ნატურალური რიცხვის ქვეშ გარკვეული ლუწი რიცხვი წერია, ამასთან არც ერთი არ არის გამოტოვებული და არც ერთი არ მეორდება. გამოდის, რომ ლუწი რიცხვი იმდენივეა, რამდენიც ნატურალური, ესე იგი აღებული სიმრავლეები თანატოლია.

— რა თქვი — „თანატოლიაო"? განა არ გახსოვს, რა შემთხვევაში ეწოდება ორ სიმრავლეს თანატოლი? აბა, გიორგი, გაიხსენე!

— ორი სიმრავლე ერთმანეთის ტოლია, თუ ერთი სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის მეორე სიმრავლესაც და პირუკუ — მეორის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის პირველსაც.

— ეს მეც ვიცი, — თქვა თამუნიამ, — ორი სიმრავლე ერთმანეთის ტოლია, თუ ისინი ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შედგებიან.

— მერე, როგორ ფიქრობ, ტოლია თუ არა ნატურალურ და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეები?

— არა, ისინი ერთმანეთს არ უდრიან, მაგრამ... ხომ გამოდის, რომ მათში ელემენტთა ერთი და იგივე რაოდენობაა?!

— დიახ, დიახ, — დაუდასტურა გიორგიმ, — ეს სიმრავლეები ტოლია ელემენტების რაოდენობით, ესე იგი ნაწილი მაინც მთელის ტოლია!

— დავუშვათ. ვთქვათ, რომ ნაწილი რაოდენობრივად არის მთელის ტოლი. საინტერესოა, რას იტყოდით ამავე სიმრავლეებისათვის ასეთი ცხრილი რომ შემედგინა:

1	2	3	4	5	...	100	101	...	500	501	...
	2		4		...	100		...	500		...

აქ მეორე სტრიქონში ყველა ლუწი რიცხვია ამოწერილი, მაგრამ არის თავისუფალი უჯრებიც, რომელთა რაოდენობა, ადვილი მისახვედრია, უსასრულოა. გამოდის, რომ ლუწ რიცხვთა რაოდენობა მაინც ნაკლებია ნატურალურ რიცხვთა რაოდენობაზე!

— ??

თამუნია და გიორგი დაბნეულები ჩანდნენ, — ისინი გაკვირვებულნი უყურებდნენ ერთმანეთს. ბოლოს ორივემ შემომხედა — ჩანს, პასუხს ელოდნენ.

— მოდით, ჩემო კარგებო, — ვთქვი მე, — გავარკვიოთ ეს საკითხი. დავიწყოთ სასრული სიმრავლეებით. ვთქვათ, მოცემულია ორი სასრული სიმრავლე და საჭიროა მათი რაოდენობრივი შედარება, ესე იგი, დადგენა იმისა, ელემენტების ერთსა და იმავე რაოდენობას შეიცავენ თუ არა. რას ფიქრობთ, როგორ უნდა მოვიქცეთ?

— დავითვალოთ ამ სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობა, — მიპასუხა გიორგიმ ისე, რომ არც კი დაფიქრებულა.

— დიახ, უნდა დავითვალოთ და შემდეგ მიღებული რიცხვები შევადაროთ, — დაუმატა თამუნიამ.

— სწორია, არ გედავებით. ეს პირველია, რაც აზრად მოგვივა. რა თქმა უნდა, ელემენტების გადათვლა პრინციპულად სწყვეტს კიდეც საკითხს, მაგრამ თუკი საქმეს კრიტიკულად მივუდგებით, აღმოჩნდება, რომ გადათვლის მეთოდი საუკეთესო არ არის. გარდა იმისა, რომ უსასრულო სიმრავლეებისათვის მისი გავრცელება არ შეიძლება, მას სხვა ნაკლიც გააჩნია. ჯერ ერთი, ელემენტების დათვლით ზედმეტ, არასაჭირო ინფორმაციას ვიღებთ — ჩვენ ხომ სულაც არ გვაინტერესებს რამდენი ელემენტია თითოეულ სიმრავლეში, ჩვენ მხოლოდ იმის დადგენა გვინდა, ელემენტების ერთი და იგივე რაოდენობაა სიმრავლეებში თუ არა. მეორეც, ამ მეთოდის გამოყენება ყოველთვის როდია მოსახერხებელი. წარმოიდგინეთ, მაგალითად, რომ თქვენ სახალისო მათემატიკის საღამოს ატარებთ სკოლაში და ამ საღამოზე მეზობელი სკოლის მოსწავლეებიც მოიწვიეთ. ბევრი სტუმარი მოვიდა, მასპინძლებიც საკმაო რაოდენობით არიან. ყველამ თავი მოიყარა დიდ დარბაზში, რომლის კედლების გასწვრივ სკამებია ჩამწკრივებული. თქვენ გინდათ გაარკვიოთ, საკმარისია თუ არა სკამები, ხომ არ იქნება საჭირო დამატება. ნუთუ ყველა დამსწრის თვლას დაიწყებთ: ერთი, ორი, სამი, ოთხი,...

— არა, ეს ძალიან უხერხული იქნებოდა, — ერთხმად თქვეს ჩემმა მოსაუბრეებმა.

— დიახ, უხერხულია და არც ისე ადვილი, — დავუმატე მე. — მა-

ინც, როგორ მოვიქცეთ, სკამები თუ საკმარისად არ არის, ხომ უნდა დროზე მოვიტანოთ?!

— იქნებ ყველას ვთხოვოთ, დასხდნენ? — მცირე ფიქრის შემდეგ იკითხა თამუნიამ. — მაშინ ადვილად დავადგენთ, ვინ დარჩა უადგილოდ...

— სწორია! უნდა ვთხოვოთ ყველას — სტუმრებსაც და მასპინძლებსაც, დასხდნენ, თანაც ვიზრუნოთ, რომ თითოეულ სკამზე მხოლოდ ერთი მოსწავლე დაჯდეს. აბა, გიორგი, რამდენი შემთხვევაა შესაძლებელი?

— ყველა დაჯდა და თავისუფალი სკამები არ არის — ეს პირველი, ყველა დაჯდა, ზოგიერთი სკამი კი თავისუფალია — ეს მეორე, ყველა სკამი დაკავებულია, მაგრამ ზოგიერთი ფეხზე დგას — ესეც მესამე. სულ სამი შემთხვევაა!

— დიახ, სამი შესაძლო შემთხვევაა. პირველ მათგანში ადამიანების სიმრავლესა და სკამების სიმრავლეში ელემენტები თანაბრად არის, მეორეში — ადამიანებია ნაკლები, მესამეში კი პირიქით — სკამებია ნაკლები. აი, ჩვენ ვიპოვეთ ძალიან კარგი ხერხი ორი სასრული სიმრავლის რაოდენობრივი შედარებისათვის, რომელიც უსასრულო სიმრავლეების შემთხვევაშიც გამოდგება. ვნახოთ, როგორ შეიძლება ამის გაკეთება. ვთქვათ, ორი — A და B სიმრავლეა მოცემული. სასრულია თუ არა ეს სიმრავლეები, არსებითი არ არის. ამბობენ, რომ A სიმრავლე ურთიერთცალსახად აისახება B სიმრავლეზე, თუ არის შესაბამისობა, რომელიც A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს B სიმრავლის გარკვეულ b ელემენტს შეუსაბამებს, ამასთანავე ისე, რომ ყოველი b მხოლოდ ერთ a-ს შეესაბამება. კარგად დაუკვირდით რა ვთქვი, ვიმეორებ, — და მე კიდევ ერთხელ გავიმეორე თუ რას ნიშნავს ერთი სიმრავლის მეორეზე ურთიერთცალსახად ასახვა. თამუნია და გიორგი ყურადღებით მისმენდნენ.

— ცხადია, — დავუმატე მე, — რომ თუ A შეიძლება ურთიერთცალსახად ავსახოთ B-ზე, მაშინ ამ სიმრავლეების ელემენტებისაგან ისეთი (a,b) წყვილების შედგენა იქნება შესაძლებელი, რომ:

1. წყვილის პირველი წევრი, ან, როგორც ამბობენ ხოლმე, პირველი კომპონენტი A სიმრავლის ელემენტია, მეორე კომპონენტი კი — B სიმრავლისა.

2. როგორც A, ისე B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შედის ერთ და მხოლოდ ერთ წყვილში.

ალბათ მიხვდით, რომ შებრუნებულიც სამართლიანია: თუ A და B სიმრავლეების ელემენტებისაგან შეიძლება ისეთი (a, b) წყვილების შედგენა, რომლებიც ზემოთ მოყვანილ ორ პირობას აკმაყო-

ფილებენ, მაშინ A სიმრავლე ურთიერთცალსახად აისახება B-ზე. მოვიყვან ერთ მაგალითს. ვთქვათ,

$A=\{$ს, ა, ხ, ლ, ი$\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

შევადგინოთ (ს, 1), (ა, 2), (ხ, 3), (ლ, 4), (ი, 5) წყვილები. ისინი ჩვენს პირობებს აკმაყოფილებენ, ესე იგი A ურთიერთცალსახად აისახება B-ზე.

— ხომ შეიძლება სხვა წყვილების შედგენა, მაგალითად, (ი, 1), (ლ, 2), (ხ, 3), (ა, 4), (ს, 5)? — იკითხა თამუნიამ.

— რა თქმა უნდა, შეიძლება! ოღონდ კი მოთხოვნილი პირობები შესრულდეს. სხვათა შორის, ასეთი წყვილების შედგენის წესების რაოდენობა საკმაოდ დიდია ხოლმე. ჩვენს შემთხვევაში, მაგალითად, იგი 120-ის ტოლია. სხვანაირად, მოცემული A სიმრავლე B-ზე ურთიერთცალსახად შეიძლება 120 სხვადასხვა წესით ავსახოთ. აი, კიდევ რას გეტყვით. იმის ნაცვლად, რომ ვთქვათ: „A სიმრავლე ურთიერთცალსახად აისახება B სიმრავლეზე", მოკლედ ვამბობთ ხოლმე: „A სიმრავლე B-ს ეკვივალენტურია" და ვწერთ: „$A \sim B$". ცხადია, რომ თუ $A \sim B$, მაშინ შებრუნებითაც: $B \sim A$. როგორ ფიქრობთ, როდის არის ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტური?

— როცა მათში ელემენტების ერთი და იგივე რიცხვია, — ერთხმად მიპასუხა ორივემ.

— სწორია. სამართლიანია შებრუნებული დასკვნაც: თუ ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია, მაშინ...

— ისინი ელემენტების ერთსა და იმავე რაოდენობას შეიცავენ, — სწრაფად დაამთავრა გიორგიმ.

— მაშასადამე, ორი სასრული სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის ერთმანეთის ეკვივალენტური, როცა მათში ელემენტების ერთი და იგივე რაოდენობაა, — შეაჯამა თამუნიამ.

— სრული ჭეშმარიტებაა! ამრიგად, სასრულ სიმრავლეთა შემთხვევაში ყველაფერი ძალიან მარტივია და ეკვივალენტურობის შემოღება საჭიროც არ იქნებოდა, რომ არა უსასრულო სიმრავლეები. ეს გაცილებით საინტერესო შემთხვევაა. აქ ზოგჯერ ისეთი ვითარება იქმნება, რომ ძნელიც კია დაიჯერო მაგრამ... რას იზამ, — ფაქტი უნდა ირწმუნო! ავიღოთ თუნდაც ნატურალურ და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეების შემთხვევა. დავხედავთ თუ არა შენს დახატულ ცხრილს, ჩემო თამუნია, დავრწმუნდებით, რომ ამ სიმრავლეთა ელემენტები შეიძლება სასურველი წესით დავაწყვილოთ და, მაშასადამე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე თავისი ნაწილის — ლუწ რიცხვთა

სიმრავლის ეკვივალენტურია. ასეთი რამ სასრულ სიმრავლეთა შემთხვევაში არ შეიძლება მოხდეს!

— კი, მაგრამ... თქვენი ცხრილით რომ ასე არ გამოდის? — გაუბედავად იკითხა თამუნიამ.

— ხომ იცი, მე ველოდი ამ შეკითხვას. მართლაც, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ეს ორი სიმრავლე ერთდროულად ერთმანეთის ეკვივალენტურიც არის და არც არის. თუმცა ეს შეიძლება მხოლოდ მოგვეჩვენოს, სინამდვილეში აქ ყველაფერი რიგზეა და არავითარი წინააღმდეგობა არა გვაქვს. საქმე ის არის, რომ A სიმრავლე B-ს ეკვივალენტურია, თუ შეიძლება, ხაზს ვუსვამ ამ სიტყვას — შეიძლება — მისი ურთიერთცალსახად ასახვა B-ზე. ამრიგად, თუ ერთი წესი მაინც მოვძებნეთ, რომელიც A-ს ურთიერთცალსახად ასახავსB-ზე, A სიმრავლე B-ს ეკვივალენტურია. თუკი ასეთი წესი არ არსებობს, სიმრავლეები ურთიერთეკვივალენტურნი არ არიან. შენი ცხრილი ხომ იძლევა ასეთ ასახვას? — იძლევა. მაშასადამე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ლუწ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია. ცხადია, შეგვეძლო გვეთქვა პირიქითაც — ლუწ რიცხვთა სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია. როგორც ხედავთ, მართლაც ყველაფერი რიგზე ყოფილა. რას იტყვით?

— ახლა გასაგებია, — მიპასუხა ორივემ ერთად.

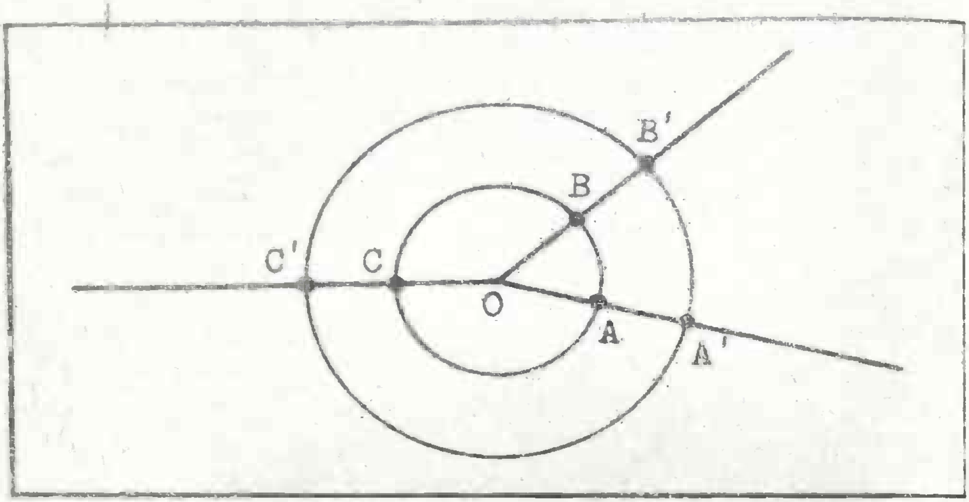
— ძალიან კარგი. მაინც მინდა თქვენი ყურადღება მივაპყრო იმას, რომ თითქოს ლუწ რიცხვთა რაოდენობა ორჯერ ნაკლებია ნატურალურ რიცხვთა რაოდენობაზე, მაგრამ ხომ ხედავთ, სათანადო სიმრავლეები ეკვივალენტურია და გარკვეული აზრით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ლუწი რიცხვი იმდენივეა, რამდენიც ნატურალური. ეს იმას კი არ ნიშნავს, რომ ნაწილი მთელს უდრის. არა. უსასრულობის შემთხვევაში მეტ-ნაკლებობაზე ანდა ტოლობაზე საუბარი ასე ადვილად არ შეიძლება. აქ ძალიან გვშველის ეკვივალენტურობა — ის საშუალებას გვაძლევს, ასე ვთქვათ, რაოდენობრივად შევადაროთ ორი უსასრულო სიმრავლე, გავარკვიოთ, რომელია უფრო მდიდარი ელემენტებით.

— გამოდის, რომ ლუწ რიცხვთა სიმრავლე და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ერთნაირად მდიდარია, არა? — იკითხა გიორგიმ.

— დიახ, ეს ასეა. საერთოდ, როგორც გითხარით, უსასრულო სიმრავლეების განხილვისას ბევრ საინტერესოსა და საგულისხმო რამეს ვხვდებით. მაგრამ ახლა ჩვენი საუბრის ძირითად თემას ნუ გადავუხვევთ და ეკვივალენტური სიმრავლეების რამდენიმე მაგალითი განვიხილოთ.

ავიღოთ საერთო O ცენტრის მქონე ორი წრეწირი. ალბათ გახ-

სოვთ, რომ ასეთ წრეწირებს კონცენტრულს უწოდებენ. დარწმუნებული ვარ, ისიც გახსოვთ, რომ ყოველი გეომეტრიული ფიგურა წერტილებისაგან შედგება, ესე იგი არის წერტილთა სიმრავლე. ჰოდა, წარმოვიდგინოთ, რომ გვაქვს ორი სიმრავლე — ორი კონცენტრული წრეწირი. დავამტკიცოთ, რომ ეს წრეწირები ეკვივალენტურია. მართლაც, ავიღოთ შიგა წრეწირზე A, B, C,... წერტილები და



გავავლოთ მათზე OA, OB, OC,... სხივები. ამ უკანასკნელთა გარე წრეწირთან გადაკვეთის წერტილები იყოს A', B', C',... შევადგინოთ წერტილთა (A, A'), (B, B'), (C, C'),... წყვილები. რას იტყვით მათზე, აკმაყოფილებენ თუ არა ისინი იმ ორ პირობას, ზევით რომ ჩამოვაყალიბეთ?

— აკმაყოფილებენ, რადგან ყოველი წყვილის პირველი კომპონენტი არის შიგა წრეწირის წერტილი, მეორე — გარე წრეწირისა... — დაიწყო თამუნიამ, მაგრამ გიორგიმ აღარ დააცადა:

— ... და ყოველი სიმრავლის ელემენტი ერთ და მხოლოდ ერთ წყვილში შედის.

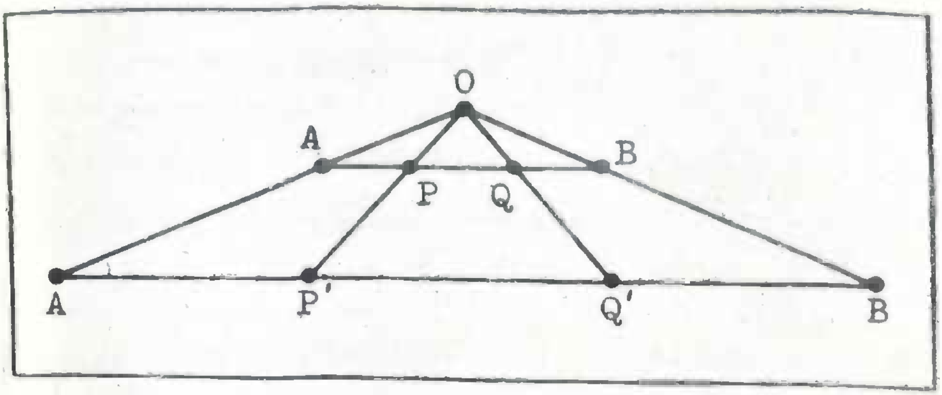
— სწორია. მაშასადამე, წრეწირები ეკვივალენტურია. ეს მაგალითი იმითაც არის საინტერესო, რომ გარე წრეწირის რადიუსი შეიძლება რამდენჯერაც გნებავთ მეტი იყოს შიგა წრეწირის რადიუსზე.

— მილიონჯერ? — იკითხა გიორგიმ.

— მილიონჯერაც და უფრო მეტჯერაც!

— გამოდის, ეს წრეწირები რომ გავშალოთ, ორ მონაკვეთს მივიღებთ, ერთი მეორეზე გაცილებით გრძელი იქნება და მაინც ურთიერთცალსახად აისახება მასზე?!

— კი! აი, უყურე, როგორ შეიძლება ეს ასახვა განვახორციელოთ:



ნახატზე კარგად ჩანს, თუ წერტილთა როგორ წყვილებს ვადგენთ, რომ AB და CD მონაკვეთების ეკვივალენტურობა ვაჩვენოთ.

აი, კიდევ ერთი მაგალითი ეკვივალენტური სიმრავლეებისა, რომელიც მჭიდრო კავშირშია ახლახან განხილულთან. განსხვავება მხოლოდ ის არის, რომ ამჯერად ალგებრის ენაზე ვილაპარაკებთ.

ავიღოთ $[0, 1]$ მონაკვეთი — ყველა იმ არაუარყოფითი x რიცხვის სიმრავლე, რომელიც 1-ს არ აღემატება და $[a, b]$ მონაკვეთი — ყველა ისეთი y რიცხვის სიმრავლე, რომელიც $a \leqslant y \leqslant b$ უტოლობებს აკმაყოფილებს. ცხადია, გეომეტრიულად ეს მონაკვეთებია — პირველის სიგრძეა 1, მეორისა $b-a$. მიუხედავად იმისა, რომ უკანასკნელი გაცილებით მეტი ან ნაკლები შეიძლება იყოს 1-ზე, მაინც $[0, 1] \sim [a, b]$. მართლაც, განვიხილოთ

$$y = a + (b-a)x$$

ფორმულით მოცემული ფუნქცია, თანაც ვიგულისხმოთ, რომ $0 \leqslant x \leqslant 1$. როცა $x=0$, მაშინ $y=a$. შემდეგ, x-ის ზრდასთან ერთად y-იც იზრდება და როცა x 1-ის ტოლი გახდება, y მაშინ b-ს გაუტოლდება. მაშასადამე, $[0, 1]$ მონაკვეთის ყოველ x რიცხვს გარკვეული y შეესაბამება $[a, b]$ მონაკვეთიდან. რადგან, ამასთანავე,

$$x = \frac{y-a}{b-a},$$

ამიტომ ყოველი y მხოლოდ ერთ x-ს შეესაბამება. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $[0, 1]$ ურთიერთცალსახად აისახა $[a, b]$-ზე, ესე იგი

$$[0, 1] \sim [a, b].$$

— ხომ შეიძლება ეს ასახვა წყვილების სახით წარმოვადგინოთ? — იკითხა თამუნიამ.

— რა თქმა უნდა, თანაც ორი სხვადასხვა სახით. პირველ შემთხვევაში

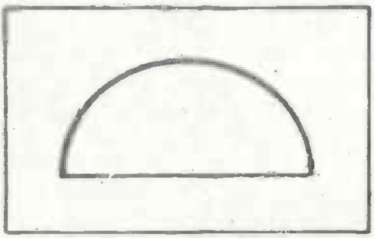
$$(x,\ a+(b-a)x)$$

წყვილები გვექნება, — აქ x ნულიდან ერთამდე იცვლება. მეორე შემთხვევაში წყვილები შემდეგი სახისაა:

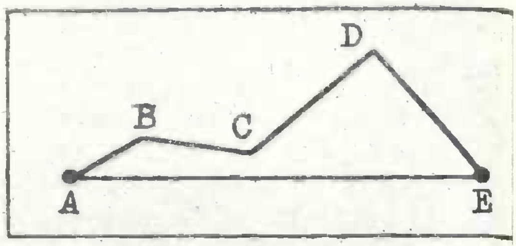
$$\left(\frac{y-a}{b-a},y\right).$$

ამჯერად ცვლადია y და ის a-დან b-მდე იცვლება.

ამით ჩვენი საუბარი დამთავრდა. თამუნია და გიორგი ძალიან კმაყოფილნი დარჩნენ. დავალების სახით მათ რამდენიმე ამოცანა მივეცი. იქნებ თქვენც შეეცადოთ მათ ამოხსნას, მკითხველო?



ნახ. 1



ნახ. 2

1. დაამტკიცეთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე 10-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია.

2. ასახეთ ურთიერთცალსახად ნახევარი წრეწირი მის დიამეტრზე (ნახ. 1).

3. აჩვენეთ, რომ $ABCDE$ ტეხილი AE მონაკვეთის ეკვივალენტურია (ნახ. 2).

4. დაამტკიცეთ, რომ მთელ რიცხვთა და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

მათემატიკაში ხმარებულ დამტკიცებათა მეთოდებს შორის ერთ-ერთი საპატიო ადგილი ინდუქციის მეთოდს უკავია — არა ერთი და ორი თეორემა, ფორმულა თუ თანაფარდობა სწორედ ინდუქციით მტკიცდება. ამ მეთოდს საფუძვლად მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი უდევს, რომლის იდეა, — მკითხველი ამაში თავად დარწმუნდება, — მარტივია და ადვილად გასაგები. ამასთანავე, ინდუქციის მეთოდს კარგად რომ დავეუფლოთ, საჭიროა ვარჯიში. ამიტომაც წინამდებარე წერილში საკმაოდ ბევრი საილუსტრაციო მაგალითია განხილული.

დედუქცია და ინდუქცია

ლოგიკაში მტკიცების, დასკვნის გამოტანის ორი ძირითადი ფორმა შეისწავლება — დედუქციური და ინდუქციური. უკანასკნელ ორივე სიტყვას ფუძე ლათინური აქვს: *deductio* და *inductio*. პირველი ნიშნავს გამოყვანას, ხოლო მეორე — მიყვანას რამესთან, აღძვრას.

დედუქცია გულისხმობს ზოგადიდან კერძოზე გადასვლას, ზოგადი დებულებიდან კერძო დასკვნის გამოტანას. აი მაგალითი დედუქციური მსჯელობისა, რომელსაც ლოგიკის ბევრ სახელმძღვანელოში შეხვდებით: „ყველა ადამიანი მოკვდავია; სოკრატე ადამიანია; მაშასადამე, სოკრატე მოკვდავია". დედუქციური ხასიათისაა შემდეგი მსჯელობაც: „*ABCD* ოთხკუთხედი რომბია; მაგრამ გეომეტრიაში მტკიცდება, რომ რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია; მაშასადამე, *ABCD* ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთმართობულია".

დედუქციისაგან განსხვავებით, ინდუქცია აზროვნების ისეთი მეთოდია, როცა კერძო ფაქტებიდან, დებულებებიდან ზოგადი დასკვნა გამოგვაქვს — კერძოს ვანზოგადებთ. აი მაგალითი: „რკინა ელექტროდენს ატარებს; ფოლადიც გამტარია; სპილენძიც გამტარია; ალუმინიც გამტარია; მაშასადამე, ყველა ლითონი გამტარია". ან კიდევ: „5 იყოფა 5-ზე, 15 იყოფა 5-ზე, 25 იყოფა 5-ზე, 35 იყოფა 5-ზე, 45-იც იყოფა;... მაშასადამე, 5-ით დაბოლოებული ყველა რიცხვი იყოფა 5-ზე".

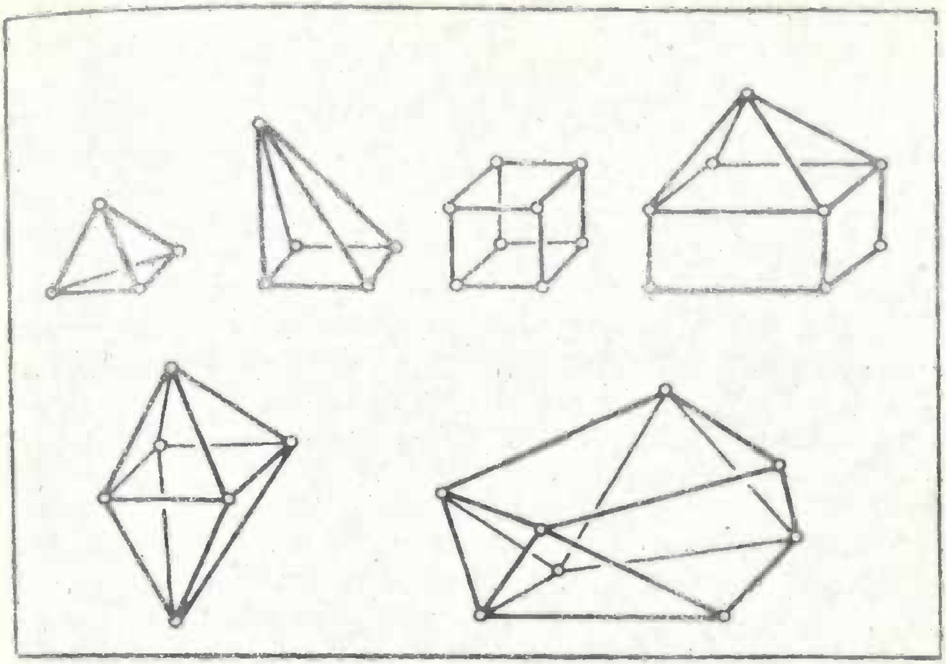
მათემატიკა დედუქციური მეცნიერებაა: მასში დამტკიცებანი ზოგადი ხასიათისაა. მაგალითად, იგივე თეორემა რომბის დიაგონალების შესახებ („რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია") ეხება არა ერთ, ან ორ, ან თუნდაც რამდენიმე ათეულსა და ასეულ რომბს, არამედ ყველა რომბს, ის ჭეშმარიტია უკლებლივ ყველა რომბისათვის.

ამასთანავე, მათემატიკა არ უარყოფს ინდუქციას, პირიქით — იგი ძალიანაც ხშირად სარგებლობს აზროვნების ამ მეტად ეფექტური მეთოდით. „მათემატიკაში ჭეშმარიტების მიღწევის მთავარი საშუალებებია ინდუქცია და ანალოგია". დიდი ფრანგი მეცნიერის ლაპლასის (*P.S.Laplace*, **1749—1827**) ეს სიტყვები თითქოსდა ერთხელ კიდევ მოგვაგონებს, რომ მრავალი მათემატიკური ფაქტი ჯერ ინდუქციითა და ანალოგიით იქნა მიგნებული, ხოლო შემდეგ — დამტკიცებული. საილუსტრაციოდ ერთი, თავისთავადაც საინტერესო მაგალითი განვიხილოთ.

ნებისმიერ მრავალკუთხედში იმდენივე გვერდია, რამდენიც წვერო. ეს ყველამ იცის. სხვანაირად, წვეროების რიცხვსა და გვერდების რიცხვს შორის გარკვეული თანაფარდობა, სახელდობრ, ტოლობა არის. ახლა ვიკითხოთ: რა თანაფარდობაა მრავალწახნაგას წვეროების რიცხვსა, წიბოების რიცხვსა და წახნაგების რიცხვს შორის? ის კანონზომიერებანი, გეომეტრიულ ფიგურებში რომ არის და აგრეთვე ანალოგია მრავალკუთხედსა და მრავალწახნაგას შორის, გვაფიქრებინებს, რომ არსებობს თანაფარდობა წვეროების რიცხვსა (A), წიბოების რიცხვსა (B) და წახნაგების რიცხვს (C) შორის. მაგრამ... რა სახის თანაფარდობა, ეს არ ვიცით. შევეცადოთ, დავადგინოთ იგი — ვნახოთ, რა გვაქვს კერძო შემთხვევებში.

დავიწყოთ ტეტრაედრით. მისთვის $A=4$, $B=6$, $C=4$. ოთხკუთხა პირამიდისათვის $A=5$, $B=8$, $C=5$. საინტერესოა! ორივე შემთხვევაში $A=C$ და თანაც

$$A+C=B+2. \tag{1}$$



აბა კუბი ვნახოთ. $A = 8$, $B = 12$, $C = 6$. სამწუხაროა, $A = C$ ტოლობა დაირღვა, მაგრამ... (1) აქაც სამართლიანია. ცოტა რთული სახის მრავალწახნაგა — „სახლი" გამოვიკვლიოთ, აქ $A = 9$, $B = 16$, $C = 9$. კვლავ $A = C$ ტოლობა და მასთან ერთად (1)-იც! რვაწახნაგასათვის $A = 6$, $B = 12$, $C = 8$. თუმცა $A = C$ არა გვაქვს, (1) ტოლობა ძალაში რჩება. ავიღოთ კიდევ ათწახნაგა. მისთვის გვაქვს: $A = 8$, $B = 16$, $C = 10$. ამ შემთხვევაშიც (1) ტოლობა ჭეშმარიტია.

ამრიგად, ინდუქციამ (1) ტოლობამდე მიგვიყვანა, მაგრამ, ცხადია, ჩვენ ჯერ კიდევ არა გვაქვს უფლება ვთქვათ, რომ ეს ტოლობა სხვა მრავალწახნაგებისათვისაც სამართლიანია. არავითარი შემოწმება კერძო მაგალითებზე აქ არ ივარგებს — საჭიროა ჩვენს მიერ მიგნებული ტოლობის ან დამტკიცება, ან უარყოფა! თურმე ეს ტოლობა ჭეშმარიტია ყველა ამოზნექილი მრავალწახნაგასათვის. ესაა ეილერის (***L.Euler***, **1707—1783**) ცნობილი თეორემა.

ალბათ მკითხველი დამერწმუნება, რომ ეილერს, ისევე, როგორც მის წინამორბედებს, რომლებმაც იცოდნენ (1) თანაფარდობის შესახებ, ეს უკანასკნელი კი არ დაესიზმრათ, ისინი ინდუქციით მივიდნენ ამ დასკვნამდე. დარჩენილი იყო უკანასკნელი ნაბიჯის გადადგმა — დამტკიცება. სწორედ ეს ნაბიჯი გადადგა ეილერმა.

სრული და არასრული ინდუქცია

საზოგადოდ, ინდუქციამ შეიძლება მცდარ დასკვნამდე მიგვიყვანოს. მაგალითად, ავიღოთ 1-ით დაბოლოებული ნატურალური რიცხვების მიმდევრობა:

$$1,\ 11,\ 21,\ 31,\ 41,\ 51,\ 61, \ldots \qquad (2)$$

ამ რიცხვებზე დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ მიმდევრობის პირველი წევრი არ იყოფა 9-ზე. არც მეორე წევრი იყოფა 9-ზე, არც მესამე, არც მეოთხე,... საზოგადოდ, არც ერთი ზემოთ დაწერილი რიცხვი არ იყოფა 9-ზე. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, რომ მოცემული მიმდევრობის არც ერთი წევრი არ იყოფა 9-ზე? რა თქმა უნდა, არა! — უკვე მეცხრე წევრი, სახელდობრ 81, იყოფა 9-ზე.

აი, კიდევ ერთი საინტერესო მაგალითი „მატყუარა" ინდუქციისა. ავიღოთ

$$x^2+x+41 \qquad (3)$$

სამწევრი და ჩავსვათ მასში x-ის ნაცვლად მიმდევრობით 0, 1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. მივიღებთ შესაბამისად შემდეგ რიცხვებს:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151.

ყველა ეს რიცხვი მარტივია. ჩვენ ეჭვი გვიპყრობს: ხომ არ არის ამ სამწევრის მნიშვნელობა ყველა არაუარყოფითი მთელი x-ისათვის მარტივი რიცხვი? — და განვაგრძობთ შემოწმებას. $x=11$ მოგვცემს 173-ს, მარტივ რიცხვს. $x=12$; 197. ესეც მარტივი რიცხვია! $x=13$; ისევ მარტივი რიცხვი — 223. ვაგრძელებთ შემოწმებას: $x=14$, 15, 16, 17, 18, 19, 20 და სულ მარტივ რიცხვებს ვიღებთ! აბა კიდევ: $x=21$, 22, 23, 24, 25,...37, 38, 39. სულ მარტივი რიცხვები! ჩვენ მზად ვართ დავასკვნათ, რომ ეს საზოგადოდ ასეა, მაგრამ... აი $x=40$. ჩავსვათ:

$$40^2+40+41=40(40+1)+41=41^2$$

— შედგენილი რიცხვი! ჩვენი წინასწარმეტყველება მცდარი აღმოჩნდა...

ამ მაგალითში საკმაოდ ბევრი — 40 — ცდა ჩავატარეთ და მოცემული სამწევრის მნიშვნელობა ყოველთვის მარტივი რიცხვი იყო. მხოლოდ 41-ე ცდამ „გვიმტყუნა". შეიძლება ისეთი შემთხვევაც გვექნეს, როცა ცდათა განუზომლად დიდი რიცხვი სასურველ შედეგს გვაძლევს, მაგრამ ზოგადი დასკვნის გამოტანის უფლება თურმე მაინც არ გვქონია! მაგალითად, ვიკითხოთ, არსებობს თუ არა ნატურალურ რიცხვთა ისეთი (x, y) წყვილი, რომელიც

$$x^2-4729494y^2=1$$

განტოლებას აკმაყოფილებს?

ცხადია, ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად საკმარისია დავადგინოთ, არსებობს თუ არა ისეთი ნატურალური y, რომლისთვისაც

$$4729494y^2+1 \tag{4}$$

გამოსახულების მნიშვნელობა სრული კვადრატია. ამ გამოსახულებაში y-ის ნაცვლად რომ **1, 2, 3, 4, 5,...** ჩავწეროთ და თითოეული მიღებული რიცხვი გამოვიკვლიოთ, სრულ კვადრატს ვერ შევხვდებით, ვერა და ვერა, მთელი ჩვენი სიცოცხლეც რომ ამ ექსპერიმენტს მოვანდომოთ. იქნება მომდევნო თაობამ გააგრძელოს ეს საქმე? საეჭვოა, მან რამეს მიაღწიოს... მაგრამ თქვენ წარმოიდგინეთ, არსებობს y-ის მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც (4) გამოსახულების მნიშვნელობა სრული კვადრატია, თუმცა უმცირესი ასეთი y, არც მეტი, არც ნაკლები...38-ნიშნა (!) ნატურალური რიცხვია.

ყველა ზემოთ განხილულ მაგალითში — (2) მიმდევრობის, (3) სამწევრისა თუ (4) ჯამის შემთხვევაში, ჩვენ ვეყრდნობოდით ეგრეთ წოდებულ არასრულ ინდუქციას — რამდენიმე, თუნდაც ძალიან ბევრი ცდის შედეგი გვინდოდა ზოგად დასკვნად გამოგვეცხადებინა. არასრული ინდუქციით მიღებულ დასკვნას მათემატიკა კანონიერად არ მიიჩნევს. ინდუქცია უნდა იყოს სრული!

გავეცნოთ სრული ინდუქციით ჩატარებული მსჯელობის მაგალითს. სახელდობრ, დავამტკიცოთ, რომ a^2+1 გამოსახულების მნიშვნელობა a-ს არც ერთი მთელი მნიშვნელობისათვის არ იყოფა 3-ზე.

მართლაც, ვთქვათ a არის **3**-ის ჯერადი: $a=3k$. მაშინ

$$a^2+1=9k^2+1$$

და ცხადია, რომ მიღებული რიცხვი **3**-ზე არ იყოფა — იგი **3**-ზე გაყოფისას ნაშთს **1**-ს გვაძლევს.

თუ a 3-ზე გაყოფისას ნაშთს **1**-ს გვაძლევს, მაშინ მას $3k+1$ სახე აქვს და, მაშასადამე,

$$a^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3m_1+2.$$

არც ეს რიცხვი იყოფა **3**-ზე.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა a რიცხვი **3**-ზე გაყოფისას ნაშთს 2-ს გვაძლევს, ესე იგი, $a=3k+2$. მაშინ

$$a^2+1=(3k+1)^2+2=9k^2+12k+5=3m_2+2,$$

კვლავ **3**-ის არაჯერადი რიცხვი.

რადგან ყოველი მთელი რიცხვი ან **3**-ის ჯერადია, ან **3**-ზე გაყოფისას ნაშთს **1**-ს გვაძლევს, ან ეს ნაშთი **2**-ია, ამიტომ ჩვენ ყველა შესაძლო შემთხვევა განვიხილეთ და ამიტომაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ a^2+1 ჯამის მნიშვნელობა a-ს არც ერთი მთელი მნიშვნელობისათვის მართლაც არ იყოფა **3**-ზე.

ამ მაგალითში ინდუქციის შედეგად მიღებული დასკვნის განზოგადება იმიტომ შევძელით, რომ კერძო შემთხვევათა რაოდენობა სასრული იყო და მსჯელობა თითოეულ ამ შემთხვევისათვის ჩავატარეთ. მაგრამ ხშირად შემთხვევათა რაოდენობა უსასრულოა და მაშინ ჩვენ არ ძალგვიძს მსგავსი მსჯელობის ჩატარება. ასეთ დროს ერთ-ერთი საიმედო დასაყრდენია მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. გავეცნოთ მას.

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

ვთქვათ, $P(n)$ ნატურალურ n რიცხვზე დამოკიდებული რაიმე წინადადებაა. აი ასეთი წინადადების მაგალითები: „n^3-n იყოფა 3-ზე", „არითმეტიკული პროგრესიის n-ური წევრი $a_n=a_1+(n-1)d$ ფორმულით გამოითვლება", „n^2-1 უარყოფითი რიცხვია", „n^2+2n+3 ლუწი რიცხვია".

საზოგადოდ, $P(n)$ შეიძლება ჭეშმარიტი იყოს ყველა n-ისათვის ან მცდარი ყველა n-ისათვის, ან კიდევ — ჭეშმარიტი ზოგიერთი n-ისათვის და მცდარი დანარჩენებისათვის. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი წინადადებებიდან პირველი და მეორე ჭეშმარიტია ყველა ნატურალური n-ისათვის, მესამე — მცდარი ყველა n-ისათვის, ხოლო მეოთხე — ჭეშმარიტი, თუ n კენტია და მცდარი, თუ n ლუწია.

ინდუქციის პრინციპი. **თუ $P(1)$ ჭეშმარიტია და თუ ნებისმიერი ნატურალური m-ისათვის $P(m)$-ის ჭეშმარიტებიდან $P(m+1)$-ის ჭეშმარიტება გამომდინარეობს, მაშინ $P(n)$ ჭეშმარიტია ყველა ნატურალური n-ისათვის.**

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ამტკიცებს, რომ $P(n)$-ის ჭეშმარიტებისათვის ყველა ნატურალური n-ისათვის საკმარისია შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

1°. $P(1)$ ჭეშმარიტია,

2°. ნებისმიერი ნატურალური m-ისათვის $P(m)$-ის ჭეშმარიტებიდან $P(m+1)$-ის ჭეშმარიტება გამომდინარეობს, ესე იგი, როგორიც უნდა იყოს ნატურალური m,

$P(m)\Rightarrow P(m+1)$.

პირველს ამ პირობებიდან **ინდუქციის ბაზისი** ეწოდება, მეორეს — **ინდუქციური ბიჯი**.

მაშასადამე, თუ გვაქვს ბაზისი და ინდუქციური ბიჯის გადადგმაც შეგვიძლია, მაშინ $P(n)$ წინადადება ჭეშმარიტია ყველა ნატურალური n-ისათვის. მართლაც, $P(1)$ ჭეშმარიტია თავისთავად (ბა-

ზისი!). $P(2)$ ჭეშმარიტია, რადგან $P(1) \Rightarrow P(2)$ (ინდუქციური ბიჯი!); ასევე, რადგან $P(2) \Rightarrow P(3)$, ამიტომ $P(3)$-იც ჭეშმარიტია და ასე შემდეგ, ჩვენ სულ ზევით და ზევით მივიწევთ...

ინდუქციის პრინციპი ხატოვნად შეიძლება ასე გამოვთქვათ: თუ შენობის პირველ სართულზე მოხვედრა შეიძლება და ცნობილია, რომ ყოველი სართული ზედა სართულთან არის დაკავშირებული, მაშინ შესაძლებელია ამ შენობის ნებისმიერ სართულზე ასვლა, რაგინდ მაღალი იყოს იგი.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი. სახელდობრ, დავამტკიცოთ, რომ

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ . \tag{5}$$

აღვნიშნოთ ტოლობის მარცხენა ნაწილში მდგომი ჯამი S_n-ით:

$$S_n=1+2+3+\ldots+n.$$

ამასთანავე, S_1 პირობით 1-ის ტოლად მივიღოთ: $S_1=1$. (ამ შენიშვნას იმიტომ ვაკეთებ, რომ S_n ჯამია, ჯამში კი ორი შესაკრები მაინც უნდა იყოს, ესე იგი $n \geqslant 2$ და S_1-ს აზრი არა აქვს. მაგრამ, ცხადია, სრულიად ბუნებრივია, რომ იგი 1-ის ტოლად მივიღოთ. ქვემოთ ასეთ შენიშვნას აღარ გავაკეთებ, მაგრამ მკითხველს ყოველთვის უნდა ახსოვდეს იგი).

ამრიგად, დასამტკიცებელია

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{6}$$

ტოლობა, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

ვთქვათ, $n=1$. მაშინ ჩვენი შეთანხმების ძალით, $S_1=1$. ამავე დროს, თუ $n=1$,

$$\frac{n(n+1)}{2}=1,$$

ესე იგი, (6) ტოლობა ჭეშმარიტია, როცა $n=1$. ეს კი ნიშნავს, რომ ბაზისი გვაქვს. ახლა ინდუქციური ბიჯი გადავდგათ, ესე იგი, დავუშვათ, რომ (6) ტოლობა სამართლიანია, როცა $n=m$ და დავამტკიცოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება მაშინაც, როცა $n=m+1$. სხვანაირად, დავამტკიცოთ

$$S_m=\frac{m(m+1)}{2} \Rightarrow S_{m+1}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

იმპლიკაცია. (მოგაგონებთ, რომ $\Rightarrow$ ნიშანს იმპლიკაციის ნიშანი ჰქვია, ხოლო $P \Rightarrow Q$ სახის ჩანაწერს — იმპლიკაცია).

მართლაც,

$$S_{m+1}=1+2+3+\ldots+m+(m+1)=S_m+(m+1).$$

მაგრამ, დაშვების ძალით

$$S_m=\frac{m(m+1)}{2}$$

და, მაშასადამე,

$$S_{m+1}=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

ამრიგად, ინდუქციური ბიჯიც გადადგმულია. ახლა, ინდუქციის პრინციპის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (6) ტოლობა ჭეშმარიტია ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

გავარკვიოთ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი.

ზემოთ ვთქვი: „მართლაც, $P(1)$ ჭეშმარიტია თავისთავად (ბაზისი!), (2) ჭეშმარიტია, რადგან $P(1)\Rightarrow P(2)$ (ინდუქციური ბიჯი!), ასევე; რადგან $P(2)\Rightarrow P(3)$, ამიტომ $P(3)$-იც ჭეშმარიტია და ასე შემდეგ, ჩვენ სულ ზევით და ზევით მივიწევთ...“

არის თუ არა ეს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის დამტკიცება? არა, ეს დამტკიცება არ არის! ინდუქციის პრინციპს ჩვენ აქსიომად მივიღებთ და თუ მკითხველმა ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა დამტკიცებად ჩათვალა, ეს მხოლოდ იმის სასარგებლოდ ლაპარაკობს, რომ ამ პრინციპის აქსიომად მიღება ყოველმხრივ გამართლებულია. სხვათა შორის, ზოგჯერ ინდუქციის პრინციპს ამტკიცებენ, მაგრამ არა ზემოთ ჩატარებული მსჯელობით, არამედ იმაზე დაყრდნობით, რომ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეში არის უმცირესი რიცხვი. საინტერესოა, რომ შემდეგი ორი წინადადება — „მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი“ და „ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერ სიმრავლეში უმცირესი რიცხვის არსებობა“ ერთმანეთის ეკვივალენტური წინადადებებია და თუ ერთს აქსიომად მივიღებთ, მეორე თეორემად იქცევა. რომელი მივიღოთ აქსიომად — ეს ჩვენზეა დამოკიდებული. ჩვენ, როგორც აღვნიშნეთ, ინდუქციის პრინციპი მივიღეთ აქსიომად.

დასასრულ გეტყვით, რომ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი იმ სახით, რომელიც ზემოთ არის მოყვანილი, პირველად გამოჩენილმა ფრანგმა მეცნიერმა — მათემატიკოსმა, ფიზიკოსმა და ფილოსოფოსმა ბლეზ პასკალმა (*B. Pascal*, **1623—1662**) ჩამოაყალიბა.

მაგალითები

1. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (7)$$

თუ ტოლობის მარცხენა ნაწილს S_n-ით აღვნიშნავთ:

$S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1),$

დასამტკიცებელი ტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \tag{8}$$

შევამოწმოთ ბაზისი. ვთქვათ, $n=1$. მაშინ

$$S_1=2 \text{ და } \frac{n(n+1)(n+2)}{3}=2,$$

ესე იგი, (8) ტოლობა სამართლიანია, როცა $n=1$.

დავუშვათ, რომ იგი სამართლიანია, როცა $n=m$:

$$S_m=\frac{m(m+1)(m+2)}{3} \tag{9}$$

და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა იმ შემთხვევაში, როცა $n=m+1$, ესე იგი, ვაჩვენოთ, რომ (9) ტოლობიდან

$$S_{m+1}=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} \tag{10}$$

ტოლობა გამომდინარეობს. მართლაც,

$$S_{m+1}=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+m(m+1)+(m+1)(m+2)=$$
$$=S_m+(m+1)(m+2)$$

და თუ მხედველობაში მივიღებთ (9) ტოლობას, გვექნება:

$$S_{m+1}=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2)=$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}.$$

მივიღეთ (10) ტოლობა, — ინდუქციური ბიჯიც გადადგმულია და, მაშასადამე, (8), ან რაც იგივეა, (7) ტოლობა დამტკიცებულია.

2. ვიპოვოთ პირველი n კენტი რიცხვის

$$A_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

ჯამი.

ჯერ არასრულ ინდუქციას მივმართოთ — იქნებ რაიმე კანონზომიერება შევნიშნოთ.

$$A_1=1,$$
$$A_2=1+3=4,$$
$$A_3=1+3+5=9,$$
$$A_4=1+3+5+7=16,$$
$$A_5=1+3+5+7+9=25.$$

ამ მაგალითებიდან ადვილად ვასკვნით, რომ თუ $n=1, 2, 3, 4, 5$ მაშინ

$$A_n=n^2.$$

სამართლიანია თუ არა ეს ტოლობა ყველა n-ისათვის? ეს ჯერ არ ვიცით... გამოვთქვათ ჰიპოთეზა: პირველი n კენტი რიცხვის ჯამი

n^2-ის ტოლია და შევეცადოთ მისი დამტკიცება, რისთვისაც ინდუქციის პრინციპს მივმართოთ.

ბაზისი, რა თქმა უნდა, უკვე გვაქვს. ვნახოთ, ჭეშმარიტია თუ არა

$$A_m = m^2 \Rightarrow A_{m+1} = (m+1)^2$$

იმპლიკაცია.

ვინაიდან

$$A_{m+1} = 1+3+5+\dots+(2m-1)+(2m+1)=$$
$$= A_m + (2m+1)$$

და დაშვების საფუძველზე $A_m = m^2$,

$$A_{m+1} = m^2+2m+1=(m+1)^2.$$

ჩვენი ჰიპოთეზა გამართლდა! — მივიღეთ შემდეგი შესანიშნავი ფორმულა:

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2.$$

3. ვიპოვოთ პირველი n ნატურალური რიცხვის კვადრატების ჯამი:

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\dots+n^2.$$

რა თქმა უნდა, აქაც ჯერ არასრულ ინდუქციას უნდა მივმართოთ და რაიმე კანონზომიერების აღმოჩენა ვცადოთ. გვაქვს:

$$S_2(1)=1^2=1,$$
$$S_2(2)=1^2+2^2=5,$$
$$S_2(3)=1^2+2^2+3^2=14,$$
$$S_2(4)=1^2+2^2+3^2+4^2=30,$$
$$S_2(5)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55.$$

ვაკვირდებით მიღებულ რიცხვებს და, სამწუხაროდ, ვერავითარ კანონს ვერ ვამჩნევთ, რომლითაც ისინი 1, 2, 3, 4, 5 რიცხვებთან არიან დაკავშირებული...

იქნებ $S_2(n)$ პირველი n ნატურალური რიცხვის

$$S_1(n)=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ჯამს შევადაროთ? აბა ვნახოთ, რას უდრის $S_1(n)$, როცა $n=1, 2, 3, 4, 5$.

$$S_1(1)=1,\ S_1(2)=3,\ S_1(3)=6,\ S_1(4)=10,\ S_1(5)=15.$$

ამრიგად, რიცხვთა ორი სასრული მიმდევრობა გვაქვს.
რა თანაფარდობაში არიან ისინი ერთმანეთთან? საგულდაგულო დაკვირვება გვიჩვენებს, რომ $S_2(n):S_1(n)$ შეფარდებამ რაღაც უნდა მოგვცეს... აბა ვნახოთ. შევადგინოთ ცხრილი — უფრო თვალსაჩინო იქნება.

n	1	2	3	4	5
$S_2(n):S_1(n)$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$

თითქოს რაღაცას ვამჩნევთ, მაგრამ პირველი და მეოთხე სვეტი „ხელს გვიშლის"... თუმცა არა! საკმარისია შევნიშნოთ, რომ

$$1=\frac{3}{3},\ 3=\frac{9}{3}$$

და ჩვენი ცხრილის მეორე სტრიქონი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{3},\ \frac{11}{3}.$$

არის! გამოვთქვამთ ჰიპოთეზას:

$$S_2(n):S_1(n)=\frac{2n+1}{3},$$

ესე იგი,

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (11)$$

რამდენადაც ბაზისი უკვე არის, ინდუქციური ბიჯის გადადგმაღა გვაკლია. თუ დავუშვებთ, რომ

$$S_2(m)=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

მაშინ გვექნება:

$$S_2(m+1)=1^2+2^2+\dots+m^2+(m+1)^2=$$

$$=S_2(m)+(m+1)^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2=$$

$$=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}=\frac{(m+1)((2m^2+4m)+(3m+6))}{6}=$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

სულ ადვილი შესამჩნევია, რომ ეს ტოლობა მიიღება (11) ტოლობიდან, თუ მასში n-ს $(m+1)$-ით შევცვლით. ამრიგად,

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. გამოვიყვანოთ პირველი n ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

აღვნიშნოთ საძიებელი ჯამი $S_3(n)$-ით

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

და ვიპოვოთ $S_3(n)$, როცა $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. გვაქვს:

$$S_3(1)=1,\ S_3(2)=9,\ S_3(3)=36,\ S_3(4)=100,\ S_3(5)=225.$$

ამ რიცხვების $S_3(1)$, $S_3(2)$, $S_3(3)$, $S_3(4)$ და $S_3(5)$ რიცხვებთან შედარებამ

$$S_3(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{12}$$

ჰიპოთეზურ ტოლობამდე მივყავართ.

ვაჩვენოთ, რომ ეს ჰიპოთეზური კი არა, ჭეშმარიტი ტოლობაა. ამისათვის, ისევე როგორც ზემოთ მხოლოდ ინდუქციური ბიჯის გადადგმა გვჭირდება. გვაქვს:

$$\begin{cases} S_3(m+1)=1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3+(m+1)^3 \\ S_3(m)=\left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_3(m+1)=\frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3=$$

$$=\frac{(m+1)^2(m^2+4m+4)}{4}=\left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

5. დავამტკიცოთ, რომ $11^{n+1}+12^{2n-1}$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოფა 133-ზე n-ის ნებისმიერი ნატურალური მნიშვნელობისათვის.

თუ აღვნიშნავთ $A_n=11^{n+1}+12^{2n-1}$,
მაშინ $A_1=11^2+12=133$, ესე იგი, A_1 იყოფა 133-ზე.

შემდეგ, ვინაიდან

$$A_{m+1}=11^{m+2}+12^{2m+1}=11\cdot 11^{m+1}+11\cdot 12^{2m-1}-$$

$$-11\cdot 12^{2m-1}+12^{2m+1}=11(11^{m+1}+12^{2m-1})+12^{2m-1}(12^2-$$

$$-11)=11A_m+133\cdot 12^{2m-1},$$

ამიტომ, თუ A_m იყოფა 133-ზე, გაიყოფა მასზე A_{m+1}-იც.

ამრიგად, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით მოთხოვნილი ორივე პირობა შესრულებულია და, მაშასადამე, მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა იყოფა 133-ზე ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

6. ვთქვათ, a და b ერთმანეთის არატოლი ნებისმიერი ორი რიცხვია. ცხადია, რომ $a-b$ სხვაობა იყოფა $(a-b)$-ზე. გარდა ამისა, როგორც კარგადაა ცნობილი, $(a-b)$-ზე იყოფა (a^2-b^2)-იცა და (a^3-b^3)-იც. იყოფა თუ არა $(a-b)$-ზე a და b რიცხვების n-ური ხარისხების a^n-b^n სხვაობა?

კითხვაზე პასუხი რომ გავცეთ, ინდუქციის მეთოდს მივმართოთ. სახელდობრ, ვთქვათ, რომ $a^m - b^m$ სხვაობა იყოფა $(a-b)$-ზე და დავამტკიცოთ, რომ უკანასკნელზე იყოფა $a^{m+1} - b^{m+1}$ სხვაობაც. (რამდენადაც ბაზისი უკვე გვაქვს, მხოლოდ ინდუქციური ბიჯია გადასადგმელი.)

წარმოვადგინოთ $a^{m+1} - b^{m+1}$ სხვაობა შემდეგი სახით:

$$a^{m+1} - b^{m+1} = a^m(a-b) + b(a^m - b^m).$$

მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები იყოფა $(a-b)$-ზე, ეს ცხადია. იყოფა მასზე მეორე შესაკრებიც — დაშვების თანახმად. ამიტომ $(a-b)$-ზე გაიყოფა მათი ჯამიც, ესე იგი, $a^{m+1} - b^{m+1}$.

მივიღეთ საგულისხმო შედეგი: თუ $a \neq b$, მაშინ $a^n - b^n$ იყოფა $(a-b)$-ზე, როგორიც უნდა იყოს ნატურალური n რიცხვი.

7. დავამტკიცოთ, რომ თუ $h > -1$, მაშინ

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh. \tag{13}$$

თუ $n = 1$, (13) უტოლობა $1 + h \geqslant 1 + h$ სახეს იღებს, ესე იგი, ჭეშმარიტია.

ბაზისი არის. გადავდგათ ინდუქციური ბიჯი: დავამტკიცოთ, რომ:

$$(1+h)^m \geqslant 1 + mh \Rightarrow (1+h)^{m+1} \geqslant 1 + (m+1)h,$$

მართლაც, რადგან $h > -1$, ამიტომ $1 + h > 0$ და, მაშასადამე,

$$(1+h)^m \geqslant 1 + mh \Rightarrow (1+h)^{m+1} \geqslant (1+mh)(1+h) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+h)^{m+1} \geqslant 1 + (m+1)h + mh^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+h)^{m+1} \geqslant 1 + (m+1)h.$$

რამდენადაც $mh^2 \geqslant 0$.

დავამტკიცეთ მეტად მნიშვნელოვანი (13) უტოლობა. აქვე შევნიშნავ, რომ მას ბერნულის (*Jacob Bernoulli*, **1654—1700**) უტოლობა ეწოდება.

8. მოცემულია ერთეული მონაკვეთი. დავამტკიცოთ, რომ ფარგლითა და სახაზავით შეიძლება ავაგოთ მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $\sqrt{n}$, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

რადგან $\sqrt{1} = 1$, ამიტომ, ცხადია, რომ ინდუქციის ბაზისი არის. ვთქვათ, აგებულია მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $\sqrt{m}$. ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 1 და $\sqrt{m}$. ფარგლითა და სახაზავით ასეთი სამკუთხედის აგება ყოველთვის შეიძლება. პითაგორას თეორემის თანახმად, ამ სამკუთხედის ჰი-

პოტენუზა არის $\sqrt{m+1}$, რაც ამტკიცებს, რომ ფარგლითა და სახაზავით აიგება მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $\sqrt{n}$.

9. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin2n\alpha}{2\sin\alpha}. \qquad (14)$$

(ცხადია, იგულისხმება, რომ $\sin\alpha\neq0$.)

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ბაზისი არის. ვთქვათ,

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2m-1)\alpha=\frac{\sin2m\alpha}{2\sin\alpha}$$

და დავამტკიცოთ, რომ მაშინ:

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2m-1)\alpha+\cos(2m+1)\alpha=$$
$$=\frac{\sin2(m+1)\alpha}{2\sin\alpha}.$$

ამით (14) ტოლობა დამტკიცებული იქნება.

გვაქვს:

$$\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2m-1)\alpha+\cos(2m+1)\alpha=$$
$$=\frac{\sin2m\alpha}{2\sin\alpha}+\cos(2m+1)\alpha=\frac{\sin2m\alpha+2\sin\alpha\cos(2m+1)\alpha}{2\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\sin2m\alpha+\sin2(m+1)\alpha-\sin2m\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin2(m+1)\alpha}{2\sin\alpha}.$$

ზემოთ განხილულ მაგალითებში $P(n)$ წინადადებას ვამტკიცებდით ყველა ნატურალური რიცხვისათვის და ამის შესაბამისად ბაზისად $P(1)$-ს ვიღებდით. შეიძლება მოხდეს, რომ $P(n)$ ჭეშმარიტია არა 1-დან, არამედ რაღაც n_0-დან დაწყებული ყველა ნატურალური რიცხვისათვის. ადვილი მისახვედრია, რომ ინდუქციის მეთოდი ამ შემთხვევაშიც გამოდგება, ოღონდ ბაზისად $P(1)$ კი არა, $P(n_0)$ უნდა მივიღოთ. სხვანაირად, უნდა შევამოწმოთ, რომ:

1°. $P(n_0)$ ჭეშმარიტია,

2°. n_0-ის ტოლი ან n_0-ზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის $P(m)$-ის ჭეშმარიტებიდან $P(m+1)$-ის ჭეშმარიტება გამომდინარეობს, ესე იგი, როგორიც უნდა იყოს $m\geqslant n_0$,

$P(m)\Rightarrow P(m+1)$.

განვიხილოთ სათანადო მაგალითები.

10. n-ის რა მნიშვნელობებისათვის არის სწორი $2^n>n^2$ უტოლობა?

შევადგინოთ ცხრილი

n	1	2	3	4	5	6	7
2^n	2	4	8	16	32	64	128
n^2	1	4	9	16	25	36	49

როგორც ვხედავთ, $2^n > n^2$, თუ $n = 1, 5, 6, 7$, თანაც 2^n-ისა და n^2-ის ზრდის სიჩქარე გვაფიქრებინებს, რომ მოცემული უტოლობა სწორია 4-ზე მეტი ყველა n-ისათვის. ვაჩვენოთ, რომ მართლაც ასეა.

აქ $n_0 = 5$ და ბაზისი რომ გვაქვს, ცხადია. ვთქვათ, $m \geqslant 5$ და $2^m > m^2$. შევამოწმოთ, რომ მაშინ:

$$2^{m+1} > (m+1)^2.$$

მართლაც, თუ $2^m > m^2$ დაშვებით ვისარგებლებთ, გვექნება:

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2m^2 = m^2 + m^2 > m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

რადგან, როგორც ადვილი შესამოწმებელია,

$$m \geqslant 5 \Rightarrow m^2 > 2m + 1.$$

მაშასადამე, მოცემული უტოლობა სწორია, თუ $n = 1$ ან $n \geqslant 5$.

11. დავამტკიცოთ, ასე ვთქვათ, ბერნულის გაძლიერებული უტოლობა:

$$(h > -1,\ h \neq 0 \text{ და } n \geqslant 2) \Rightarrow (1+h)^n > 1 + nh. \qquad (14)$$

ცხადია, რომ, თუ $h > -1$ და $h \neq 0$, მაშინ

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h.$$

ამრიგად, ბაზისი გვაქვს. დავუშვათ, რომ $m \geqslant 2$ და

$$(1+h)^m > 1 + mh.$$

(რა თქმა უნდა, იგულისხმება, რომ $h > -1$ და $h \neq 0$.) გავამრავლოთ ეს უტოლობა $(1+h)$-ზე. მივიღებთ:

$$(1+h)^{m+1} > (1+mh)(1+h) =$$
$$= 1 + (m+1)h + mh^2 > 1 + (m+1)h.$$

ინდუქციური ბიჯიც გადადგმულია. ეს კი ნიშნავს, რომ (14) დამტკიცებულია.

სხვათა შორის, მიღებული შედეგი გვარწმუნებს, რომ (13) უტოლობაში ტოლობის ნიშანი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, თუ $n = 1$ ან $h = 0$.

12. ზემოთ ვნახეთ, რომ $a^n - b^n$ იყოფა $(a-b)$-ზე, როგორიც უნდა იყოს ნატურალური n რიცხვი (იგულისხმება, რომ $a \neq b$). რას უდრის განაყოფი?

მივმართოთ არასრული ინდუქციას.

$(a-b):(a-b)=1,$

$(a^2-b^2):(a-b)=a+b,$

$(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2,$

$(a^4-b^4):(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3.$

ჰიპოთეზა: თუ $n\geqslant 2$, მაშინ:

$$(a^n-b^n):(a-b)=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1}. \qquad (15)$$

ვნახოთ, სწორია თუ არა ჩვენი ჰიპოთეზა. რამდენადაც (15) ჭეშმარიტია, როცა $n=2$, ბაზისი გვაქვს. ვთქვათ, $m\geqslant 2$ და

$$(a^m-b^m):(a-b)=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\dots+b^{m-1}$$

მაშინ

$$(a^{m+1}-b^{m+1}):(a-b)=(a^{m+1}-ab^m+ab^m-b^{m+1}):(a-b)=$$
$$=a(a^m-b^m):(a-b)+b^m(a-b):(a-b)=$$
$$=a(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\dots+b^{m-1})+b^m=$$
$$=a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\dots+ab^{m-1}+b^m.$$

ჩვენი ჰიპოთეზა გამართლდა — (15) ტოლობა იგივეობაა 1-ზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის.

13. ნატურალური n რიცხვის რა მნიშვნელობათათვის არის

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ ? \qquad (16)$$

როცა $n=1$, უტოლობა რომ სწორი არ არის, ცხადია. ავიღოთ $n=2$:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1.$$

მივიღეთ სწორი უტოლობა. სწორ უტოლობას მივიღებთ მაშინაც, როცა $n=3$ და $n=4$, თანაც მარცხენა ნაწილი საგრძნობლად სწრაფად იზრდება მარჯვენაზე. ეს გვაფიქრებინებს, რომ (16) უტოლობა სწორია 1-ზე მეტი ყველა n-ისათვის. შევამოწმოთ ეს ჰიპოთეზა — ვისარგებლოთ ინდუქციის მეთოდით. ბაზისი, ესე იგი $P(2)$, რა თქმა უნდა, გვაქვს. თუკი ინდუქციური ბიჯიც გადავდგით, ყველაფერი რიგზე იქნება.

ვთქვათ, (16) სამართლიანია, როცა $n=m$. მაშინ:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}>\sqrt{m+1}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}>\sqrt{m+1}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+m}>m\Leftrightarrow m>0.$$

ჰიპოტეზა გამართლდა!

მიაქციეთ ყურადღება: უკანასკნელი მსჯელობისას ჩვენ სულაც არ გვისარგებლია იმით, რომ $m \geqslant 2$ — მსჯელობა ძალაშია თუკი $m > 0$. მაგრამ $P(1)$ მცდარია და ამიტომ $P(n)$ მხოლოდ 1-ზე მეტი n-ისათვის არის ჭეშმარიტი. ეს გვიჩვენებს, რომ ინდუქციით რაიმე ფაქტის დამტკიცებისას აუცილებელია როგორც $P(n_0)$-ის, ისევე $P(m) \Rightarrow P(m+1)$ იმპლიკაციის ჭეშმარიტების დადგენა.

14. ვიპოვოთ n-ური წევრის ფორმულა შემდეგნაირად განსაზღვრული რიცხვთა (a_n) მიმდევრობისა:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\ (n \geqslant 3).$$

ჯერჯერობით საძიებელი ფორმულის „ნიშანწყალიც" არ ჩანს... მივმართოთ არასრულ ინდუქციას, იქნებ მან მოგვცეს რამე.

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 5,$$
$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 9,$$
$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 17,$$
$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 33.$$

საჭიროა გამოთვლების გაგრძელება? ალბათ არა, — მიღებული რიცხვები ხომ 1-ით გადიდებული 2-ის ხარისხებია:

$$5 = 2^2 + 1,\ 9 = 2^3 + 1,\ 17 = 2^4 + 1,\ 33 = 2^5 + 1.$$

თუ, გარდა ამისა, გავითვალისწინებთ, რომ $3 = 2^1 + 1$, $2 = 2^0 + 1$, მიმდევრობის პირველი ექვსი წევრისთვის შეგვიძლია შემდეგი ფორმულა დავწეროთ:

$$a_n = 2^{n-1} + 1. \tag{17}$$

დავამტკიცოთ ინდუქციით, რომ ამ ფორმულით მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის გამოთვლაც შეიძლება.

ეჭვგარეშეა, რომ ინდუქციური ბიჯი $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ რეკურენტულ თანაფარდობას უნდა ეყრდნობოდეს. მაგრამ, როგორ ვიმსჯელოთ — აქ ხომ n-თან ერთად $(n-1)$-იცა და $(n-2)$-იც მონაწილეობს? როგორ და ასე: ვთქვათ, $m \geqslant 3$ და (17) ტოლობა სამართლიანია m-ისა და $(m-1)$-სათვის; დავამტკიცოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $(m+1)$-სათვისაც. მართლაც,

$$a_{m+1} = 3a_m - 2a_{m-1} = 3(2^{m-1} + 1) - 2(2^{m-2} + 1) = 2^m + 1.$$

ფორმულა დამტკიცებულია.

რა თქმა უნდა, მტკიცება იმისა, რომ აქ ჩვენ უშუალოდ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით ვისარგებლეთ, არ შეიძლება. ამასთანავე, ისიც ცხადია, რომ ჩატარებული მსჯელობა რაღაც მონათესავე პრინციპს ემყარება, მაგრამ ყველაფერი ისე ნათელია, რომ აღარ გადავტვირთავ მკითხველს ლოგიკური ნიუანსებით.

ბლეზ პასკალი
(1623 – 1662)

„აზრი გვამაღლებს ჩვენ..."

ამ ნარკვევში მინდა გესაუბროთ ერთ გამორჩეულ პიროვნებაზე და მის მიერ აღმოჩენილ ერთ ულამაზეს თეორემაზე.

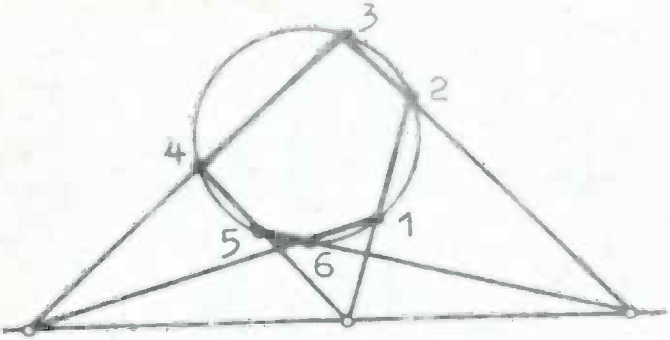
ეს პიროვნებაა ბლეზ პასკალი — დიდი მოაზროვნე, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, მორალისტი. თეორემა კი... თუმცა ამაზე ქვემოთ.

ბლეზ პასკალი ნიჭიერების ადრეული გამოვლინების უბრწყინვალესი და ალბათ უიშვიათესი მაგალითია. იგი დაიბადა 1623 წლის 19 ივნისს საფრანგეთში, ქალაქ კლერმონში. მისი მამა — ეტიენ პასკალი სასამართლო უწყებაში მუშაობდა, იგი დიდად განათლებული კაცი იყო — ფლობდა კლასიკურსა და უცხოურ ენებს, კარგად იცოდა ფილოსოფია, ისტორია, ლიტერატურა, ფიზიკა, მათემატიკა. ეს უკანასკნელი განსაკუთრებით უყვარდა და აკი დატოვა კიდეც თავისი სახელი მათემატიკის ისტორიაში: მის მიერ გამოკვლეულ ერთ წირს პასკალის ლოკოკინა ჰქვია.

პატარა ბლეზმა ადრევე გამოამჟღავნა ფენომენური ნიჭი, მაგრამ რამდენადაც ის ფიზიკურად ძლიერ სუსტი იყო, მამა, რომელიც თავად ხელმძღვანელობდა შვილების აღზრდა-განათლებას, მეტად ფრთხილობდა — ასწავლიდა ვაჟს ჰუმანიტარულ საგნებს, მათემატიკას კი — არა. მეტიც, ყველა მათემატიკური წიგნი საგულდაგულოდ ჰქონდა შენახული, ბლეზს რომ არ ენახა. 1631 წელს ოჯახი პარიზში გადასახლდა. ეტიენ პასკალი დაუახლოვდა იქაურ მათემატიკოსებს და რეგულარულად ესწრებოდა მათი წრის სხდომებს. შვილმა იცოდა მამის გატაცება მათემატიკით და თავადაც უნდოდა გასცნობოდა მას. მისი და იგონებს: „ის ხშირად ევედრებოდა მამას, მათემატიკა ესწავლებინა მისთვის. მამაჩემი უარზე იდგა, თუმცაღა ჰპირდებოდა, როგორც კი ლათინურისა და ბერძნულის სწავლას დაასრულებ, მათემატიკასაც გასწავლითო. ამ წინააღმდეგობას რომ წააწყდა, ჩემმა ძმამ ერთხელ სთხოვა, ის მაინც მითხარი, რა არის ეს მეცნიერება და რას შეისწავლის იგი. მამაჩემმა ზოგადად აუხსნა: ესაა სწორი ფიგურების აგებისა მათ შორის თანაფარდობების აღმოჩენის საშუალებაო, ხოლო იმავდროულად, არა მარტო ლაპარაკი, ამიერიდან ფიქრიც კი აუკრძალა ამ საგანზე". ახლა წარმოიდგინეთ მამის განცვიფრება, როდესაც ერთ დღეს ბავშვის ოთახში შესვლისას მან ნახა, რომ მისი თორმეტი წლის ვაჟი ცდილობს დაამტკიცოს თეორემა იმის შესახებ, რომ სამკუთხედის შიგა კუთხეთა ჯამი ორი მართი კუთხის ტოლია. აქამდე იგი დამოუკიდებლად მისულა — თავად შეუქმნია გეომეტრია. შეუქმნია ისე, რომ ტერმინოლოგიაც არ იცოდა: წრეს რგოლს უწოდებდა, მონაკვეთს — ჯოხს...

ამ დღიდან ბლეზმა მამის ხელმძღვანელობით მათემატიკის სისტემატური შესწავლა დაიწყო. მან სწრაფად აითვისა ძირითადი საფუძვლები და ცამეტი წლისამ მოიპოვა უფლება იმ სხდომებზე დასწრებისა, რომლებზეც მამამისი დადიოდა... პირველ ხანებში იგი მხოლოდ მსმენელი იყო, მაგრამ სულ მალე თავადაც დაიწყო მოხსენებების კითხვა. 1639 წელს კი დაიბეჭდა თექვსმეტი წლის პასკალის პირველი სამეცნიერო გამოკვლევა. სწორედ აქ იყო ჩამოყალიბებული თეორემა, რომელიც დასაწყისში ვახსენე. გავეცნოთ მის შინაარსს.

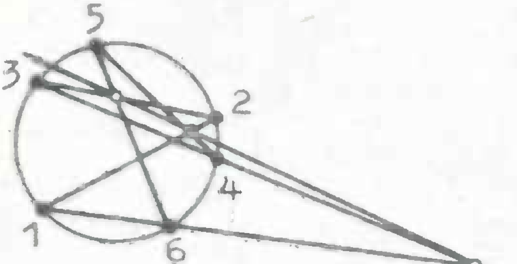
ვინ არ იცის, რომ ნებისმიერი ორი წერტილისათვის მოიძებნება მათზე გამავალი წრფე, ესე იგი, ორი წერტილი ყოველთვის ერთ წრფეზე მდებარეობს. რა შეიძლება ითქვას სამი წერტილის შემთხვევაში? აქ საქმე გაცილებით რთულადაა, ძალიან იშვიათად, რომ ნებისმიერად აღებული სამი წერტილი ერთ წრფეზე მოხვდეს! ჰოდა, პასკალმა აღმოაჩინა, რომ თუ წრეწირში ჩახაზულია ექვს-



ნახ. 1

კუთხედი, რომლის წვეროებია **1, 2, 3, 4, 5, 6** წერტილები, მაშინ სამი წერტილი მიღებული შესაბამისად **12** და **45**, **23** და **56**, **34** და **61** გვერდების გაგრძელებათა გადაკვეთით, ერთ წრფეზეა მოთავსებული (ნახ. 1. აქვე შევნიშნავ, რომ თუ რომელიმე ორი გვერდი ურთიერთპარალელურია, მათი გაგრძელებანი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში იკვეთებიან, ეს წერტილი კი ყველა წრფეზე მდებარეობს).

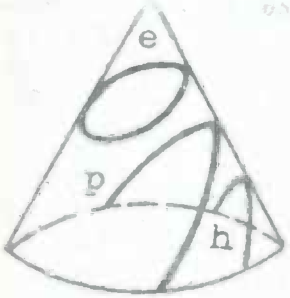
უნდა მოგახსენოთ, რომ მე ჩამოვაყალიბე პასკალის თეორემის ერთ-ერთი და ამასთან უმარტივესი ვარიანტი. სინამდვილეში, თექვსმეტი წლის ჭაბუკმა მეტი დაამტკიცა — თურმე სულაც არაა აუცილებელი, რომ ექვსკუთხედი ამოზნექილი იყოს — მისი გვერდები შეიძლება იკვეთებოდეს კიდეც. სხვანაირად საკმარისია 123456 ექვსმდგენიანი ჩაკეტილი ტეხილის წვეროები წრეწირზე იყოს, რომ ზემოთ ნახსენებ წრფეთა სამი წყვილის გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეზე აღმოჩნდეს (ნახ. 2).

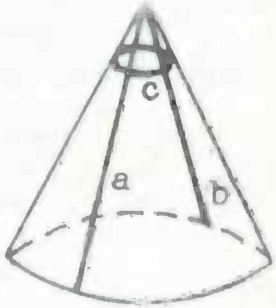


ნახ 2.

მაგრამ ესეც ცოტაა! იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ წრეწირის ნაცვლად ნებისმიერ კონუსურ კვეთს განვიხილავთ — ელიფსს, პარაბოლას, ჰიპერბოლას... აქ ალბათ საჭიროა ითქვას, თუ რა არის კონუსური კვეთი. ავიღოთ კონუსური ზედაპირი — აი ისეთი, ძაბ-

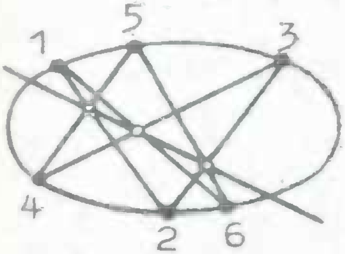
რის ფორმა რომ აქვს. ის რომ სიბრტყით გადავკვეთოთ, იმის შე-ხედვით, თუ რა დახრა აქვს ამ სიბრტყეს, მივიღებთ სამ სხვადასხვა წირს — ელიფსს (იგი მე-3 ნახატზე *e* ასოთია აღნიშნული), პარაბოლას (*p*), ჰიპერბოლას (*h*). სამივე ამ წირს კონუსური კვეთი ეწოდება. მაგრამ მკვეთი სიბრტყე შეიძლება კონუსის ღერძის მართობიც იყოს

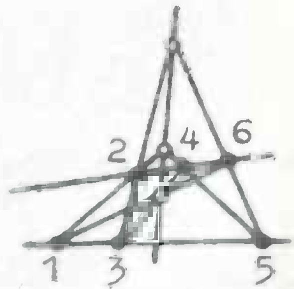




ნახ. 4

ანდა კონუსის წვეროზე გადიოდეს. პირველ შემთხვევაში წრეწირს მივიღებთ, მეორეში — *a* და *b* სხივთა წყვილს (ნახ. 4). ამიტომ წრეწირიცა და საერთო სათავის მქონე სხივთა წყვილიც, ბუნებრივია, კონუსურ კვეთებს მივაკუთვნოთ. მე-5 ნახატზე ნათლად ჩანს პასკალის თეორემის სამართლიანობა ელიფსისა და სხივებისათვის.





ნახ. 5

ახლა უკვე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ პასკალის მიერ მიღებული ზოგადი შედეგი: **როგორიც უნდა იყოს კონუსურ კვეთზე აღებული ექვსი — 1, 2, 3, 4, 5, 6 წერტილი, წრფეთა (12, 45), (23, 56) და (34, 61) წყვილების გადაკვეთის წერტილები ერთ წრფეს ეკუთვნიან.**

ამ თეორემას პასკალის თეორემას უწოდებენ. ალბათ დამეთანხმებით, მართლაცდა საოცარი, მოულოდნელი თვისება ჰქონია კონუ-

სურ კუთხში ჩახაზულ ექვსმდგენიან ჩაკეტილ ტეხილს. მოულოდნელობის ეს ეფექტი გვაძლევს უფლებას ვთქვათ, რომ პასკალის თეორემა ერთ-ერთი ულამაზესი თეორემაა გეომეტრიისა. საქმე ის არის, რომ ესთეტიკური არც თუ იშვიათად მოულოდნელობასთან არის დაკავშირებული. აბა დაფიქრდით: განა ლამაზი არ არის, როცა მოჭადრაკე ფიგურის მოულოდნელი შეწირვით მოწინააღმდეგის მეფეს აშამათებს? ან, რამდენჯერ მოვხიბლულვართ ფეხბურთის მატჩის დროს, როცა ბურთი კარის ბადეში მოულოდნელი დარტყმის შემდეგ გაეხვევა?! მოულოდნელობის ეფექტია პასკალის თეორემაშიც.

მათემატიკასაც აქვს თავისი სილამაზე...

პასკალის ამ ერთგვერდიანმა შრომამ, — მასში მხოლოდ ძირითადი შედეგები იყო ჩამოყალიბებული, დამტკიცება ავტორს აქ არ მოუცია, — ფრიად მიიპყრო მეცნიერთა ყურადღება. მან ამაყი და მეტისმეტად თავდაჯერილი დეკარტიც კი დააინტერესა, თუმცა მაინც არა სჯეროდა, რომ ავტორი მხოლოდ თექვსმეტი წლისა იყო.

პასკალი გამუდმებით შრომობს. ბრწყინვალე იდეა მოუვიდა — გამომთვლელი მანქანის შექმნა. მოკლე ხანში მან თავის ჩანაფიქრს ხორცი შეასხა — დაამზადა კაცობრიობის ისტორიაში პირველი ასეთი მანქანა. ამან კიდევ უფრო გაუთქვა სახელი ჭაბუკ მეცნიერს, რამაც თავის მხრივ ძალაც კი შეჰმატა მას, მაგრამ... სუსტი ჯანი ვეღარ უძლებს ასეთ დატვირთვას. ბლეზს თავის ტკივილები დაეწყო. მოგვიანებით მას არაერთხელ უთქვამს თურმე: „მას შემდეგ, რაც თვრამეტისა გავხდი, ერთი დღეც არ მახსოვს ტკივილისა და ტანჯვის გარეშე". ამას კიდევ ერთი უბედურება დაემატა: ერთხელ პასკალი ეტლით მიხეირნობდა. ხიდზე გადასვლისას ცხენები დაფრთხნენ, პირველი წყვილი წყალში გადაცვივდა... ბედად ლვედი გაწყდა და ეტლი ზედ ხიდის პირზე შეჩერდა. პასკალი სასწაულით გადაურჩა სიკვდილს, მაგრამ კატასტროფამ ისე მძიმედ იმოქმედა მასზე, რომ ჰალუცინაციები დაეწყო, რაც სიცოცხლის ბოლომდე გაჰყვა... ამ ტრაგიკული ცხოვრების ფონზე ნათელ კუნძულებად მოჩანს დროის მონაკვეთები, როდესაც პასკალი შემოქმედებით აღტკინებას განიცდიდა და მეცნიერებას ახალ-ახალი აღმოჩენებით ამდიდრებდა.

ტორიჩელის მიერ მიღებულ შედეგებს რომ გაეცნო, პასკალი ატმოსფერული წნევის საკითხებით დაინტერესდა. მან რამდენიმე მახვილგონივრული ცდა ჩაატარა — გაზომა ატმოსფერული წნევა სხვადასხვა სიმაღლეზე და მათ საფუძველზე ჩამოაყალიბა კანონი,

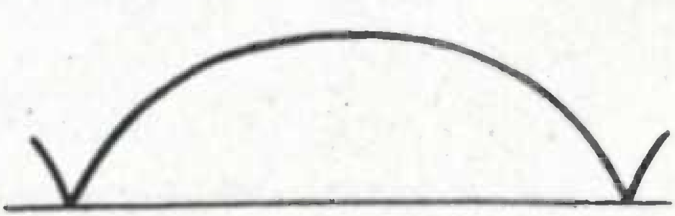
რომელიც ახლა პასკალის კანონის სახელითაა ცნობილი და ფიზიკის ყველა სახელმძღვანელოშია შეტანილი.

შემდეგ ისევ მათემატიკა...

იმ დროის უთვალსაჩინოეს მათემატიკოს პიერ ფერმასთან ერთად პასკალი იკვლევს აზარტულ თამაშებთან დაკავშირებულ მათემატიკურ ამოცანებს და საფუძველს უყრის ალბათობის თეორიას.

გადის ხანი და პასკალი თავს ანებებს მათემატიკასაც და ფიზიკასაც... მას ღვთისმეტყველება იტაცებს — ის აქვეყნებს იეზუიტების წინააღმდეგ მიმართულ წერილებს. ეს წერილები ფრანგული სატირული პროზის შედევრადაა მიჩნეული. „პასკალი უდიდესი გეომეტრია და ამავე დროს უდიდესი მწერალი“ — ბალზაკის ამ სიტყვებს კომენტარი არ სჭირდება. თითოეულ წერილზე პასკალი ორ-სამ კვირას მუშაობდა, წონიდა ყოველ წინადადებას, ყოველ სიტყვას. საგულისხმოა მისი შენიშვნა, რომელიც ერთ-ერთ წერილს ახლავს: „ეს წერილი გრძელი გამოვიდა, რადგან დრო არ მქონდა, ის უფრო მოკლედ დამეწერა“. პარალელურად პასკალი ფიქრობს თავის ფილოსოფიურ ნაწარმოებებზე, რომელიც უკვე მისი გარდაცვალების შემდეგ გამოვიდა და „აზრები“ ჰქვია.

და უცბად... ისევ მათემატიკა! არ დაიჯერებთ, რომ ეს შემობრუნება გამოიწვია... კბილის ტკივილმა!? ერთ ღამეს პასკალს საშინლად ატკივდა კბილი, იგი ადგილს ვერ პოულობდა. მას მოაგონდა ერთი ამოცანა, რომელიც თავის დროზე ვერავინ ამოხსნა (ამოცანა დაკავშირებულია წირთან, რომელსაც ციკლოიდა ჰქვია. ეს წირი მე-6 ნახატზეა გამოსახული). მან დაიწყო ამოცანაზე ფიქრი, ამოხსნა იგი (ზეპირად!). ამას მოჰყვა სხვა ამოცანები: მეორე, მესამე, მეოთხე... პასკალი გატაცებით ხსნიდა მათ (ფაქტობრივად ეს თეორემები იყო). კბილის ტკივილი გადაავიწყდა, მისთვის ქვეყნად ციკლოიდის გარდა არაფერი არსებობდა! ეს იყო სასწაულებრივი აღმაფრენა, რომლის მსგავსი ძნელი წარმოსადგენია... შემდგომ, ამ ერთი ღამის ნაფიქრალის ქაღალდზე გადატანას რვა (!) დღის დაძაბული შრომა დასჭირდა. მისი და გვამცნობს, რომ მთელი ამ ხნის განმავლობაში „ბლეზი გამუდმებით წერდა და წერდა, წერდა მანამ, სანამ მის ხელს წერა შეეძლო“.



ნახ. 6

პასკალის ეს შრომა მეტად მნიშვნელოვანი მათემატიკური თხზულებაა. თავის დროზე მას დიდი შთაბეჭდილება მოუხდენია ლაიბნიცზე. მათემატიკის ისტორიის ერთი ავტორიტეტული მკვლევარი წერს, რომ პასკალის ამ შრომაში მოთავსებულმა ჩანახატმა ლაიბნიცი დიფერენციალური აღრიცხვის აღმოჩენამდე მიიყვანაო.

მაგრამ ეს იყო და ეს... პასკალმა საბოლოოდ მიატოვა მათემატიკა. მრავალნატანჯი, ფიზიკურად დაუძლურებული გარდაიცვალა 39 წლისა, 1662 წლის 19 აგვისტოს.

როგორც პიროვნება, პასკალი ამაყი და თავმოყვარე ყოფილა, მაგრამ ამავე დროს მეტად გულუხვი და მოწყალე. იგი ყოველთვის ხელს უმართავდა გაჭირვებულთ, გლახაკთ, ყოფილა შემთხვევა, თვითონ არა ჰქონია, ვალი აუღია და სხვა გაუკითხავს. „ადამიანის სიდიადე ის არის, რომ თავის უბადრუკობას გრძნობს. ხე არ გრძნობს თავის უბადრუკობას. მაშასადამე, მხოლოდ უბადრუკი გრძნობს თავის უბადრუკობას, მაგრამ მისი სიდიადეც ესაა სწორედ" — წერდა პასკალი. იგი დიდად აფასებდა ადამიანის გონიერებას... „მთელი ჩვენი ღირსება აზროვნებაა. სწორედ აზრი გვამაღლებს ჩვენ და არა დრო და სივრცე, რომლებშიც ჩაკარგულნი ვართ, როგორც ქვიშის მარცვლები. მაშ, ვეცადოთ ვიაზროვნოთ ღირსეულად. აი, ზნეობის საფუძველთა საფუძველი".

პასკალი ამაღლებული გენიოსია და იგი აამაღლა არა დრომა და სივრცემ, არამედ მისსავე აზრმა!

...მათ ჩემი მოკვლა შეუძლიათ, მაგრამ თუკი მე ვაზროვნებ, ჩემს წინაშე ისინი უძლურნი არიან.

ბლეზ პასკალი

პასკალის სამკუთხედი

მათემატიკის არა ერთსა და ორ დარგში პოულობს გამოყენებას ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ერთი ძალზე მარტივი, მაგრამ ამავე დროს საინტერესო და მნიშვნელოვანი ცხრილი, რომელიც პირველად დიდმა ფრანგმა მეცნიერმა ბლეზ პასკალმა განიხილა. (პასკალის შესახებ იხ. „რანი გვამადლებს ჩვენ"). სწორედ ამიტომ უწოდებენ მას პასკალის სამკუთხედს. კი მაგრამ, — იკითხავთ თქვენ, — სამკუთხედი რაღა შუაშია? ნუ ჩქარობთ, მალე ყველაფერი ცხადი გახდება.

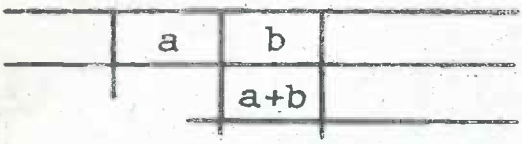
შევადგინოთ პასკალის სამკუთხედი

აიღეთ ქაღალდის ფურცელი და დახაზეთ მასზე 100-უჯრიანი კვადრატული ცხრილი. რადგანაც ცხრილი კვადრატულია და 100 უჯრისაგან შედგება, ცხადია, მასში 10 სტრიქონია და ამდენივე სვეტი. თითოეულ სტრიქონსა და სვეტში ათ-ათი უჯრაა. ამ უჯრებში გარკვეული წესით უნდა ჩავწეროთ რიცხვები, რომელთაგან ზოგიერთი სამნიშნა იქნება. გაითვალისწინეთ ეს ცხრილის დახაზვისას.

მაშ ასე, ცხრილი დახაზულია! დავიწყოთ რიცხვების ჩაწერა.

პირველი სვეტის ათივე უჯრაში ჩაწერეთ რიცხვი 1 და, ბარემ, პირველი სტრიქონის დანარჩენ ცხრა უჯრაში 0. პირველი სტრიქონი შევსებულია. დარჩენილი სტრიქონების უჯრებში რიცხვები ჩაწერეთ მიმდევრობით — ჯერ მეორე სტრიქონი შეავსეთ, მერე — მესამე, მერე — მეოთხე და ასე შემდეგ. ამასთანავე, ცხადია, ჩაწერეთ რიცხვები მარცხნიდან მარჯვნივ (ნუ დაგავიწყდებათ, რომ ყველა სტრიქონში პირველი უჯრა უკვე დაკავებულია — მასში 1-იანი წე-

რია). ჩაწერისას ისარგებლეთ ეგრეთ წოდებული გადასვლის წესით. თუ რა წესია ეს, ამას 1-ლი ნახატი გიჩვენებთ.



ნახ. 1

როგორც ხედავთ, ვინაიდან პირველი სვეტის პირველ უჯრაში 1 წერია, მეორეში კი — 0, ესე იგი $a=1$, $b=0$, მეორე სტრიქონის მეორე უჯრაში უნდა ჩაწეროთ 1 ($a+b=1$). ყველა დანარჩენი უჯრისათვის $a=b=0$ და, მაშასადამე, მეორე სტრიქონიც შევსებულია. გადადით მესამეზე. აქ პირველ უჯრაში 1 უკვე წერია, მეორეში უნდა ჩაწეროთ 2 ($a=1$, $b=1$, $a+b=2$), ხოლო მესამეში — 1 ($a=1$, $b=0$, $a+b=1$). დანარჩენ უჯრებში — ნულები. გააგრძელეთ იმავე წესით.

ეჭვი არ მეპარება, რომ ყველა სტრიქონი შეავსეთ. კეთილი და პატიოსანი. მოდით, ყოველი შემთხვევისათვის შევამოწმოთ — ვნახოთ რა რიცხვები გიწერიათ, მაგალითად, მეექვსე და ბოლოს წინა — მეცხრე სტრიქონებში. თუ არაფერი შეგეშალათ, მეექვსე სტრიქონი ასეთი უნდა იყოს:

1 5 10 10 5 1 0 0 0 0,

ხოლო მეცხრე — ასეთი:

1 8 28 56 70 56 28 8 1 0.

ასე გაქვთ, არა? ძალიან კარგი!

შესაძლოა იკითხოთ: რატომ ავიღეთ თავიდან მაინცდამაინც 10×10 ცხრილი, განა არ შეგვეძლო 15×15 ან, ვთქვათ, 20×20 აგვეღო? რა თქმა უნდა, შეიძლებოდა! მთავარია ვიცოდეთ გადასვლის წესი, თორემ ცხრილს სადამდეც გვინდა, გავაგრძელებთ. თუ სურვილი გაქვთ, შეგიძლიათ მომდევნო სტრიქონებიც დაწეროთ, მაგრამ ამის საჭიროება არ არის — ათი სტრიქონიც კმარა, რომ გარკვეული დასკვნები გავაკეთოთ...

ახლა კარგად დააკვირდით თქვენს მიერ შედგენილ ცხრილს, უფრო სწორად, მის იმ ნაწილს, სადაც ნულის არატოლი რიცხვები წერია. ხომ ადგენენ ეს რიცხვები სამკუთხედს? ადგენენ! თანაც, მისი ორი „გვერდი" — ვერტიკალური და ირიბი მხოლოდ ერთიანებისაგანაა შედგენილი, ხოლო ჰორიზონტალურ „გვერდს" შემდეგი სახე აქვს:

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.

ეს ჩვენი ცხრილის ბოლო — მეათე სტრიქონია.

აი, სწორედ რიცხვთა ამ სამკუთხედს ჰქვია პასკალის სახელი. სხვათა შორის, თვად პასკალი მას არითმეტიკულ სამკუთხედს უწოდებდა. ისე, სიმართლე რომ გითხრათ, ეს პასკალის სამკუთხედი კი არ არის, — ეს მისი მხოლოდ ნაწილია. აკი ვთქვი, ცხრილი შეიძლება უსასრულოდ გავაგრძელოთ... მაგრამ, ცოდვა მაინც არ ჩაიდენია — პასკალის სამკუთხედის მთლიანად ამოწერა არავის არ შეუძლია! ამიტომაც, როგორც წესი, საკმარისია მისი საწყისი სტრიქონები დავწეროთ...

მიღებული რიცხვითი სამკუთხედი მოსახერხებელია სხვანაირად — ტოლფერდა სამკუთხედის სახით წარმოვადგინოთ. აი, რას მივიღებთ:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

რითია ეს სამკუთხედი შესანიშნავი? ამას ახლავე ვნახავთ. ოღონდ წინასწარ ერთი შეთანხმება. სახელდობრ, სტრიქონების ნუმერაცია 1-ით კი არა, 0-ით დავიწყოთ. ამრიგად, ნულოვანი სტრიქონი ერთი რიცხვისაგან შედგება, ეს რიცხვია 1, პირველ სტრიქონში ორი რიცხვია. მეორეში სამი და ასე შემდეგ. ქვემოთ დარწმუნდებით, რომ ასეთი გადანომვრა სტრიქონებისა უფრო ხელსაყრელია, როგორც გამოყენების თვალსაზრისით, ისე თავად პასკალის სამკუთხედის თვისებების მოკლედ, მოხდენილად ჩამოყალიბებისათვის.

დავითვალოთ ქვესიმრავლეები

ავიღოთ ნებისმიერი ოთხელემენტიანი A სიმრავლე. თუ რა ბუნებისაა მისი ელემენტები, ეს ჩვენთვის სულაც არაა საინტერესო! — არსებითი მხოლოდ ის არის, რომ A ოთხ ელემენტს შეიცავს. აღვნიშნოთ ეს ელემენტები a, b, c, d-თი. ამრიგად,

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

დავითვალოთ მისი ქვესიმრავლეები (ცარიელი სიმრავლისა და თვით A სიმრავლის ჩათვლით).

ცხადია, რომ A-ს ქვესიმრავლე ან სულ არ შეიცავს ელემენტს, ანდა შეიცავს ერთ, ორ, სამ, ოთხ ელემენტს. თუ გავიხსენებთ, რომ ცარიელი, ესე იგი უელემენტო სიმრავლის აღსანიშნავად $\varnothing$ სიმბოლო იხმარება, a-ს ქვესიმრავლეები იქნება:

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$.

დავაჯგუფოთ ეს ქვესიმრავლეები ელემენტების რაოდენობის მიხედვით და შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი, რომლის პირველ სტრიქონში ქვესიმრავლის ელემენტთა რაოდენობა წერია, მეორეში — თვით ქვესიმრავლე, მესამეში კი — მოცემული რაოდენობის ელემენტთა შემცველ ქვესიმრავლეთა რაოდენობა.

0	1	2	3	4
$\varnothing$	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$	$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$	$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$	$\{a,b,c,d\}$
1	4	6	4	1

შეხედეთ ამ ცხრილის ბოლო

1 4 6 4 1

სტრიქონს. ნაცნობია, არა? რა თქმა უნდა, — ეს ხომ პასკალის სამკუთხედის მეოთხე სტრიქონია!

მიღებული შედეგი შემთხვევითი არ არის, ნულ —, ერთ —, ორ — ან სამელემენტიანი სიმრავლე რომ აგვეღო, მისი ქვესიმრავლეები დაგვეჯგუფებინა და შემდეგ დაგვეთვალა, პასკალის სამკუთხედის შესაბამისად ნულოვან, პირველ, მეორე ან მესამე სტრიქონს მივიღებდით. ამას თქვენ თავად ადვილად შეამოწმებთ, ჩვენ კი ხუთელემენტიანი

$B=\{a, b, c, d, e\}$

სიმრავლე განვიხილოთ და დავრწმუნდეთ, რომ აქაც მსგავსი ვითარება გვაქვს.

ხომ არ ფიქრობთ, რომ B-ს ყველა სიმრავლის ამოწერას, დაჯგუფებას და დათვლას ვაპირებ? სულაც არა! მინდა მხოლოდ გიჩვენოთ, რომ იმის შემდეგ, რაც A სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობანი ვიცით, B-ს ქვესიმრავლეებსაც ადვილად დავითვლით. მა-

გალითისათვის ვნახოთ, რამდენი ორელემენტიანი ქვესიმრავლე აქვს B-ს.

ეს ქვესიმრავლეები ორ ჯგუფად გავყოთ — პირველში ის ქვესიმრავლეები იყოს, რომლებიც e ელემენტს არ შეიცავენ, მეორეში — დანარჩენი, ესე იგი, ის ქვესიმრავლეები, რომლებიც e-ს შეიცავენ.

დავითვალოთ თითოეულ ჯგუფში შემავალ ქვესიმრავლეთა რაოდენობა.

დავიწყოთ მეორე ჯგუფით. ცხადია, ამ ჯგუფის ქვესიმრავლეები რომ მივიღოთ, უნდა ავიღოთ A-ს ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლე და მას e დავუმატოთ. რადგან A-ს 4 ერთელემენტიანი ქვესიმრავლე აქვს, ამიტომ B-საც e-ს შემცველი მხოლოდ 4 ორელემენტიანი ქვესიმრავლე ექნება.

ახლა პირველ ჯგუფს მივხედოთ. ვფიქრობ, ძნელი მისახვედრი არ არის, რომ ამ ჯგუფის ქვესიმრავლეები ეს იგივე A-ს ორელემენტიანი ქვესიმრავლეებია, რომელთა რაოდენობა, როგორც ვიცით, 6-ს უდრის.

ამრიგად, B-ს აქვს $4+6$, ესე იგი 10 ორელემენტიანი ქვესიმრავლე.

დააკვირდით: $4+6=10$ და ეს უკანასკნელი რიცხვი გადასვლის წესით არის მიღებული 4 და 6 რიცხვებისაგან, ზუსტად ისე, როგორც პასკალის სამკუთხედის მეხუთე სტრიქონის მესამე რიცხვი — 10. გამოდის, რომ... დიახ, დიახ, პასკალის სამკუთხედის მეხუთე სტრიქონი —

1 5 10 10 5 1

გვიჩვენებს, თუ ნული, ერთი, ორი,... ელემენტის შემცველი რამდენი ქვესიმრავლე აქვს ხუთელემენტიან სიმრავლეს! თავად დარწმუნდით, რომ ეს ასეა — ამისათვის ისარგებლეთ იმით, რაც ოთხელემენტიანი სიმრავლის ქვესიმრავლეებისათვის ვიცით და ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა გაიმეორეთ. აქვე შევნიშნავ: ხედავთ რა მოსახერხებელია — სტრიქონების ის ნუმერაცია, რომელიც შემოვიღეთ?!

მიღებული შედეგი ადვილად განზოგადდება. სახელდობრ, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ **პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვები გვიჩვენებენ, თუ ნული, ერთი, ორი,... ელემენტის შემცველი რამდენი ქვესიმრავლე აქვს n-ელემენტიან სიმრავლეს.**

დამეთანხმეთ, საინტერესო და ამავე დროს სასარგებლო ფაქტია. ამრიგად, თუ გვინდა, მაგალითად, რვაელემენტიანი სიმრავლის ოთხელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობის დადგენა, სულაც არაა შრომატევადი გამოთვლების ჩატარება, — საკმარისია პასკალის სამკუთხედის მერვე სტრიქონის მეხუთე რიცხვი მოვძებნოთ.

პასუხი მზად არის: **70** (ნუ დაგავიწყდებათ, რომ სტრიქონის პირველი რიცხვი გვიჩვენებს ნულელემენტიანი, მეორე — ერთელემენტიანი, მესამე — ოთხელემენტიანი,... ქვესიმრავლეების რაოდენობას. ამიტომაც, ამ წუთას განხილულ მაგალითში მერვე სტრიქონის მეოთხე კი არა, მეხუთე რიცხვი ვიპოვეთ).

როგორც ხედავთ, ქვესიმრავლეების დათვლისათვის პასკალის სამკუთხედი, რომ იტყვიან, მისწრება ყოფილა! მაგრამ ის არა მარტო ამ საკითხშია სასარგებლო და ამას ახლავე ვნახავთ.

ავახარისხოთ ორწევრი

დარწმუნებული ვარ, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები —

$$(1+x)^2=1+2x+x^2$$

და

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

ყველა თქვენგანმა იცის.

ალბათ არც $1+x$ ორწევრის მეოთხე ხარისხის მოძებნა გაგიჭირდებათ, უმოკლესი გზა შემდეგია: დავწეროთ

$$(1+x)^4=(1+x)^3(1+x)$$

ტოლობა, მის მარჯვენა ნაწილში პირველი მამრავლის ცნობილი მნიშვნელობა შევიტანოთ, გავხსნათ ფრჩხილები და, ბოლოს, შევაერთოთ მსგავსი წევრები. მივიღებთ:

$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ იმავე ორწევრის მერვე, მეცხრე ან უფრო მაღალი ხარისხი უნდა ვიპოვოთ. როგორ მოვიქცეთ? ისევ უნდა დავაჯგუფოთ მამრავლები, გავხსნათ ფრჩხილები და მსგავსი წევრები შევაერთოთ. ვერ ვიტყვი, რომ ძნელია, მაგრამ არცთუ სახალისო საქმეა...

თურმე, არავითარი დაჯგუფება, ფრჩხილების გახსნა, მსგავსი წევრების შეერთება საჭირო არ არის! — პასკალის სამკუთხედი მზამზარეულ პასუხს გვაძლევს...

ბუნებრივი რომ იყოს ყველაფერი, ზემოთ დაწერილ ტოლობებს კიდევ ორს დავუმატებ და ყველას ერთად ჩამოვწერ, აი ასე:

$$(1+x)^0=1,$$
$$(1+x)^1=1+1x,$$
$$(1+x)^2=1+2x+1x^2,$$
$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+1x^3,$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+1x^4.$$

დააკვირდით მარჯვენა ნაწილების კოეფიციენტებს — ისინი მუქი შრიფტითაა აწყობილი. ხომ მიხვდით, რომ კოეფიციენტთა მიმდევრობანი პასკალის სამკუთხედის შესაბამისად ნულოვანი, პირველი, მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონებია?! ნამდვილად, საგულისხმო შედეგი მივიღეთ! საინტერესოა ორწევრის მეხუთე ხარისხისათვისაც თუ არის ის სამართლიანი... ვნახოთ. გვაქვს:

$$(1+x)^5=(1+x)(1+x)^4=$$
$$=(1+x)(1+4x+6x^2+4x^3+x^4).$$

გავხსნათ ფრჩხილები? არა! ისე ვიანგარიშოთ რისი ტოლი იქნება x-ის კოეფიციენტები ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფრჩხილების გახსნისა და მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ. თანაც, თვალსაჩინოებისათვის გამოთვლათა შედეგები ცხრილში განვალაგოთ:

x-ის ხარისხი	რომელი წევრების გამრავლებით მიიღება	კოეფიციენტი
x^0	$1\cdot 1$	1
x^1	$x\cdot 1$ და $1\cdot 4x$	$1+4=5$
x^2	$x\cdot 4x$ და $1\cdot 6x^2$	$4+6=10$
x^3	$x\cdot 6x^2$ და $1\cdot 4x^3$	$6+4=10$
x^4	$x\cdot 4x^3$ და $1\cdot x^4$	$4+1=5$
x^5	$x\cdot x^4$	1

როგორც ხედავთ, კოეფიციენტთა მიმდევრობა — **1, 5, 10, 10, 5, 1** პასკალის სამკუთხედის მეხუთე სტრიქონია. მაგრამ უფრო მნიშვნელოვანი ის არის, რომ, როგორც ჩვენი ცხრილის მესამე სვეტიდან ჩანს, ყველა ეს კოეფიციენტი გადასვლის წესით არის მიღებული!

მიღებული შედეგის განზოგადებაც შეიძლება: იმავე გადასვლის წესით მტკიცდება, რომ **თუ $1+x$ ორწევრს n-ურ ხარისხში ავახარისხებთ და მიღებულ მრავალწევრს x ცვლადის ზრდად ან კლებად ხარისხებად დავალაგებთ, ამ ცვლადის კოეფიციენტთა მიმდევრობა პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონი იქნება**.

სხვათა შორის, ზემოთქმული საშუალებას გვაძლევს $a+b$ ორწევრის ნებისმიერი ხარისხიც ვიპოვოთ. ვნახოთ, როგორ შეიძლება ამის მიღწევა ერთ კერძო შემთხვევაში, სახელდობრ, როცა $(a+b)^5$ გვაქვს.

როგორც უკვე ვიცით,

$$(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

ცხადია, ეს ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი x-ისათვის, კერძოდ, მაშინაც, როცა $x=b/a$. შევიტანოთ x-ის ეს მნიშვნელობა ზემოთ დაწერილ ტოლობაში. მივიღებთ:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^5=1+5\frac{b}{a}+10\frac{b^2}{a^2}+10\frac{b^3}{a^3}+5\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}.$$

ახლა, ტოლობის ორივე ნაწილი a^5-ზე გავამრავლოთ. ეს მოგვცემს სასურველ ფორმულას $(a+b)^5$-სათვის:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

ალბათ მიხვდით, მე-5 ხარისხი რომ ავიღეთ, სრულიადაც არაა არსებითი — მსგავს შედეგს $(a+b)$-ს ნებისმიერი ხარისხისთვისაც მივიღებთ.

პასკალის სამკუთხედის თვისებები

პასკალის სამკუთხედს არა ერთი და ორი საინტერესო თვისება აქვს. მინდა რამდენიმე მათგანი გაგაცნოთ.

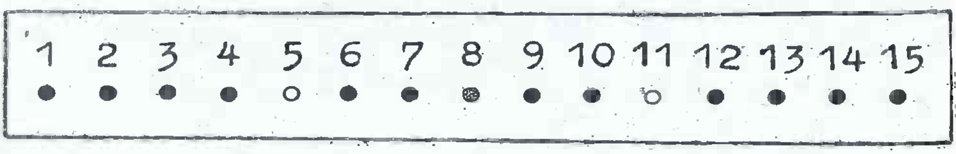
1. პასკალის სამკუთხედის n-ურ სტრიქონში $n+1$ რიცხვია.

ეს თვისება თითქმის ცხადია. მართლაც, გადასვლის წესი ყოველი შემდეგი სტრიქონის რიცხვების რაოდენობას ხომ 1-ით ზრდის, ნულოვან სტრიქონში კი ერთი რიცხვია!

2. პასკალის სამკუთხედის ყოველი სტრიქონი სიმეტრიულია, ესე იგი, სტრიქონის თავიდან და ბოლოდან ტოლად დაშორებული რიცხვები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება ჩავატაროთ კერძო შემთხვევისათვის, — თავად მიხვდებით, რომ მისი განზოგადება სულაც არაა ძნელი.

ავიღოთ, მაგალითად, მე-14 სტრიქონი და ვაჩვენოთ, რომ ამ სტრიქონის თავიდან მეხუთე და ბოლოდან მეხუთე რიცხვები თანატოლია. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, აღვნიშნოთ, რომ მე-14 სტრიქონში სულ 15 რიცხვია და ამიტომ ბოლოდან მეხუთე — თავიდან მეთერთმეტე იქნება (ნახ. 2).



ნახ. 2

ახლა გავარკვიოთ, რას გვიჩვენებს თითოეული მათგანი. მეხუთე რიცხვი — ეს არის თოთხმეტელემენტიანი სიმრავლის ოთხელემენ-

ტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა, ხოლო მეთერთმეტე — იმავე სიმრავლის ათელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა. მაგრამ, თოთხმეტელემენტიან სიმრავლეს ოთხელემენტიან ქვესიმრავლეს რომ ჩამოვაშორებთ, ათელემენტიანი ქვესიმრავლე არ დაგვრჩება?! ეს გვიჩვენებს, რომ ყოველი ოთხელემენტიანი ქვესიმრავლე, ასე ვთქვათ, წარმოშობს ერთსა და მხოლოდ ერთ ათელემენტიან ქვესიმრავლეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მათი რაოდენობა ერთმანეთის ტოლია.

3. პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვების ჯამი 2^n-ს უდრის.

ამ თვისების დამტკიცება ყველაზე მარტივად და, ამასთანავე, მოხდენილად ასე შეიძლება. როგორც ვიცით,

$$(1+x)^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+...,$$

სადაც $1, A, B, C,...$ პასკალის სამკუთხედის n-ური სტრიქონის რიცხვებია. ვთქვათ, $x=1$. მივიღებთ

$$2^n=1+A+B+C+...$$

ტოლობას, რომლის მარჯვენა ნაწილში n-ური სტრიქონის რიცხვთა ჯამია.

ეს თვისებაც დამტკიცებულია.

ამ თვისებიდან, თუ გავიხსენებთ, რომ n-ური სტრიქონის რიცხვები გვიჩვენებენ რამდენი ნულელემენტიანი, ერთელემენტიანი, ორელემენტიანი,... ქვესიმრავლე აქვს n-ელემენტიან სიმრავლეს, საგულისხმო შედეგს მივიღებთ: n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის რაოდენობის ჯამი 2^n-ს უდრის.

ამოცანები

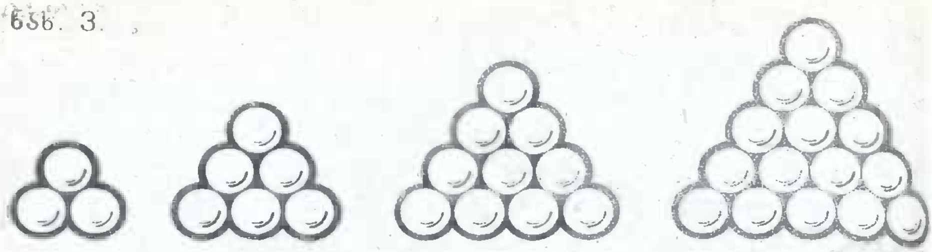
1. ისარგებლეთ გადასვლის წესით და შეადგინეთ თხუთმეტსტრიქონიანი პასკალის სამკუთხედი. (ნუ დაგავიწყდებათ, რომ სტრიქონების ნუმერაციას ნულით ვიწყებთ!)

2. წარმოადგინეთ მრავალწევრის სახით შემდეგი გამოსახულებანი:

1) $(1+x)^{11}$; 2) $(a+b)^{15}$; 3) $(1-x)^{10}$; 4) $(a-2b)^5$; 5) $(x-y)^{12}$.

3. მე-3 ნახატზე გამოსახულია სამკუთხედის სახით დალაგებული ბირთვები. უნდა აღინიშნოს, რომ ბირთვების ნებისმიერი რაოდენობის ასე დალაგება არ შეიძლება, — მათი რიცხვი უნდა იყოს **3, 6, 10, 15** და ასე შემდეგ. ამ რიცხვებს, გასაგები მიზეზის გამო, სამკუთხა რიცხვებს უწოდებენ. (უფრო დაწვრილებით სამკუთხა რიცხვების შესახებ იხ. „ფიგურული რიცხვები"). სხვათა შორის, 1-იც სამკუთხა რიცხვად ითვლება — ეს, გარკვეული აზრით, მოსა-

ნახ. 3.



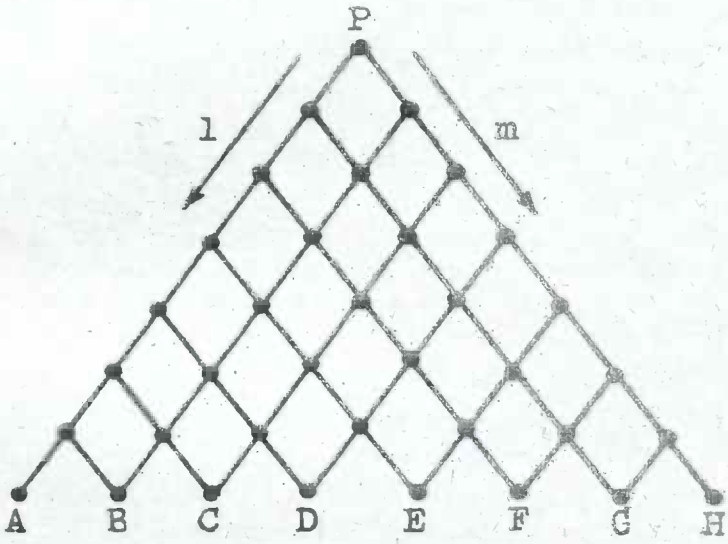
ხერხებელია. ამრიგად, თუ n-ურ სამკუთხა რიცხვს T_n-ით აღვნიშ-ნავთ, მაშინ

$$T_1=1,\ T_2=3,\ T_3=6,\ T_4=10,\ T_5=15,\ldots$$

მტკიცდება, რომ ნებისმიერი n-ისათვის

$$T_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

მონახეთ სამკუთხა რიცხვები თხუთმეტსტრიქონიან პასკალის სამკუთხედში. რა კანონზომიერებას ამჩნევთ? როგორ ფიქრობთ, შემდეგშიც დარჩება ეს კანონზომიერება ძალაში, თუ არა?



ნახ. 4

4. მოცემულია გზათა ქსელი, რომელიც სათავეს P პუნქტში იღებს (ნახ. 4). ამ პუნქტიდან გამოვიდა 2^7 მგზავრი. ნახევარი l მიმართულებით წავიდა, ნახევარი — m მიმართულებით, ყოველ შემდეგ პუნქტში მისვლისას მგზავრები კვლავ იყოფიან — ნახევარი l მიმართულებით მიდის, ნახევარი — m მიმართულებით.

რამდენი მგზავრი მოვა $A,B,C,\ldots,H$ პუნქტებში სათანადოდ

კარლ ფრიდრიხ გაუსი
(1777 — 1855)

როგორ დაამტკიცა გაუსმა წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის გების შესაძლებლობა

მათემატიკა ახალგაზრდების მეცნიერებააო — უთ-
ქვამს კიბერნეტიკის „მამას" ნორბერტ ვინერს. და არცთუ უსაფუძვ-
ოდ, — ვინ მოსთვლის რამდენმა, შემდგომში სახელგანთქმულმა
ეცნიერმა, სიჭაბუკეშივე დაადგინა ესა თუ ის მათემატიკური ჭეშ-
არიტება, ამოხსნა პრობლემა, რომელიც ათეული და ზოგჯერ ასეუ-
ი წლებიც კი აღელვებდათ მკვლევარებს, შექმნა ახალი თეორია...

მათემატიკის ისტორია სათუთად ინახავს ისეთი სახელმოხვე-
ილ მეცნიერთა სახელებს, როგორებიც იყვნენ პასკალი, აბელი,
ლერი, გალუა... მათ გვერდით კოლოსივით აღმართულა სიცოცხ-
ეშივე „მათემატიკოსთა მეფედ" აღიარებული კარლ ფრიდრიხ გაუ-
ის შთამბეჭდავი ფიგურა.

გაუსის ბავშვობის წლებთან არა ერთი და ორი ლეგენდაა დაკავშირებული. ყველაზე ადრინდელი გვაუწყებს, რომ სამი წლის კარლი თვალს ადევნებდა არითმეტიკულ გამოთვლებს, რომლებსაც მისი მამა აწარმოებდა და მათში შეცდომა იპოვა. ლეგენდა ლეგენდად, მაგრამ უნდა ვიფიქროთ, რომ ის ძალიან ახლოსაა ჭეშმარიტებასთან, — გაუსი ხომ თავად ამბობდა, — თვლა უფრო ადრე ვიცოდი, ვიდრე ლაპარაკიო. სკოლაში სწავლისას და შემდგომშიც, უნივერსიტეტში, გაუსს მათემატიკაზე არანაკლებ ფილოლოგია იტაცებდა, მაგრამ, როგორც მისი მეცნიერული მემკვიდრეობის ერთ-ერთი პირველი და საუკეთესო მკვლევართაგანი, ფელიქს კლაინი აღნიშნავს, ერთმა დიდმა აღმოჩენამ წააქეზა გაუსი საბოლოო არჩევანი გაეკეთებინა მათემატიკასა და ფილოლოგიას შორის. სახელდობრ, **1796** წლის **30** მარტს მან დაამტკიცა, რომ ფარგლითა და სახაზავით შესაძლებელია წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგება. ეს მის ცხოვრებაში შემობრუნების პუნქტი იყოო — ამბობს კლაინი.

აღსანიშნავია, რომ გაუსი მეცნიერების ისტორიაში შევიდა აგრეთვე, როგორც ასტრონომიის, გეოდეზიისა და ფიზიკის მეტად მნიშვნელოვანი საკითხების ბრწყინვალე მკვლევარი, მაგრამ იმავე კლაინის სიტყვებით რომ ვთქვათ, „მისი მიღწევების მთავარი შინაარსი და შემოქმედების სიმძიმის ცენტრი წმინდა მათემატიკის სფეროშია, მას შესწირა გაუსმა თავისი ახალგაზრდობის წლები".

ფარგლითა და სახაზავით აგების შესახებ

მკითხველმა ალბათ იცის, თუ რას ნიშნავს ფარგლითა და სახაზავით აგება: გარკვეული მონაცემების მიხედვით, მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის გამოყენებით, უნდა აიგოს ესა თუ ის გეომეტრიული ფიგურა. ამასთან, სახაზავით შეიძლება ნებისმიერი წრფის გავლება; კერძოდ, ერთ ან ორ წერტილზე გამავალი წრფის აგება. ასევე ფარგლით შეიძლება მოცემული ცენტრისა და მოცემული რადიუსის მქონე წრეწირის აგება, შეიძლება აგრეთვე უკვე აგებულ წრფეზე მოცემული წერტილიდან მოცემული სიგრძის მონაკვეთის გადაზომვა. არც ერთი სხვა აგების შესრულება არც სახაზავითა და არც ფარგლით არ შეიძლება! კერძოდ, მაგალითად, სახაზავით არ შეიძლება მონაკვეთის გადაზომვა, სახაზავს დანაყოფები რომც ჰქონდეს.

ფარგლითა და სახაზავით აგებათა თეორია გეომეტრიის ერთ-ერთი ულამაზესი დარგია. მან უძველესი დროიდან მიიპყრო მათემატიკოსების ყურადღება. ბევრი ამოცანა მაშინვე იქნა ამოხსნილი,

ზოგიერთის საბოლოო გადაწყვეტას კი... საუკუნეები დასჭირდა. ასეთებს განეკუთვნება წესიერი n-კუთხედის აგების ამოცანაც.

ჯერ კიდევ ევკლიდეს დროს იცოდნენ წესიერი სამკუთხედის, ოთხკუთხედის, ხუთკუთხედის, ექვსკუთხედისა და თხუთმეტკუთხედის აგება. ძველმა ბერძნებმა ისიც იცოდნენ, რომ თუ n-კუთხედის აგება ფარგლითა და სახაზავით შესაძლებელია, მაშინ შესაძლებელია წესიერი $2n$-კუთხედის აგებაც. მაგრამ შესაძლებელი თუა წესიერი n-კუთხედის აგება ყველა n-ისათვის? ოცი საუკუნე მოელოდა ეს პრობლემა გადაწყვეტას, ვიდრე ჭაბუკმა გაუსმა საბოლოოდ არ გადაჭრა იგი.

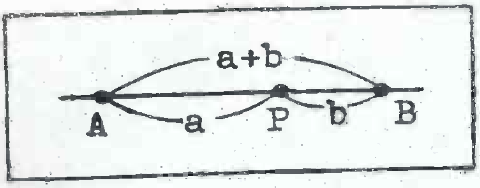
ზემოთ აღნიშნული იყო, რომ ამ მიმართულებით გაუსის პირველი შრომა წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგებას ეძღვნებოდა. შემდგომში, 1801 წელს გამოცემულ თავის ცნობილ მონოგრაფიაში „არითმეტიკული გამოკვლევები" მან განავითარა ფარგლითა და სახაზავით წესიერი მრავალკუთხედის აგების თეორია და მას დასრულებული სახე მისცა: დაადგინა ზოგადი სახე ყველა იმ n რიცხვისა, რომლისთვისაც ამოცანა ამოხსნადია. იმის დამტკიცება, რომ სხვა სახის რიცხვებისთვის ამოცანას ამოხსნა არა აქვს, გაუსს თავის თხზულებაში არ მოჰყავს, — წიგნის მოცულობა ამის საშუალებას არ მაძლევსო, მაგრამ საჭიროდ ვთვლი ამ ფაქტის აღნიშვნას, რათა ვინმემ არა სცადოს წესიერი 7-კუთხედის, 11-კუთხედის, 13-კუთხედის, 19-კუთხედის,... აგება და ტყუილ-უბრალოდ ამაზე დრო არ დაკარგოსო...

გაუსი მეტად აფასებდა თავის პირველ მათემატიკურ აღმოჩენას. ამაზე ისიც მეტყველებს, რომ იგი კვლავ დაუბრუნდა ამ საკითხს და 1801 წელს პეტერბურგის აკადემიას გამოსაქვეყნებლად გაუგზავნა წერილი, სადაც მოცემულია წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგების შესაძლებლობის სულ ელემენტარული დამტკიცება. სწორედ ეს დამტკიცება მინდა გავაცნო მკითხველს, მაგრამ წინასწარ საჭიროა მოკლედ მაინც შევეხოთ ზოგიერთი მონაკვეთის, კერძოდ კვადრატულ ირაციონალობათა აგების საკითხს.

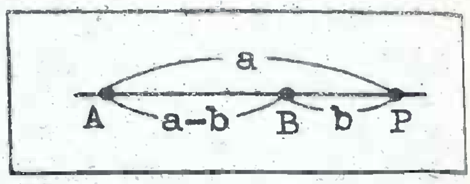
აგების რამდენიმე ამოცანა

ვთქვათ, მოცემულია ერთეული მონაკვეთი — აღვნიშნოთ ის e-თი და კიდევ ორი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია a და b. ვაჩვენოთ, რომ ფარგლითა და სახაზავით ყოველთვის შეიძლება აგება მონაკვეთებისა, რომელთა სიგრძეებია:

$$a+b,\ |a-b|,\ ab,\ a{:}b,\ \sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{ab}\ .$$



ნახ. 1



ნახ. 2.

პირველი ორი მონაკვეთი ერთნაირად აიგება. მართლაც, გავავლოთ რაიმე წრფე და მისი A წერტილიდან ფარგლით გადავზომოთ a-ს ტოლი AP მონაკვეთი. შემდეგ P წერტილიდან, — იმის მიხედვით, თუ რომელ მონაკვეთს ვაგებთ $(a+b)$-ს თუ $|a-b|$-ს, — იმავე ან საწინააღმდეგო მიმართულებით გადავზომოთ PB, რომლის სიგრძეა b. ცხადია, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე $a+b$ ან, შესაბამისად, $|a-b|$ იქნება (ნახ. 1, 2).

ასევე ერთი და იგივე მოსაზრება უდევს საფუძვლად ab და $a:b$ მონაკვეთების აგებას. დავიწყოთ პირველით. ავიღოთ რაიმე კუთხე, რომლის წვეროა P. მის ერთ გვერდზე გადავზომოთ მიმდევრობით ერთეულის ტოლი PE და b-ს ტოლი EB მონაკვეთები, მეორე გვერდზე კი PA, რომლის სიგრძეა a. E და A წერტილებზე გავავლოთ წრფე და B-ზე მისი პარალელური (ნახ. 3). AX საძიებელი მონაკვეთია. ეს უშუალოდ გამომდინარეობს

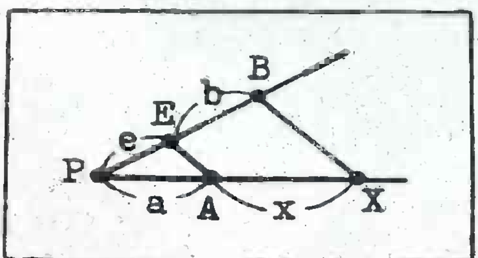
$$\frac{PA}{PE}=\frac{AX}{EB}$$

ან, რაც იგივეა,

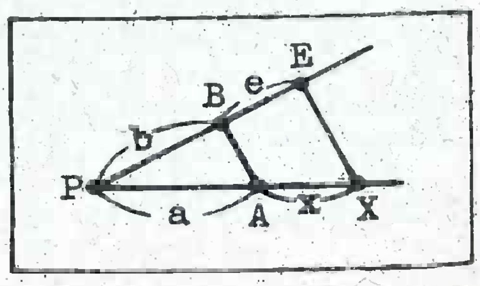
$$\frac{a}{e}=\frac{x}{b}$$

პროპორციიდან, საიდანაც $x=ab$. უკანასკნელი პროპორცია გვიჩვენებს, რომ თუ e-სა და b-ს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ $x=a:b$. ახლა ცხადია, როგორ უნდა ავაგოთ $a:b$ მონაკვეთიც (ნახ. 4).

ნახ. 3



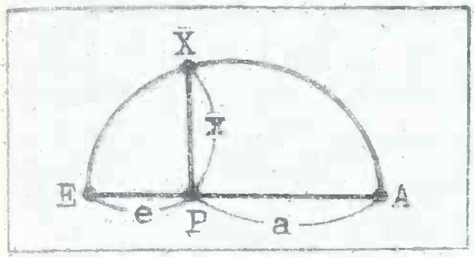
ნახ. 4



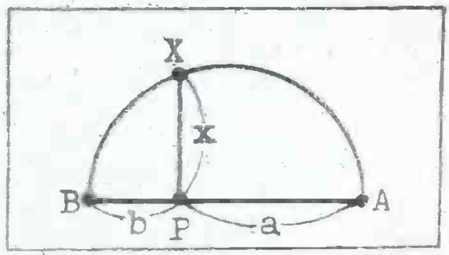
დასასრულ, ავაგოთ $\sqrt{a}$ და $\sqrt{ab}$ მონაკვეთები (ცხადია, $\sqrt{b}$ მონაკვეთი ისევე აიგება, როგორც $\sqrt{a}$). აქაც ერთსა და იმავე ფაქტს ვეყრდნობით. სახელდობრ, ვსარგებლობთ იმით, რომ წრეწირის ნებისმიერი წერტილიდან დიამეტრზე დაშვებული მართობის სიგრძის კვადრატი დიამეტრის მონაკვეთების სიგრძეთა ნამრავლის ტოლია. მაშ ასე, ავიღოთ $e+a$ სიგრძის EA მონაკვეთი და მასზე, როგორც დიამეტრზე ავაგოთ ნახევარწრეწირი. P წერტილიდან აღვმართოთ PX მართობი (ნახ. 5). მაშინ

$$PX^2 = EP \cdot PA.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $EP = e$, $PA = a$, მივიღებთ: $x = PX = \sqrt{a}$. რაც შეეხება $\sqrt{ab}$ მონაკვეთს, საკმარისია ანალოგიური აგება ჩავატაროთ, ოღონდ EP მონაკვეთის ნაცვლად b-ს ტოლი BP მონაკვეთი ავიღოთ (ნახ. 6).



ნახ. 5



ნახ. 6

ზემოთქმულის საფუძველზე, უფრო სწორად — ზემოთ ჩატარებული აგებების საფუძველზე ვასკვნით, რომ ფარგლითა და სახაზავით შეიძლება ნებისმიერი ისეთი მონაკვეთის აგება, რომლის სიგრძის გამომსახველი რიცხვი მიიღება 1-ისაგან შეკრების, გამოკლების, გამრავლების, გაყოფისა და კვადრატული ფესვის ამოღების ოპერაციების სასრულ რიცხვჯერ ჩატარებით. სხვანაირად, შეიძლება ყოველი ისეთი მონაკვეთის აგება, რომლის სიგრძე ან რაციონალური რიცხვით გამოისახება, ან — კვადრატული ირაციონალობით. ასე, მაგალითად, შეიძლება ავაგოთ

$$\frac{2}{3}+\sqrt{2}\,,\quad 5\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}\,,\quad \sqrt[8]{1+2\sqrt[4]{2+3\sqrt{3}}}$$

სიგრძის მონაკვეთები. უკანასკნელმა ორმა მაგალითმა გაუგებრობა არ უნდა გამოიწვიოს. მართალია, კვადრატული ფესვის გარდა აქ მე-4 და მე-8 ხარისხის ფესვიც კი გვხდება, ეს მაინც კვადრატული ირაციონალობაა. მართლაც, თითოეული ეს ფესვი ხომ შეიძლება

კვადრატული ფესვის მეშვეობით ჩავწეროთ! საზოგადოდ, 2^n ხარისხის ფესვი რიცხვიდან კვადრატული ირაციონალობაა.

მკითხველი დამეთანხმება, რომ კვადრატული ირაციონალობის აგების შესაძლებლობა ჩვენ საკმაოდ იოლად დავამტკიცეთ. გაცილებით ძნელად მტკიცდება, რომ სხვა — არაკვადრატული ირაციონალობის აგება ფარგლითა და სახაზავით არ შეიძლება. მაგალითად, რამდენიც უნდა ვეცადოთ, ვერ ავაგებთ მონაკვეთს, რომლის სიგრძეა $\sqrt[3]{2}$.

ახლა უკვე მზადა ვართ გავეცნოთ იმას, თუ როგორ ამტკიცებს გაუსი წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგების შესაძლებლობას.

ჩვიდმეტკუთხედის აგება

ამრიგად, ჩვენ გვინდა წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის აგება, უფრო სწორად მისი აგების შესაძლებლობის დამტკიცება. მიზანი მიღწეული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $cos\alpha$, სადაც $\alpha=360^\circ:17$, კვადრატული ირაციონალობაა. მართლაც, თუ ეს ასეა, შევძლებთ იმ მონაკვეთის აგებას, რომლის სიგრძეა $cos\alpha$. გადავზომოთ ეს მონაკვეთი ერთეული წრეწირის OA რადიუსზე. მივიღებთ OB მონაკვეთს. ახლა, B წერტილზე აღვმართოთ მართობი ამ მონაკვეთისადმი, რომლის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი C-თი აღვნიშნოთ. რამდენადაც AC ქორდის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე α-ს უდრის, ამიტომ, ცხადია, რომ AC არის ერთეულ წრეწირში ჩახაზული წესიერი ჩვიდმეტკუთხედის გვერდი.

მაშ დავამტკიცოთ, რომ $cos\alpha$ კვადრატული ირაციონალობაა. ავიღოთ

$$S=1+cos\alpha+cos2\alpha+...+cos15\alpha+cos16\alpha$$

ტოლობა და მისი ორივე ნაწილი $2cos\alpha$-ზე გავამრავლოთ. მარჯვენა ნაწილში მიღებული $2cosn\alpha cos\alpha$ ნამრავლები $cos(n+1)\alpha+$ $+cos(n-1)\alpha$ ჯამებით შევცვალოთ ($n=1,\ 2,...,16$). თუ გავითვალისწინებთ იმასაც, რომ $cos17\alpha=1$, ხოლო $cos16\alpha=cos\alpha$, ელემენტარული გარდაქმნით მივიღებთ $2Scos\alpha=2S$ ტოლობას, საიდანაც $S=0$, ესე იგი,

$$1+cos\alpha+cos2\alpha+...+cos15\alpha+cos16\alpha=0. \tag{1}$$

ახლა გავითვალისწინოთ, რომ $cos(17-n)\alpha=cosn\alpha$, ესე იგი, $cos16\alpha=cos\alpha,\ cos15\alpha=cos2\alpha,...,cos9\alpha=cos8\alpha.$

ამ ტოლობათა ძალით (1) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$cos\alpha+cos2\alpha+...+cos7\alpha+cos8\alpha=-\frac{1}{2} \tag{2}$$

ეს ტოლობა, თუკი აღვნიშნავთ:

$$\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos8\alpha=p, \tag{3}$$

$$\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha=p', \tag{4}$$

შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$p+p'=-\frac{1}{2}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $pp'=-1$.

მართლაც, (3) ტოლობის $2\cos3\alpha$-ზე გამრავლება გვაძლევს:

$$2p\cos3\alpha=2\cos\alpha\cos3\alpha+2\cos2\alpha\cos3\alpha+$$
$$+2\cos4\alpha\cos3\alpha+2\cos8\alpha\cos3\alpha=\cos2\alpha+$$
$$+\cos4\alpha+\cos5\alpha+\cos\alpha+\cos7\alpha+\cos\alpha+$$
$$+\cos11\alpha+\cos5\alpha=2\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos4\alpha+$$
$$+2\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha,$$

რადგან $\cos11\alpha=\cos6\alpha$.

ანალოგიურად მიიღება შემდეგი სამი ტოლობა:

$$2p\cos5\alpha=\cos\alpha+2\cos3\alpha+2\cos4\alpha+\cos6\alpha+$$
$$+\cos7\alpha+\cos8\alpha,$$
$$2p\cos6\alpha=2\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cos4\alpha+\cos5\alpha+$$
$$+2\cos7\alpha+\cos8\alpha,$$
$$2p\cos7\alpha=\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+2\cos6\alpha+2\cos8\alpha.$$

მიღებული ოთხი ტოლობის შეკრება გვაძლევს:

$$2p(\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha)=$$
$$=4(\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cos4\alpha+\cos5\alpha+$$
$$+\cos6\alpha+\cos7\alpha+\cos8\alpha).$$

ახლა, თუ (4) და (2) ტოლობებს გავიხსენებთ, მივიღებთ დასამტკიცებელ

$$pp'=-1$$

ტოლობას. ამრიგად, p და p'

$$2x^2+x-2=0$$

კვადრატული განტოლების ამონახსნებია. რადგან, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, $p>0$, $p'<0$, ამიტომ

$$p=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \quad p'=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}.$$

აღვნიშნოთ კიდევ:

$$\cos\alpha+\cos4\alpha=q, \qquad \cos2\alpha+\cos8\alpha=r,$$
$$\cos3\alpha+\cos5\alpha=q', \qquad \cos6\alpha+\cos7\alpha=r'.$$

ცხადია, რომ

$$q+r=p, \ q'+r'=p'.$$

გარდა ამისა, უშუალო გამრავლება გვაძლევს:

$$2qr = 2\cos\alpha\cos2\alpha + 2\cos\alpha\cos8\alpha + 2\cos4\alpha\cos2\alpha +$$
$$+ 2\cos4\alpha\cos8\alpha = \cos\alpha + \cos3\alpha + \cos7\alpha + \cos9\alpha +$$
$$+ \cos2\alpha + \cos6\alpha + \cos4\alpha + \cos12\alpha =$$
$$= \cos\alpha + \cos2\alpha + \cos3\alpha + \cos4\alpha + \cos5\alpha +$$
$$+ \cos6\alpha + \cos7\alpha + \cos8\alpha = -\frac{1}{2}.$$

იგივეს უდრის $2q'r'$ ნამრავლიც. მაშასადამე,

$$qr = q'r' = -\frac{1}{4}.$$

გამოდის, რომ q, r და q', r' შესაბამისად

$$4x^2 - 4px - 1 = 0 \text{ და } 4x^2 - 4p'x - 1 = 0$$

კვადრატული განტოლების ამონახსნებია. რამდენადაც $q > r$, ხოლო $q' > r'$, ამიტომ

$$q = \frac{p + \sqrt{p^2 + 1}}{2}, \quad q' = \frac{p' + \sqrt{p'^2 + 1}}{2}.$$

შემდეგ, რადგან $\cos\alpha + \cos4\alpha = q$, ხოლო

$$\cos\alpha\cos4\alpha = \frac{1}{2}(\cos3\alpha + \cos5\alpha) = \frac{1}{2}q',$$

$\cos\alpha$ და $\cos4\alpha$

$$2x^2 - 2qx + q' = 0$$

განტოლების ამონახსნებია. ცხადია, რომ $\cos\alpha > \cos4\alpha$, ესე იგი,

$$\cos\alpha = \frac{q + \sqrt{q^2 - 2q'}}{2}.$$

რამდენადაც p, p', q, q' კვადრატული ირაციონალობებია, ხოლო $\cos\alpha$ მათზე არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარებისა და კვადრატული ფესვის ამოღების შედეგად მიიღება, ამიტომ ისიც კვადრატული ირაციონალობაა. ჩვენ კი სწორედ ამის დამტკიცება გვსურდა.

დასასრულ, კიდევ ერთხელ შევახსენებთ, რომ ჩვენი მიზანი ჩვიდმეტკუთხედის აგება კი არ იყო, არამედ ამ აგების შესაძლებლობის დამტკიცება. რაც შეეხება თვით აგებას, ეს არცთუ იოლი საქმეა. მკითხველი ამაში თავად დარწმუნდება, თუ $\cos\alpha$-ს ფორმულაში p, p', q, q'-ის ზემოთ ნაპოვნ მნიშვნელობებს ჩასვამს და ნახავს რა ვეებერთელა გამოსახულება მიიღება...

საშუალო სიდიდეები

საშუალო სიდიდეებს ან, როგორც მოკლედ ვამბობთ ხოლმე, საშუალოებს ყოველ ნაბიჯზე ვხვდებით, მათ ფართოდ იყენებენ ბუნებისმეტყველებაში, ტექნიკაში, საზოგადოებრივ მეცნიერებებში. მკითხველისათვის უთუოდ ცნობილია არითმეტიკული და გეომეტრიული საშუალოები. არის სხვა საშუალოებიც. ქვემოთ ზოგადად განვსაზღვრავთ საშუალოს და გავეცნობით ზოგიერთ მათგანს.

საშუალო

ვთქვათ, მოცემულია n რიცხვი: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. რიცხვთა ამ სასრულ მიმდევრობას მოკლედ a-რიცხვები ვუწოდოთ. მათ შორის უმცირესი m-ით, ხოლო უდიდესი M-ით აღვნიშნოთ:

$$m = min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad M = max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

ყოველ μ რიცხვს, რომელიც

$$m \leqslant \mu \leqslant M$$

უტოლობებს აკმაყოფილებს, a-რიცხვების საშუალო ეწოდება.

ამ განსაზღვრებაში არაფერია ნათქვამი a-რიცხვების შესახებ. საერთოდ, ეს რიცხვები ნებისმიერია. ამასთანავე, ზოგიერთი საშუალო მხოლოდ დადებითი a-რიცხვებისათვის არის განსაზღვრული. ამიტომაც ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ ყველა a დადებითია.

გარდა ამისა, ვიგულისხმებთ, რომ $n \geqslant 2$, ვინაიდან თუ $n=1$, მაშინ ერთი რიცხვი გვაქვს და, ცხადია, ეს შემთხვევა ნაკლებად საინტერესოა. უფრო სწორად, სრულიადაც არ არის საინტერესო.

არითმეტიკული საშუალო

მოცემული a-რიცხვებისათვის აღვნიშნოთ:

$$A(a)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $A(a)$ არის a-რიცხვების საშუალო. მართლაც, რადგან

$$m \leqslant a_1 \leqslant M,\ m \leqslant a_2 \leqslant M, \ldots, m \leqslant a_n \leqslant M,$$

ამიტომ სამართლიანია

$$nm \leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant nM$$

უტოლობები, საიდანაც

$$m \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant M.$$

ამრიგად, $A(a)$ მართლაც საშუალოა. მას არითმეტიკული საშუალო ეწოდება. სხვათა შორის, ყველაზე ხშირი გამოყენება სწორედ ამ საშუალოსა აქვს.

გეომეტრიული საშუალო

თუ ჩვენთვის უკვე ცნობილ

$$m \leqslant a_1 \leqslant M,\ m \leqslant a_2 \leqslant M, \ldots, m \leqslant a_n \leqslant M.$$

უტოლობებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$m^n \leqslant a_1 a_2 \ldots a_n \leqslant M^n$$

უტოლობას, რომელიც შეიძლება ასეც გადავწეროთ:

$$m \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant M$$

აქედან ჩანს, რომ $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ არის a-რიცხვების საშუალო. მას ამ რიცხვების გეომეტრიული საშუალო ეწოდება და $G(a)$-თი აღინიშნება:

$$G(a)=\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

ცხადია, გეომეტრიული საშუალოს განსაზღვრისას არსებითია, რომ ყველა a დადებითია (ყოველ შემთხვევაში — არაუარყოფითი).

ჰარმონიული საშუალო

მოცემული a-რიცხვების ჰარმონიული საშუალო — $H(a)$ შემდეგი ტოლობით განისაზღვრება:

$$H(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

ის, რომ $H(a)$ საშუალოა, შეიძლება, მაგალითად, ასე დამტკიცდეს.

რადგანაც ყველა a დადებითია, ამიტომ

$$\frac{1}{m}\geqslant A\left(\frac{1}{a}\right)\geqslant\frac{1}{M}$$

ან რაც იგივეა,

$$m\leqslant\frac{1}{A\left(\frac{1}{a}\right)}\leqslant M .$$

მაგრამ ცხადია, რომ

$$\frac{1}{A\left(\frac{1}{a}\right)}=H(a)$$

და, მაშასადამე, წინა უტოლობათა ძალით

$$m\leqslant H(a)\leqslant M.$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

კვადრატული საშუალო

ვინაიდან a-რიცხვები დადებითია, ამიტომ სამართლიანია

$$m^2\leqslant a_1^2\leqslant M^2,\ m^2\leqslant a_2^2\leqslant M^2,\ldots,m^2\leqslant a_n^2\leqslant M^2$$

უტოლობები. აქედან ჯერ

$$nm^2\leqslant a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\leqslant nM^2$$

ხოლო შემდეგ

$$m\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\leqslant M$$

უტოლობები მიიღება. ეს გვიჩვენებს, რომ

$$M_2(a)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

ტოლობით განსაზღვრული $M_2(a)$ რიცხვი a-რიცხვების საშუალოა. მას მათი კვადრატული საშუალო ეწოდება.

სხვათა შორის, ფორმალურად ზემოთ დაწერილი ტოლობა $M_2(a)$ რიცხვს ნებისმიერი a-რიცხვებისათვის განსაზღვრავს. მაგრამ ამ შემთხვევაში $M_2(a)$ არის არა a-რიცხვების, არამედ მათი მოდულების, ესე იგი $|a|$ — რიცხვების საშუალო.

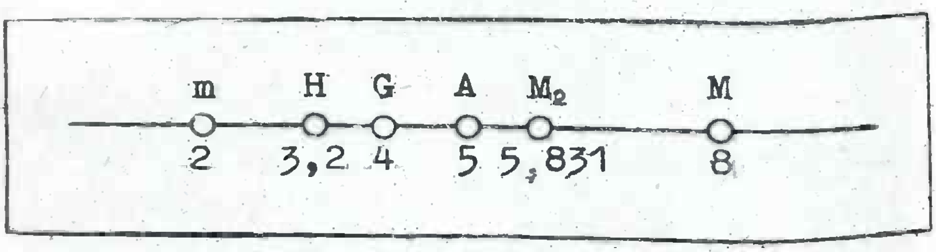
უტოლობანი საშუალოებს შორის

გამოვთვალოთ ორი რიცხვის სხვადასხვა საშუალო. ავიღოთ, მაგალითად $a_1=2$, $a_2=8$. გვაქვს:

$$A=\frac{2+8}{2}=5,\ G=\sqrt{2\cdot 8}=4,$$

$$H=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}=3{,}2,\ M_2=\sqrt{\frac{4+64}{2}}\approx 5{,}831.$$

აი, როგორ არიან განლაგებული ეს საშუალოები რიცხვითი ღერძის [2,8] მონაკვეთზე:



როგორც ვხედავთ, ამ კონკრეტულ შემთხვევაში
$H<G<A<M_2$.

ბუნებრივია ვიკითხოთ: სამართლიანია თუ არა ეს უტოლობები საზოგადოდ, ნებისმიერი რიცხვებისათვის, თანაც იმ პირობით, რომ $n\geqslant 2$. პასუხი დადებითია. სახელდობრ, **როგორიც უნდა იყოს დადებითი a-რიცხვები**

$$H(a)\leqslant G(a)\leqslant A(a)\leqslant M_2(a). \tag{1}$$

ამასთანავე, ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა ყველა a თანატოლია.

დავამტკიცოთ ეს უტოლობანი იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $n=2$.

დამტკიცებისას მოსახერხებელია $\Leftrightarrow$ ნიშნით სარგებლობა. ამ ლოგიკურ ნიშანს ეკვივალენციის ნიშანი ჰქვია, იგი ცვლის სიტყვათშერწყმას „მაშინ და მხოლოდ მაშინ“. ვთქვათ დამატებით ორიოდე სიტყვა მისი შინაარსის შესახებ. თუ P და Q ორი გამონათქვამი ან მათემატიკური წინადადებაა, მაშინ

$P \Leftrightarrow Q$

ჩანაწერი ნიშნავს, რომ P არის Q-ს ტოლძალოვანი, ესე იგი, P-დან გამომდინარეობს Q და იმავე დროს Q-დან გამომდინარეობს P. აი, მაგალითები:

$$a^2-2ab+b^2\geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geqslant 0,$$

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ან } x=3,$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2xy=9 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm 3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1,\ y=2 \text{ ან } x=2,\ y=1 \text{ ან } x=-1,\ y=-2 \text{ ან } x=-2,\ y=-1.$$

აქვე ვიტყვი, რომ $P \Leftrightarrow Q$ ჩანაწერი არის გაერთიანება ორი ჩანაწერისა

$P \Rightarrow Q$ და $Q \Rightarrow P$,

რომელთაგან პირველი იკითხება ასე: „P-დან გამომდინარეობს Q“, ხოლო მეორე — „Q-დან გამომდინარეობს P“. ადვილი მისახვედრია, რომ $P \Rightarrow Q$ შეიძლება ჭეშმარიტი იყოს, ხოლო $Q \Rightarrow P$ — მცდარი. მაგალითად, სწორია

$x=1 \Rightarrow x^2=1,$

მაგრამ არაა სწორი შებრუნებული დასკვნა:

$x^2=1 \Rightarrow x=1.$

რაც შეეხება ტოლძალოვნებას, ესე იგი

$P \Leftrightarrow Q$

ჩანაწერს, იგი გულისხმობს, რომ P და Q ან ორივე ერთად არის ჭეშმარიტი, ან ორივე ერთად — მცდარი.

შევუდგეთ (1) უტოლობათა დამტკიცებას. დავიწყოთ პირველი — $H(a)\leqslant G(a)$ უტოლობით. გვაქვს:

$$H(a) \leqslant G(a) \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leqslant \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} \leqslant \sqrt{a_1a_2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a_1a_2} \leqslant a_1+a_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2.$$

უკანასკნელი უტოლობა ჭეშმარიტია, თანაც ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა $a_1=a_2$. მაშასადამე, ჭეშმარიტია

$$H(a) \leqslant G(a)$$

უტოლობაც (ის ხომ $0 \leqslant (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2$ უტოლობის ტოლძალოვანია!). ამასთანავე, ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ გვაქვს, როცა $a_1=a_2$.

გადავიდეთ შემდეგ უტოლობაზე

$$G(a) \leqslant A(a) \Leftrightarrow \sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant (\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2.$$

აქაც ანალოგიური დასკვნის გაკეთება შეგვიძლია. დაბოლოს,

$$A(a) \leqslant M_2(a) \Leftrightarrow \frac{a_1+a_2}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2}{4} \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant (a_1-a_2)^2.$$

მიღებული უტოლობა ჭეშმარიტია, თანაც ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა $a_1=a_2$. ცხადია, იგივე სამართლიანია

$$A(a) \leqslant M(a)$$

უტოლობისათვისაც.

ამრიგად, უტოლობათა (1) ჯაჭვი დამტკიცებულია.

r რიგის საშუალო

თუ კვადრატულ საშუალოს

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

სახით ჩავწერთ, ცხადი გახდება, რომ მის მსგავსად შეიძლება განისაზღვროს

$$M_r(a)=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

რიცხვი, სადაც r ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ $M_r(a)$ არის a-რიცხვების საშუალო.

მართლაც, ვთქვათ, ჯერ, რომ $r>0$. გვაქვს:

$$m^r \leqslant a_1^r \leqslant M^r,\ m^r \leqslant a_2^r \leqslant M^r, \dots, m^r \leqslant a_n^r \leqslant M^r,$$

$$nm^r \leqslant a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r \leqslant nM^r,$$

$$m \leqslant \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant M,$$

ესე იგი,

$$r>0 \Rightarrow m \leqslant M_r(a) \leqslant M.$$

ანალოგიურად; თუ $r<0$, მაშინ

$$m^r \geqslant a_1^r \geqslant M^r,\ m^r \geqslant a_2^r \geqslant M^r, \dots, m^r \geqslant a_n^r \geqslant M^r,$$

$$nm^r \geqslant a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r \geqslant nM^r$$

$$m \leqslant \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant M,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$r<0 \Rightarrow m \leqslant M_r(a) \leqslant M.$$

ამრიგად,

$$M_r(a) = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (2)$$

არის a-რიცხვების საშუალო. მას r რიგის საშუალო ეწოდება. ეს საშუალო არის არა მარტო კვადრატული, არამედ არითმეტიკული და აგრეთვე ჰარმონიული საშუალოების განზოგადებაც. მართლაც, ცხადია, რომ

$$M_1(a) = A(a),\ M_{-1}(a) = H(a).$$

თუ $r=0$, მაშინ $M_r(a)$ განსაზღვრული არ არის — ზემოთ დაწერილი ფორმულა აზრს კარგავს. ამასთანავე, ზღვართა თეორიის ზოგიერთი ფორმულის გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ, როცა r ნულისაკენ მიისწრაფვის, $M_r(a)$-ს აქვს ზღვარი და ის $G(a)$-ს ტოლია. ამიტომაც პირობით მიიღება

$$M_0(a) = G(a). \qquad (3)$$

ამრიგად, თუ $r \neq 0$, $M_r(a)$ (2) ფორმულით არის განსაზღვრული, თუკი $r=0$, (3) ფორმულით.

ამ შეთანხმების შემდეგ (1) უტოლობანი ძალიან მარტივ სახეს იღებენ:

$$M_{-1}(a) \leqslant M_0(a) \leqslant M_1(a) \leqslant M_2(a).$$

r-ის ზრდასთან ერთად $M_r(a)$-ც იზრდება! თურმე ეს შედეგი შეიძლება განზოგადდეს. სახელდობრ, ნებისმიერი r და s რიცხვებისათვის

$$r < s \Rightarrow M_r(a) \leqslant M_s(a),$$

ამასთანავე ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ ჯრის, როცა ყველა a თანატოლია.

აწონილი საშუალო

გავეცნოთ კიდევ ერთ საშუალოს — აწონილ საშუალოს. ვთქვათ, a-რიცხვებთან ერთად მოცემულია დადებითი $p_1, p_2, \ldots, p_n$ რიცხვები. აღვნიშნოთ

$$A_p(a) = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

სულ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $A_p(a)$ არის a-რიცხვების საშუალო. მას a-რიცხვების აწონილი საშუალო ჰქვია, რის საფუძველსაც მისი მექანიკური შინაარსი იძლევა: თუ რიცხვითი ღერძის $a_1, a_2, \ldots, a_n$ წერტილებში სათანადოდ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ მასებია მოთავსებული, მაშინ ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრი $A_p(a)$ რიცხვის შესაბამის წერტილშია. ცხადია, რომ თუ ყველა p თანატოლია, $A_p(a)$ არის a-რიცხვების არითმეტიკული საშუალო.

მხოლოდ ის, ვისაც ესმის ფორმულათა სილამაზე და ლოგიკურ წყობათა სრულყოფილება, შეიძლება ნამდვილი მათემატიკოსი გახდეს.

სერგეი სობოლევი

ოქროს კვეთა

„საბჭოთა ხელოვნების“ 1972 წლის მე-2 ნომერში გამოქვეყნებული იყო აკადემიკოს გიორგი წერეთლის გამოკვლევა — „მეტრი და რიტმი ვეფხისტყაოსანში“. ამ მეტად საინტერესო და საგულისხმო ნაშრომში ავტორი ახლებურად წყვეტდა საკითხს „ვეფხისტყაოსნის“ ლექსთწყობის შესახებ. სახელდობრ, იგი ასაბუთებდა, რომ რუსთაველის გენიალური ქმნილება სიმეტრიასა და ოქროს კვეთაზეა აგებული. წერილმა ჩემზე დიდი შთაბეჭდილება მოახდინა, ერთხელ წაკითხვას არ დავჯერდი, რამდენჯერმე წავიკითხე, შემდეგ გადმოვიღე წიგნის თაროდან „ვეფხისტყაოსანი“ და ოქროს კვეთაზე აგებული სტროფების ანალიზი დავიწყე... ამასთან, თავში სულ ის აზრი მიტრიალებდა, რომ არასპეციალისტებისათვის, კერძოდ, მოსწავლეებისათვის ოქროს კვეთა თითქმის უცნობი რამ არის. ამან მაფიქრებინა დამეწერა პოპულარული წერილი, რომელშიც მოკლედ მაინც იქნებოდა გაშუქებული გეომეტრიისა და მთელი მათემატიკის ეს ერთ-ერთი ლამაზი საკითხი. მალე განზრახვა სისრულეში მოვიყვანე, ორი წერილიც კი დავწერე — „მეცნიერება და ტექნიკისათვის“ და „Квант“-ისათვის. პირველი იმავე წლის სექტემბერში გამოქვეყნდა, მეორე — 1973 წლის აგვისტოში.

ვფიქრობ, წერილების გამოქვეყნებით გარკვეულ მიზანს მივაღწიე — ახალგაზრდობა დაინტერესდა ამ საკითხით და მოსწავლეთა არა ერთსა და ორ კონფერენციაზე წაიკითხეს მოხსენებები ოქროს კვეთის შესახებ. ამიტომაც გამართლებულად მივიჩნიე ხსენებული საკითხისადმი მიძღვნილი წერილი წინამდებარე კრებულშიც შემეტანა. აქვე ვიტყვი, რომ 1973 წელს გამომცემლობა „მეცნიერებამ“

გიორგი წერეთლის რედაქციით გამოსცა სქელტანიანი წიგნი „მეტრი და რითმა ვეფხისტყაოსანში" რედაქტორის ვრცელი გამოკვლევითურთ. დაინტერესებული მკითხველი ბევრ საგულისხმო, შესაძლოა მისთვის ჯერ უცნობ, რამეს ნახავს ამ წიგნში.

რა არის ოქროს კვეთა?

ამბობენ, რომ C წერტილი AB მონაკვეთს ოქროს კვეთის პროპორციით ჰყოფს, ან, მოკლედ, AB მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს, თუ

$$AC:AB=BC:AC \tag{1}$$

ამრიგად, ოქროს კვეთა არის მთელის ისეთი გაყოფა ორ, ერთმანეთის არატოლ ნაწილად, როდესაც დიდი ნაწილი ისე შეეფარდება მთელს, როგორც მცირე ნაწილი — დიდს. გეომეტრიაში ოქროს კვეთას საშუალო და კიდურა შეფარდებით გაყოფასაც უწოდებენ.

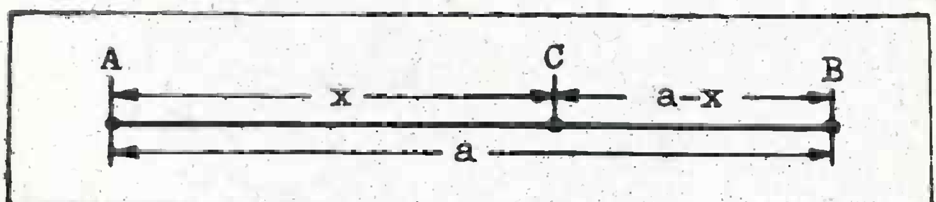
თუ AB მონაკვეთის სიგრძეს a-თი აღვნიშნავთ, AC მონაკვეთისას კი x-ით, მაშინ BC-ს სიგრძე, ცხადია, $a-x$ იქნება (ნახ. 1) და (1) პროპორცია შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$x:a=(a-x):x. \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, ოქროს კვეთისას დიდი მონაკვეთის სიგრძე მთელი მონაკვეთისა და მცირე მონაკვეთის სიგრძეთა გეომეტრიული, ან როგორც ხშირად ამბობენ, პროპორციული საშუალოა:

$$x=\sqrt{a(a-x)}\ . \tag{3}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ სამართლიანია შებრუნებული დასკვნაც: თუ მონაკვეთი ისეთ ორ, ერთმანეთის არატოლ მონაკვეთად არის გაყოფილი, რომ დიდი მონაკვეთის სიგრძე მთელი მონაკვეთისა და მცირე მონაკვეთის სიგრძეთა გეომეტრიული საშუალოა,



ნახ. 1

მაშინ მოცემული მონაკვეთის ოქროს კვეთა გვაქვს.

ცხადია, რომ (2) ან, რაც იგივეა, (3) x-ის მიმართ კვადრატული განტოლებაა. თუ ამ განტოლებიდან x-ს განვსაზღვრავთ, მივიღებთ:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \approx 0{,}618a.$$

ახლა $a - x$ ვიპოვოთ:

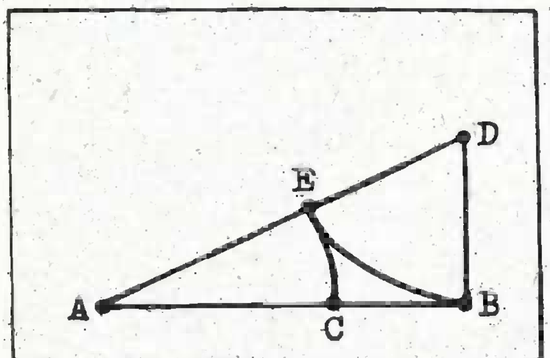
$$a - x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a \approx 0{,}372a.$$

ამრიგად, ოქროს კვეთის ნაწილები მიახლოებით მთელის **0,618**-სა და **0,372**-ის ტოლია.

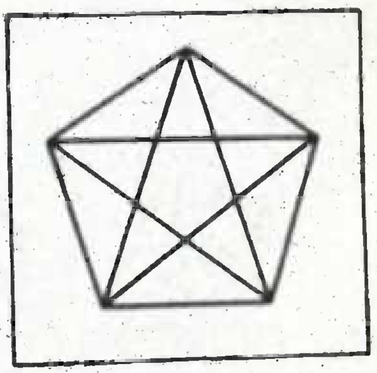
მონაკვეთის ოქროს კვეთა ფარგლითა და სახაზავით

ვნახოთ, როგორ შეიძლება მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით გაყოფა ფარგლითა და სახაზავით.

ავიღოთ AB მონაკვეთი და მის ერთ-ერთ, მაგალითად, B ბოლოზე აღვმართოთ მისი მართობი BD მონაკვეთი, რომლის სიგრძე AB-ს ნახევარს უდრის. შევაერთოთ A და D წერტილები. მივიღებთ ABD მართკუთხა სამკუთხედს (ნახ. 2). მის AD ჰიპოტენუზაზე BD-ს ტოლი DE მონაკვეთი მოვზომოთ. ახლა AB-ზე მოვზომოთ AE-ს ტოლი AC მონაკვეთი. თურმე C საძიებელი წერტილია — იგი AB მონაკვეთის ოქროს კვეთას ახდენს.



ნახ. 2



ნახ. 3

მართლაც, პითაგორას თეორემის თანახმად

$$(AE+ED)^2 = AB^2 + BD^2$$

ხოლო აგების თანახმად,

$$AE = AC, \; ED = BD = 0{,}5AB.$$

ამ ტოლობებიდან მივიღებთ

$$AC^2 + AC \cdot AB = AB^2,$$

ანუ

$$AC^2 = AB(AB - AC)$$

ტოლობას, საიდანაც უცბად მიიღება (1) პროპორცია.

ცოტაოდენი ისტორია

პირველი ლიტერატურული წყარო, რომელშიც მონაკვეთის ოქროს კვეთის პროპორციით გაყოფა გვხვდება, ევკლიდეს ცნობილი „საწყისებია“ (**III** საუკუნე ჩვენს ერამდე). „საწყისების“ უკვე მეორე წიგნში (სულ ეს თხზულება **13** წიგნისაგან შედგება) ევკლიდე აგებს ოქროს კვეთას, რასაც შემდგომში იყენებს წესიერი ხუთ- და ათკუთხედების ასაგებად. გამოყენებულია ოქროს კვეთა სტერეომეტრიაშიც — წესიერი მრავალწახნაგების ასაგებად.

ამასთან, უდავოა, რომ ოქროს კვეთას ევკლიდემდე იცნობდნენ. კერძოდ, ცნობილი იყო იგი პითაგორასა და მისი მოწაფეებისათვის (**VI** საუკუნე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე). პითაგორას ფილოსოფიურ სკოლაში ფილოსოფიისა და მათემატიკის გარდა ჰარმონიასაც სწავლობდნენ. ჰარმონიის თეორიის შესწავლისას პითაგორელები იმ დასკვნამდე მივიდნენ, რომ ბგერებს შორის თვისებრივი განსხვავება სიმების სიგრძეებს შორის რაოდენობრივი განსხვავებით არის განპირობებული, რამაც შთააგონა ისინი უფრო შორს წასულიყვნენ — სამყაროს ყველა კანონზომიერება რიცხვებით გამოესახათ, რამდენადაც მათი აზრით, ყველაფრის საფუძვლად ღმერთმა რიცხვი აიღო. სწორედ ამიტომ იყო, რომ პითაგორა და მისი მიმდევრები რიცხვებში, მონაკვეთების შეფარდებებში მაგიურსა და ზებუნებრივს ეძიებდნენ. კერძოდ, დიდი პატივით სარგებლობდა ოქროს კვეთა, რომელიც პითაგორელების ღრმა რწმენით თვალისათვის სასიამოვნო უნდა ყოფილიყო. ამიტომაც, გასაკვირი არ არის, რომ მათი საცნობი ნიშანი წესიერი ხუთკუთხედის დიაგონალებით შედგენილი ხუთქიმიანი ვარსკვლავი იყო (ნახ. 3). საქმე ის არის, რომ ნებისმიერი დიაგონალი მეზობელი წვეროდან გამოსულ ორივე დიაგონალს ოქროს კვეთის პროპორციით ჰყოფს. გადმოცემით, უცხო მხარეში მოხვედრილმა ერთ-ერთმა პითაგორელმა, რომელიც დასნეულდა და საშუალება არ ჰქონდა საფასური გადაეხადა მისი მომვლელისათვის, სიკვდილის წინ უკანასკნელს დაუბარა — შენ სახლზე ხუთკუთხიანი ვარსკვლავისებური მრავალკუთხედი გამოსახე და, თუ როდისმე სახლის წინ პითაგორელი გაივლის, აუცილებლად დაინტერესდება ამ ნიშნით და ჩემს ამბავსაც შეიტყობსო. მართ-

ლაც, რამდენიმე წლის შემდეგ გზად მიმავალმა პითაგორელმა დაინახა ეს სიმბოლო და სახლის პატრონმაც უხვი გასამრჯელო მიიღო.

შუა საუკუნეებში კვლავ გაღვივდა ინტერესი ოქროს კვეთისადმი. მას ხშირად იყენებდნენ არა მარტო თვით გეომეტრიაში, არამედ ხელოვნებასა და განსაკუთრებით არქიტექტურაში. ამიტომაც, სრულიად ბუნებრივად უნდა მივიჩნიოთ, რომ XV საუკუნის დასასრულს დაიწერა სპეციალური წიგნი ოქროს კვეთის შესახებ. მის ავტორს — იმ დროის ერთ-ერთ უდიდეს მათემატიკოსს ლუკა პაჩოლის მოჰყავს ოქროს კვეთის ცამეტი თვისება, რომელთაგან თითოეულს ასეთი ეპითეტებით ამკობს, როგორიცაა „განსაკუთრებული", „უბრწყინვალესი", „უშესანიშნავესი", „ენით უთქმელი"; „ზებუნებრივი" და ასე შემდეგ. თუმცა... განა წიგნის სათაური „ღვთაებრივი პროპორცია" არ გვიჩვენებს ავტორის დამოკიდებულებას ოქროს კვეთისადმი?! საინტერესოა, რომ წიგნის დაწერის ერთ-ერთი სულისჩამდგმელი და მისი გამფორმებელი გენიალური ლეონარდო და ვინჩი იყო. სხვათა შორის, თვით ტერმინი „ოქროს კვეთა" ლეონარდოს მიერაა შემოღებული.

ოქროს კვეთას იყენებენ ხუროთმოძღვრებასა და ხელოვნებაში. აზომვის შედეგად ხელოვნებათმცოდნეებმა დაადგინეს, რომ ბევრ ხუროთმოძღვრულ შედევრში სწორედ ოქროს კვეთის პროპორციაა გამოყენებული. აქ გვერდს ვერ ავუვლით ჩვენი სახელოვანი მხატვრის სერგო ქობულაძის ჯერაც გამოუქვეყნებელ გამოკვლევას, სადაც დასაბუთებულია, რომ მცხეთის ჯვრის დიდებული ტაძარი ოქროს კვეთის პროპორციის მიხედვით არის აგებული.

არც კომპოზიტორები და პოეტები დარჩენილან „გულგრილნი" ოქროს კვეთის მიმართ. ცნობილია, მაგალითად, რომ გამოჩენილმა უნგრელმა კომპოზიტორმა ბელა ბარტოკმა ბევრი თავისი მუსიკალური ნაწარმოები ოქროს კვეთაზე დააფუძნა. რაც შეეხება პოეტებს, აკადემიკოსი გიორგი წერეთელი აღნიშნავს, რომ „პოეზიაში რუსთაველი პირველია მსოფლიოში და შეიძლება ერთადერთი, რომელმაც ოქროს კვეთაზე ააგო ესოდენ დიდი მოცულობის პოეტური ნაწარმოები. მისი პოემის 1587 სტროფიდან 863 ოქროს კვეთაზეა აგებული...". მაგრამ ამაზე ქვემოთ.

დაკვირვება ცხადყოფს, რომ ესთეტიკური თვალსაზრისით ოქროს კვეთას გარკვეული უპირატესობა აქვს. ამის დამადასტურებელია თუნდაც იმ ცდის შედეგები, რომელიც გასული საუკუნის ბოლოს ჩაატარეს: გამოსაცდელს ათ სხვადასხვა მარკუთხედს სთავაზობდნენ, რომელთაგან მას ერთი უნდა აერჩია. მართკუთხედებს შორის იყო „ოქროს მართკუთხედიც" — გვერდების შეფარდებით

21:34. და აი, გამოსაცდელთა თითქმის 22%-მა სწორედ ეს მართკუთხედი აირჩია. გვერდს ვერ ავუვლით იმ ფაქტსაც, რომ წიგნებს, საფოსტო ბარათებს, საფულეებს, შოკოლადის ფილებს და ბევრ სხვა საგანს, ნებით თუ უნებლიეთ, ოქროს მართკუთხედის ფორმა აქვს.

ახლა კი მოვიყვან უდიდესი მეცნიერის იოჰან კეპლერის ორიგინალურ მოსაზრებას ოქროს კვეთის შესახებ: „გეომეტრია ორ საუნჯეს ფლობს. ერთი მათგანი პითაგორას თეორემაა, მეორე — მონაკვეთის საშუალო და კიდურა შეფარდებით გაყოფა... პირველი შეიძლება ოქროს საწყავს შევადაროთ, მეორე ძვირფას ქვას უფრო მოგვაგონებს".

ოქროს კვეთის შეფარდება და მისი შესანიშნავი თვისებები

დავუბრუნდეთ (2) ტოლობას. თუ მასში $x=a\tau$ აღნიშვნას შემოვიღებთ, τ-ს მიმართ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას მივიღებთ:

$$\tau^2+\tau-1=0 \qquad (4)$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების დადებითი ფესვი ოქროს კვეთის შეფარდების ტოლია:

$$\tau=\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

ეს მართლაცდა შესანიშნავი რიცხვია — მას ბევრი საინტერესო და საგულისხმო თვისება აქვს. გავეცნოთ ზოგიერთ მათგანს.

1. უშუალო გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ:

$$\tau=0{,}618033989..., \quad \frac{1}{\tau}=1{,}618033989...$$

დააკვირდით: τ რიცხვის შებრუნებული τ-ზე 1-ით მეტია. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ τ ერთადერთი დადებითი რიცხვია, რომელსაც ეს თვისება აქვს.

მართლაც, ვთქვათ, x ამ თვისების მქონე დადებითი რიცხვია, ესე იგი

$$\frac{1}{x}=1+x.$$

მაშინ ცხადია, რომ ის $x^2+x-1=0$ განტოლების ფესვი უნდა იყოს. ამ განტოლებას კი ერთადერთი დადებითი ფესვი აქვს: τ.

2. თუ ხემოთ მიღებულ (4) განტოლებას

$$\tau=\frac{1}{1+\tau}$$

სახით წარმოვადგენთ და უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში τ-ს მისი

$$\frac{1}{1+\tau}$$

მნიშვნელობით შევცვლით, τ ასე წარმოდგება:

$$\tau=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\tau}}.$$

ამ ტოლობაში იგივე შეცვლა მოვახდინოთ:

$$\tau=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\tau}}},$$

ეს პროცესი შეიძლება უსასრულოდ გავაგრძელოთ. მივიღებთ:

$$\tau=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}} \qquad (5)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომ გამოსახულებას ჯაჭვწილადი ეწოდება. ამრიგად, მივიღეთ τ რიცხვის წარმოდგენა უსასრულო ჯაჭვწილადის სახით. არ შეიძლება თვალში არ გვეცეს ამ წარმოდგენის უკიდურესი სიმარტივე — ჯაჭვწილადი მხოლოდ ერთიანებითაა ჩაწერილი!

ეს τ-ს მართლაც შესანიშნავი თვისებაა...

3. აი, τ-ს კიდევ ერთი წარმოდგენა — ამჯერად რადიკალების საშუალებით:

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} \qquad (6)$$

ეს ტოლობა რომ დავამტკიცოთ და თანაც მარჯვენა ნაწილს გარკვეული აზრი მივანიჭოთ, განვიხილოთ რიცხვთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$\sqrt{1}, \quad \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}, \ldots,$$

რომლის n-ური წევრი (აღვნიშნოთ ის φ_n-ით) n რადიკალს შეიცავს:

$$\varphi_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}. \tag{7}$$

ვაჩვენოთ, რომ (φ_n) კრებადი მიმდევრობაა და მისი ზღვარია $\frac{1}{\tau}$. მიმდევრობის კრებადობის დასადგენად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ის ზრდადია და შემოსაზღვრული. (φ_n) მიმდევრობის ზრდადობა, ასე ვთქვათ, შეუიარაღებელი თვალითაც ჩანს. მართლაც, ნებისმიერი n-ისათვის $\varphi_n < \varphi_{n+1}$. ახლა (φ_n)-ის შემოსაზღვრულობა დავამტკიცოთ. ვინაიდან

$$\varphi_{n+1} = \sqrt{1+\varphi_n}, \tag{8}$$

ამიტომ $\varphi_n < \varphi_{n+1}$ უტოლობის თანახმად,

$$\varphi_n < \sqrt{1+\varphi_n}$$

და რადგან φ_n დადებითია, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობა

$$\varphi_n^2 - \varphi_n - 1 < 0$$

უტოლობის ეკვივალენტურია. მაგრამ, როგორც ვიცით, x^2+px+q სამწევრი უარყოფითია მის ნულებს შორის, ესე იგი, $\varphi_n^2-\varphi_n-1$ სამწევრის უარყოფითობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ φ_n მოთავსებული იყოს

$$x^2 - x - 1 = 0$$

განტოლების ფესვებს შორის. თუ მივიღებთ მხედველობაში იმასაც, რომ $\varphi_n > 0$ ყველა n-ისათვის, საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$0 < \varphi_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

რითაც შემოსაზღვრულობაც დამტკიცებულია.

ამრიგად, (φ_n) მიმდევრობა კრებადია. აღვნიშნოთ მისი ზღვარი φ-თი:

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi.$$

საკმარისია ზღვარზე გადავიდეთ (8) ტოლობაში, რომ φ-ს მნიშვნელობაც ვიპოვოთ. გვაქვს:

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\varphi_n}, \qquad \varphi = \sqrt{1+\varphi}.$$

მაშასადამე, φ არის $\varphi^2-\varphi-1=0$ განტოლების დადებითი ფესვი, ესე იგი,

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{\tau},$$

საიდანაც უშუალოდ მიიღება (6) ტოლობა.

აქაც არ შეიძლება არ აღინიშნოს τ რიცხვის წარმოდგენის სიმარტივე — აქაც მხოლოდ ერთიანები მონაწილეობენ!

რაციონალური მიახლოებანი

პრაქტიკული თვალსაზრისით დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ირაციონალური რიცხვის რაციონალური რიცხვებით მიახლოებას. რა თქმა უნდა, არც τ ირაციონალური რიცხვია გამონაკლისი. მის რაციონალურ მიახლოებათა მოსაძებნად, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ძალიან მოსახერხებელია (5) ტოლობა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს τ-სათვის ეგრეთ წოდებული მახლოვადი წილადები ვიპოვოთ. ეს წილადებია:

$$\tau_1=\frac{1}{1}, \quad \tau_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, \quad \tau_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

და, საზოგადოდ, ნებისმიერი n-ისათვის:

$$\tau_n=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}. \tag{9}$$

(მკითხველი ალბათ მიხვდა, რომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილში n წილადის ხაზია).

ამ წილადების ზღვარი არის τ რიცხვი, ამიტომაც თითოეული მათგანი ამ რიცხვის მიახლოებად შეგვიძლია მივიღოთ. უშუალო გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$\tau_1=1, \quad \tau_2=\frac{1}{2}, \quad \tau_3=\frac{2}{3}, \quad \tau_4=\frac{3}{5}, \quad \tau_5=\frac{5}{8}.$$

წილადთა ეს მიმდევრობა ძალიან მარტივი კანონით არის შედგენილი: მეორიდან დაწყებული, ყოველი მათგანი არის წინა წილადის მნიშვნელის შეფარდება მრიცხველისა და მნიშვნელის ჯამთან. რა იქნება შემდეგ? შენარჩუნებული იქნება თუ არა ეს კანონზომიერება? ვაჩვენოთ, რომ ეს ასეა.

მართლაც, τ_n-ის ზოგადი გამოსახულებიდან, ესე იგი (9) ტოლობიდან ჩანს, რომ

$$\tau_{n+1}=\frac{1}{1+\tau_n}$$

და ამიტომ, თუ $\tau_n=m/k$, მაშინ

$$\tau_{n+1}=\frac{1}{1+\frac{m}{k}}=\frac{k}{m+k},$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

მახლოვადი წილადების შედგენის ეს მარტივი კანონი საშუალებას გვაძლევს სულ ადვილად, თითქმის მექანიკურად დავწეროთ τ-ს მახლოვად წილადთა მიმდევრობა:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \ldots$$

რიცხვთა თეორიის კურსებში მტკიცდება ჯაჭვწილადის მახლოვად წილადთა შემდეგი თვისება: კენტნომრიანი მახლოვადი წილადები კლებადობით მიისწრაფვიან მათი წარმომქმნელი ჯაჭვწილადით გამოსახული რიცხვისაკენ, ლუწნომრიანი მახლოვადი წილადები კი ზრდადობით მიისწრაფვიან იმავე რიცხვისაკენ, კერძოდ, τ რიცხვის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{21}{34}<\ldots<\tau<\ldots<\frac{13}{21}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}.$$

კავშირი ფიბონაჩის რიცხვებთან

განვიხილოთ რიცხვთა (u_n) მიმდევრობა, რომლის პირველი ორი წევრი 1-ს უდრის, ხოლო ყოველი შემდგომი — წინა ორი წევრის ჯამს. ამრიგად:

$$u_1=1, \quad u_2=1, \quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \quad (n=1, \quad 2, \quad 3,\ldots).$$

ეს მიმდევრობა ფიბონაჩის მიმდევრობის სახელითაა ცნობილი, რადგან იგი, ერთ ამოცანასთან დაკავშირებით, შემოიღო XII–XIII საუკუნეების გამოჩენილმა იტალიელმა მათემატიკოსმა ლეონარდო პიზელმა, რომელსაც მეტსახელად ფიბონაჩი ერქვა. (ფიბონაჩი — *filius Bonacci* — ბონაჩის ვაჟიშვილი.) აი, ამ მიმდევრობის რამდენიმე საწყისი წევრი:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...

თუ გავიხსენებთ τ რიცხვის მიახლოებებს მახლოვადი წილადებით, შევამჩნევთ, რომ ფიბონაჩის მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის

მომდევნო წევრთან შეფარდება არის τ-ს მახლოვადი წილადი, ესე იგი, ოქროს კვეთის შეფარდების მიახლოებითი მნიშვნელობა. მიახლოება მით უკეთესია, რაც მეტია აღებული წევრის ნომერი.

თუკი მიმდევრობის სამ, ერთმანეთის მიმდევნო წევრს — u_n-ს, u_{n+1}-სა და u_{n+2} -ს ავიღებთ, მაშინ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \text{ და } \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

τ რიცხვის ორი მეზობელი მახლოვადი წილადია, რომელთაგან ერთი ნაკლებია τ-ზე, მეორე — მეტი.

დაბოლოს, ერთი, შემდგომისათვის არსებითი საკითხი გავარკვიოთ.

ჯერ ასეთი ზოგადი კითხვა დავსვათ: შეიძლება თუ არა რაიმე მთელი w რიცხვი ორ ისეთ მთელ u და v ნაწილად გავყოთ, რომ უკანასკნელთა შეფარდება τ-ს ტოლი იყოს?

რამდენადაც, τ ირაციონალური რიცხვია, მთელი u და v რიცხვების შეფარდება ვერავითარ შემთხვევაში ვერ იქნება მისი ტოლი — ეს ცხადია. ხსენებული შეფარდება მხოლოდ მიახლოებით თუ მოგვცემს τ-ს მნიშვნელობას.

ჰოდა, ახლა ზემოთ დასმული ზოგადი კითხვა დავაკონკრეტოთ და ვიკითხოთ: როგორია ეს მიახლოება? უფრო ზუსტად: როგორი უნდა იყოს w, რომ $u:v$ შეფარდება რაც შეიძლება ახლო იყოს τ-სთან?

ამ კითხვაზე პასუხის გაცემაში დაგვეხმარება მახლოვად წილადთა ერთი, მართლაცდა საინტერესო თვისება. გავეცნოთ მას. ვთქვათ, a არის რაიმე ჯაჭვწილადის მახლოვადი წილადის მნიშვნელი. განვიხილოთ სიმრავლე წილადებისა, რომელთა მნიშვნელი a-ს არ აღემატება. თურმე ყველა ამ წილადიდან მოცემულ ჯაჭვწილადის მნიშვნელობასთან ყველაზე ახლოს არის ის, რომლის მნიშვნელია a.

მაგრამ τ-ს მახლოვად წილადთა მნიშვნელები ფიბონაჩის რიცხვებია და, მაშასადამე, ასეთი რიცხვების მთელ ნაწილებად გაყოფა τ_n-ის მიხედვით τ-ს კარგ მიახლოებას მოგვცემს. სხვანაირად: თუ w ფიბონაჩის რიცხვია, მაშინ ის გაიყოფა ორ მთელ u და v ნაწილად — აგრეთვე ფიბონაჩის რიცხვებად და $u:v$ შეფარდება τ-ს მახლოვადი წილადია, ესე იგი, ამ რიცხვის კარგ მიახლოებას გვაძლევს.

ამრიგად, ოქროს კვეთით „კარგად" გაიყოფა, მაგალითად, **8**, **13**, **21** და მათი გაყოფის შედეგად მიღებული ნაწილებისაგან შედგენილი

$$\frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}$$

წილადები — (5) ჯაჭვწილადების მახლოვადი წილადებია, ესე იგი იძლევიან τ-ს კარგ მიახლოებას.

ოქროს კვეთა „ვეფხისტყაოსანში"

ახლა ჩვენ, ასე ვთქვათ, ყოველმხრივ მზად ვართ ვისაუბროთ ჩვენი სასიქადულო მეცნიერის — გიორგი წერეთლის იმ გამოკვლევის შესახებ, რომელიც წერილის შესავალში ვახსენე.

„ვეფხისტყაოსანში სულ 1587 სტროფია. თითოეულ სტროფში — ოთხი სტრიქონი, ანუ კარედი. კარედი იყოფა ორ ნახევარკარედად — თითოეულში 8 მარცვალია. საგულისხმოა, რომ ნახევარკარედების საზღვარი სიტყვათგასაყარია — არ გვაქვს არც ერთი შემთხვევა, როცა სიტყვის ნაწილი ერთ ნახევარკარედშია მოთავსებული, ნაწილი — მეორეში. ნახევარკარედი, თავის მხრივ, ორ სეგმენტად იყოფა. თანაც სეგმენტებად დანაწილება ორგვარია:

A. სიმეტრიული, როცა ნახევარკარედში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტია ოთხ-ოთხი მარცვლით თითოეულში.

B. ასიმეტრიული, როცა ნახევარკარედი ორი სხვადასხვა ზომის, კენტმარცვლიანი სეგმენტისაგან შედგება.

საგულისხმოა, რომ *A* და *B* ტიპის სეგმენტების მონაცვლეობა ნახევარკარედის, კარედისა ან მთელი სტროფის ფარგლებში არსად არ გვხვდება. ისინი შეიძლება მონაცვლეობდნენ მხოლოდ სტროფების მიხედვით და ამის შესაბამისად ქმნიან მაღალ ან დაბალ შაირს (*A* — მაღალს, *B* — დაბალს).

მაღალი შაირის შემთხვევაში, როგორც ითქვა, ნახევარკარედში ორი თანაბარი ზომის სეგმენტია და თითოეულში ოთხი მარცვალია. ეს სიმბოლურად შეიძლება ასე ჩავწეროთ: (**4, 4** || **4, 4**), აი, ორი მაგალითი:

მტერი მტერსა | ვერას ავნებს, || რომე კაცი | თავსა ივნებს.
თავისისა | ცნობისაგან || ჩავარდების | კაცი ჭირსა.

რაც შეეხება დაბალ შაირს, ის ოქროს კვეთასთან არის დაკავშირებული. საქმე ის არის, რომ ამ შემთხვევაში ნახევარკარედის შემადგენელი ორი სეგმენტიდან ერთი სამმარცვლიანია, მეორე — ხუთმარცვლიანი. ჩვენ კი უკვე ვიცით, რომ **3** და **5** მიიღება **8**-ის ოქროს კვეთით. ამრიგად, აქ ნახევარკარედის ორ სეგმენტად ოქროს კვეთა გვაქვს.

საინტერესოა ისიც, თუ როგორი მიმდევრობით გვხვდება სამმარ-

ცვლიანი და ხუთმარცვლიანი სეგმენტები მთელი კარედის მანძილზე. თურმე აქ ორი შემთხვევა გვაქვს — ეკვივალენტური სიმეტრიისა და ინვერსიული სიმეტრიისა.

ეკვივალენტური სიმეტრიის დროს მეორე ნახევარკარედის სეგმენტებად დაყოფა ისეთივეა, როგორც პირველში: (5, 3 ‖ 5, 3) ან (3, 5 ‖ 3, 5). აი ამის მაგალითები:

გახარებოდა | ხვარაზმშას ‖ სიხარულითა | დიდითა;
მიღწვიან, | მომიგონებენ ‖ დამლოცვენ, | მოვეგონები.

ინვერსიული სიმეტრიის შემთხვევაში მეორე ნახევარკარედის სეგმენტები პირველის სეგმენტების სარკული ანარეკლია, ესე იგი გვაქვს (5, 3 ‖ 3, 5) ან (3, 5 ‖ 5,3). მაგალითად:

მოლმობიერდა, | მომიტკბა ‖ გამწყრალი | გამქისებული,
დამოსნა | ტურფა-ტურფითა ‖ ერთმანეთისა | მჯობითა.

ამით დავკმაყოფილდეთ. მჯერა, რომ დაინტერესებული მკითხველი გაეცნობა აკადემიკოს გიორგი წერეთლის გამოკვლევას და უთუოდ გაიზიარებს ავტორის აზრს, რომ „რუსთაველმა პოეზიაში მოგვცა ჩვენ სრულყოფილი სიმეტრია, მსგავსად იმისა, როგორც ტიციანმა, რაფაელმა და ლეონარდო და ვინჩიმ მხატვრობასა და საერთოდ ხელოვნებაში, და ახლა, როდესაც ეს სრულყოფილება გამოვლენილია, ქართველი პოეტის ადგილი მსოფლიო პოეზიის ისტორიაში სრულებით განსაკუთრებულად გვესახება“.

AMTUVWY
BCDEK
NSZ
HIOX
FGJLPQR

ლათინური ანბანის ოცდაექვსი ასო ხუთ ჯგუფად არის დაყოფილი. ხომ ვერ დაადგენთ, რა უდევს საფუძვლად ამ დაყოფას?

არქიმედე
(ძვ. წელთაღრ. მე-3 საუკ.)

როგორ გამოთვალა არქიმედემ პარაბოლური სეგმენტის ფართობი

არქიმედე! ვის არ სმენია ეს სახელი?! ამ უდიდესმა მოაზროვნემ წარუშლელი კვალი დატოვა კაცობრიობის ისტორიაში. მისი შემოქმედების მკვლევარნი აღტაცებით ლაპარაკობენ მასზე, როგორც უდიდეს ინჟინერზე, ასტრონომ-დამკვირვებელზე, რომელსაც ბადალი არა ჰყავს, მათემატიკოსზე, რომლისთვისაც უამრავი გეომეტრიული ფაქტია ცნობილი, ადამიანზე, რომელმაც ბუნების ყველა საიდუმლოება იცის... და მართლაც, არ შეიძლება აღფრთოვანებული არ იყო ამ გენიოსის ნააზრევით!..

აი, თუნდაც „პარაბოლის კვადრატურა" — მისი ერთ-ერთი მათემატიკური შრომა. რაოდენი გონებამახვილობაა მასში!

სხვათა შორის, ამ შრომამ არქიმედეს რამდენიმე სხვა გეომეტრიულ შრომასთან ერთად უდიდესი როლი შეასრულა მათემატიკის განვითარების ისტორიაში: მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგის — ინტეგრალური აღრიცხვის შემქმნელთა აღიარებით, მათთვის ფუძემდებლური სწორედ არქიმედეს შრომები და უპირველესად „პარაბოლის კვადრატურა“ იყო. თუ გავიხსენებთ, რომ არქიმედე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე **III** საუკუნეში ცხოვრობდა, ინტეგრალური აღრიცხვა კი **XVII** საუკუნეში შეიქმნა, ცხადი გახდება არქიმედეს გენიის სიდიადე.

„პარაბოლის კვადრატურა“ მიძღვნილია პარაბოლითა და მისი ქორდით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის გამოთვლისადმი და, არსებითად, შემდეგი თეორემის დამტკიცებას შეიცავს: **პარაბოლური სეგმენტის ფართობი იმ სამკუთხედის ფართობის ოთხ მესამედს უდრის, რომელსაც სეგმენტთან საერთო ფუძე და სიმაღლე აქვს.**

შრომა, პირობით, ორ ნაწილად შეიძლება გავყოთ. პირველ ნაწილში არქიმედე გვიჩვენებს, თუ როგორ მივიდა იგი ამ შედეგამდე მექანიკური მოსაზრებებით, მის მიერვე აღმოჩენილი ბერკეტის კანონის მოშველიებით, მეორეში — იძლევა თეორემის გეომეტრიულ დამტკიცებას.

ჩემი მიზანია ნაშრომის მეორე ნაწილის შინაარსი გაგაცნოთ. ამასთანავე, ქვემოთ, ყველგან ვცდილობ რაც შეიძლება ახლოს ვიყო ორიგინალთან. ალბათ ფიქრობთ — არქიმედე ოცდასამი საუკუნის წინათ ცხოვრობდა და მისი თანამედროვე ენით ამეტყველება განა ძნელი არ არის?... მერწმუნეთ, არა! — არქიმედე ისე თანამიმდევრულად, ნათლად და გასაგებად მსჯელობს, რომ ბევრს შეშურდება... ჰოდა, ხომ ამბობენ — ცოდვა გამხელილი სჯობსო, მეც გამოგიტყდებით: დასახული მიზნის მიღწევაში დაბრკოლებას თითქმის არ შევხვედრივარ, ისეთ გენიოსთან „გასაუბრებამ“ კი, როგორიც არქიმედეა, უდიდესი სიამოვნება მომანიჭა!...

1. უპირველეს ყოვლისა, ჩამოვაყალიბოთ პარაბოლის ერთი თვისება, რომლითაც ქვემოთ ვისარგებლებთ.

თუ პარაბოლის რაიმე P წერტილზე გავლებული AB მხები და A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... ქორდები მისი პარალელურია, მაშინ ამ უკანას-

კნელთა შუა $C_1, C_2, C_3, \ldots$ წერტილები პარაბოლის ღერძის პარალელურ PC წრფეზე მდებარეობენ (ნახ. 1). გარდა ამისა,

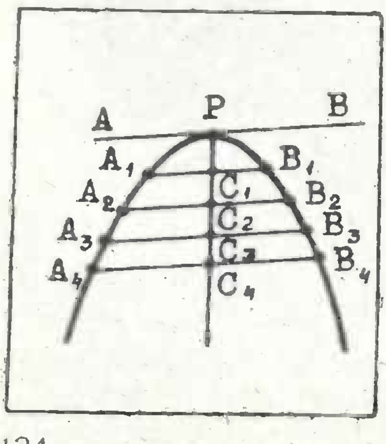
$$\frac{A_1C_1^2}{PC_1} = \frac{A_2C_2^2}{PC_2} = \frac{A_3C_3^2}{PC_3} = \ldots \tag{1}$$

2. ახლა განვიხილოთ პარაბოლური სეგმენტი, ესე იგი პარაბოლითა და მისი ქორდით შემოსაზღვრული APB ფიგურა (ნახ. 2). სეგმენტის ფუძე დავარქვათ თვით AB ქორდას, წვერო — P წერტილს, რომელზეც გავლებული MN მხები ფუძის პარალელურია, ხოლო სიმაღლე — წვეროდან ფუძეზე დაშვებულ მართობს.

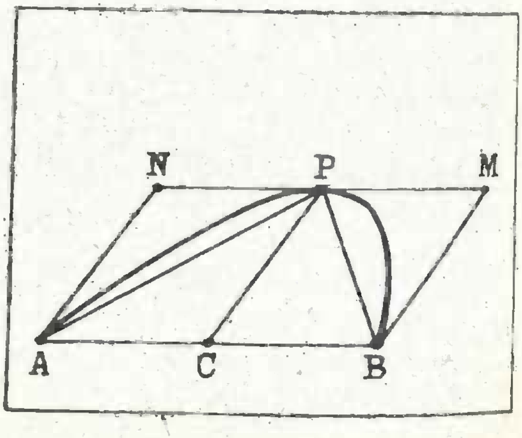
თუ C ფუძის შუაწერტილია, მაშინ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, PC წრფე პარაბოლის ღერძის პარალელურია. ჩავხაზოთ სეგმენტში APB სამკუთხედი და შემოვხაზოთ მასზე $ABMN$ პარალელოგრამი, რომლის AN და BM გვერდები PC წრფის პარალელურია. ცხადია, რომ ჩახაზული სამკუთხედის ფართობი პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს უდრის და ამიტომ სეგმენტის ფართობის ნახევარზე მეტია. ამ ფაქტის გათვალისწინებით მეტად მნიშვნელოვან დასკვნამდე მივდივართ. სახელდობრ, მოცემულ სეგმენტში შეიძლება ისეთი მრავალკუთხედის ჩახაზვა, რომ მის გარეთ დარჩენილი სეგმენტების ფართობთა ჯამი ნებისმიერ წინასწარ დასახელებულ რიცხვზე ნაკლები იქნება.

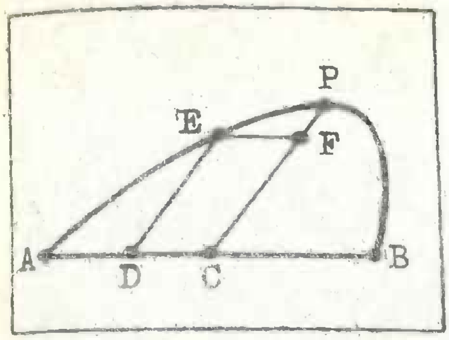
მართლაც, APB სამკუთხედის ფართობი რომ მოცემული სეგმენტის ფართობის ნახევარზე მეტია, უკვე ვიცით. ახლა, დარჩენილ ორ სეგმენტში იმავე წესით ჩავხაზოთ ორი სამკუთხედი („იმავე წესით“ ნიშნავს: სეგმენტში ისე ვხაზავთ სამკუთხედს, რომ მას სეგმენტთან საერთო ფუძე და წვერო ჰქონდეს). ამ ორი სამკუთხედის

ნახ. 1

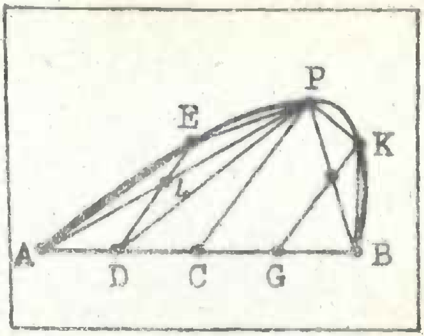


ნახ. 2





ნახ. 3



ნახ. 4

ფართობთა ჯამი სეგმენტების ფართობთა ჯამის ნახევარზე მეტია, დარჩა ოთხი სეგმენტი. მათშიც ჩავხაზოთ იმავე წესით სამკუთხედები. მათი ფართობების ჯამი სეგმენტთა ფართობების ჯამის ნახევარზე მეტი იქნება და ასე შემდეგ — ეს პროცესი გავაგრძელოთ. დაუკვირდით რა ხდება: მთელს, ესე იგი, მოცემული სეგმენტის ფართობს აკლდება მის ნახევარზე მეტი, დარჩენილს მის ნახევარზე მეტი, იმას, რაც დარჩა მის ნახევარზე მეტი და ასე შემდეგ. ცხადია, საბოლოოდ მივიღებთ სეგმენტში ჩახაზულ, სამკუთხედებისაგან შედგენილ მრავალკუთხედს, რომლის გარეთ დარჩენილი სეგმენტების ფართობთა ჯამი ნებისმიერად მცირე იქნება.

3. გავყოთ AC მონაკვეთი D წერტილით შუაზე და ამ წერტილზე გავავლოთ PC წრფის პარალელური წრფე. ვთქვათ, ეს წრფე, პარაბოლას E წერტილში გადაკვეთს. დავამტკიცოთ, რომ

$$PC = \frac{4}{3}ED. \qquad (2)$$

მართლაც, გავავლოთ AC-ს პარალელური EF მონაკვეთი. მაშინ, (1) ტოლობის თანახმად,

$$\frac{AC^2}{PC} = \frac{EF^2}{PF}$$

და ვინაიდან $AC = 2\,EF$, ამიტომ $PC = 4\,PF$. მაშასადამე,

$$FC = ED = 3\,PF.$$

აქედან სულ ადვილად მიიღება (2) ტოლობა.

4. სეგმენტში APB სამკუთხედის ჩახაზვის შემდეგ დარჩა ორი სეგმენტი, თითოეულ მათგანში იმავე წესით ჩავხაზოთ AEP და BKP სამკუთხედები (ნახ. 4).

ვაჩვენოთ, რომ APB სამკუთხედის ფართობი რვაჯერ მეტია როგორც AEP, ისე BKP სამკუთხედის ფართობზე:

$$S_{APB}=8\,S_{AEP}=8\,S_{BKP}.$$

ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ თუ AEP სეგმენტის E წვეროზე პარაბოლის ღერძის პარალელურ ED წრფეს გავავლებთ, ის AP ქორდას და, მაშასადამე, AC მონაკვეთსაც შუაზე გაჰყოფს. ამრიგად, $AD=DC$. ანალოგიურად, $CG=GB$. შემდეგ, ვინაიდან $PC=2\,LD$, ამიტომ (2) ტოლობის თანახმად

$$LD=\frac{2}{3}\,ED,$$

ესე იგი,

$$LD=2\,EL.$$

ახლა ADL და ALE სამკუთხედები განვიხილოთ. მათი DL და EL ფუძეები ერთ წრფეზე მდებარეობენ, A კი საერთო წვეროა. ეს გვიჩვენებს, რომ მათი სიმაღლეები ტოლია და, რამდენადაც ADL სამკუთხედის ფუძე (3) ტოლობის თანახმად ორჯერ მეტია ALE სამკუთხედის ფუძეზე, ამიტომ

$$S_{ADL}=2\,S_{ALE}.$$

მსგავსადვე, საერთო P წვეროს მქონე DLP და LEP სამკუთხედებისათვის გვაქვს:

$$S_{DLP}=2\,S_{LEP}.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის შეკრება გვაძლევს:

$$S_{APD}=2\,(S_{ALE}+S_{LEP})=2\,S_{AEP}.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ

$$S_{APB}=4\,S_{APD}$$

ტოლობას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$S_{APB}=8\,S_{AEP}.$$

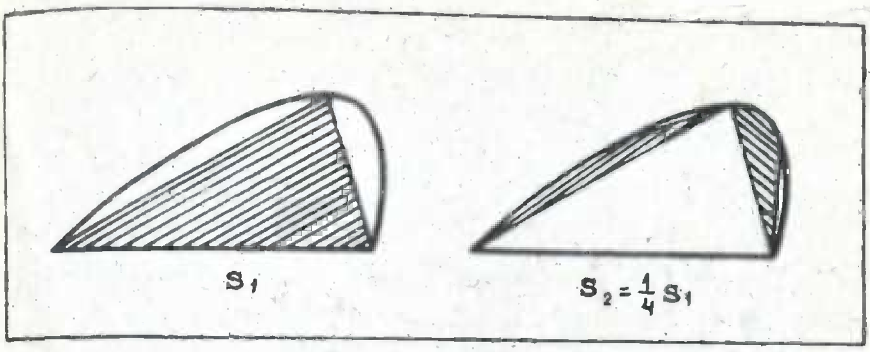
ანალოგიურად დამტკიცდება

$$S_{APB}=8\,S_{BKP}$$

ტოლობაც.

5. აღვნიშნოთ APB სამკუთხედის ფართობი s_1-ით, ხოლო AEP და BKP სამკუთხედების ფართობთა ჯამი s_2-ით. დამტკიცებულის თანახმად,

$$s_1=4\,s_2.$$



ნახ. 5

ამრიგად, თუ პარაბოლურ სეგმენტში გარკვეული წესით ჩახაზულია სამკუთხედი და ამის შემდეგ დარჩენილ ორ სეგმენტში იმავე წესით კიდევ ორი სამკუთხედია ჩახაზული, მაშინ ამ უკანასკნელთა ფართობების ჯამი თავდაპირველად ჩახაზული სამკუთხედის ფართობის მეოთხედს უდრის (ნახ. 5).

6. სამკუთხედების ჩახაზვის ზემოაღწერილი პროცესი გავაგრძელოთ. როგორც შევთანხმდით, პირველად ჩახაზული სამკუთხედის ფართობი s_1-ით აღვნიშნოთ, დარჩენილ ორ სეგმენტში ჩახაზულ სამკუთხედთა ფართობების ჯამი s_2-ით, ამის შემდეგ დარჩენილ ოთხ სეგმენტში ჩახაზული სამკუთხედების ფართობთა ჯამი s_3-ით და ასე შემდეგ. მივიღებთ რიცხვთა

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \dots,\ s_n,\ s_{n+1}, \dots \qquad (4)$$

მიმდევრობას.

წინა პუნქტის ბოლოს გაკეთებული დასკვნა საფუძველს გვაძლევს ვამტკიცოთ, რომ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, მეორიდან დაწყებული წინა წევრის მეოთხედს უდრის, ესე იგი,

$$s_2 = \frac{1}{4} s_1,\ s_3 = \frac{1}{4} s_2, \dots,\ s_{n+1} = \frac{1}{4} s_n, \dots \qquad (5)$$

მიღებულ — (4) მიმდევრობას ერთი შესანიშნავი თვისება აქვს. სახელდობრ, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n + \frac{1}{3} s_n = \frac{4}{3} s_1. \qquad (6)$$

მართლაც, ვინაიდან

$$4\ (s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n) =$$
$$= 4\ s_1 + (4\ s_2 + 4\ s_3 + \dots + 4\ s_{n-1} + 4\ s_n),$$

ამიტომ (5) თანაფარდობათა ძალით

$$4(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+s_n)=$$
$$=4s_1+(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})$$

ან, რაც იგივეა

$$3(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1})+4s_n=4s_1.$$

აქედან

$$s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+\frac{4}{3}s_n=\frac{4}{3}s_1,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

7. სასურველ მიზნამდე ერთი ნაბიჯიღა დარჩა — უნდა ვაჩვენოთ, რომ პარაბოლური სეგმენტის S ფართობი APB სამკუთხედის ფართობის ოთხ მესამედს უდრის:

$$S=\frac{4}{3}s_1. \tag{7}$$

არქიმედე ამ ტოლობას მეტად მოხდენილად ამტკიცებს. ამაში მკითხველი თავადაც დარწმუნდება.

ვთქვათ, (7) ტოლობა არ არის სამართლიანი. მაშინ უნდა გვქონდეს

$$S>\frac{4}{3}s_1 \text{ ან } S<\frac{4}{3}s_1.$$

ვაჩვენოთ, რომ ორივე ეს უტოლობა მცდარია. დავუშვათ ჯერ, რომ

$$S>\frac{4}{3}s_1. \tag{8}$$

მეორე პუნქტის ბოლოს აღნიშნული იყო, რომ პარაბოლურ სეგმენტში სამკუთხედების მიმდევრობით ჩახაზვის შედეგად მივიღებთ მრავალკუთხედს, რომლის გარეთ დარჩენილი სეგმენტების ფართობთა ჯამი ნებისმიერად მცირე იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ n-ის სათანადოდ შერჩევით

$$S-(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+s_n)$$

სხვაობა ნებისმიერად მცირე შეიძლება გავხადოთ. (შემდეგში, n-ის ზრდასთან ერთად, იგი, ცხადია, კიდევ უფრო შემცირდება!) ავიღოთ, კერძოდ, n იმდენად დიდი, რომ ხსენებული სხვაობა დადებით

$$S-\frac{4}{3}s_1$$

რიცხვზე ნაკლები იყოს:

$$S-(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+s_n)<S-\frac{4}{3}s_1.$$

ეს უტოლობა ეკვივალენტურია შემდეგისა:

$$s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+s_n>\frac{4}{3}s_1,$$

რაც (6) ტოლობის თანახმად შეუძლებელია. ამრიგად, (8) უტოლობა მცდარია.

ახლა ვთქვათ, რომ

$$S<\frac{4}{3}s_1. \tag{9}$$

ვინაიდან (4) მიმდევრობის წევრები თანდათან მცირდებიან და ნულს უახლოვდებიან, ამიტომ n შეიძლება იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ იყოს:

$$\frac{1}{3}s_n<\frac{4}{3}s_1-S.$$

ამ უტოლობიდან იმავე (6) ტოლობის მოშველიებით მივიღებთ:

$$S<s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}+s_n,$$

რაც აშკარა აბსურდია! მაშასადამე, მცდარია (9) უტოლობაც.

დასკვნა: ორივე — (8) და (9) უტოლობა მცდარია, მაშასადამე, (7) ტოლობა ჭეშმარიტია.

> არქიმედეს თხზულებების დაკვირვებით წაკითხვის შემდეგ, გეომეტრების ახალი აღმოჩენები სრულიადაც აღარ გვაკვირვებს.
>
> გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცი

იცვლება თუ არა ჯამი შესაკრებთა გადანაცვლებით?

თქვენ როგორ უპასუხებდით ამ კითხვას? ალბათ, უარყოფითად, არა? თუმცა... რატომ „ალბათ“? არითმეტიკის ერთ-ერთი ძირითადი კანონი — შეკრების გადანაცვლებადობის, ანუ კომუტაციურობის კანონი ხომ კატეგორიულად აცხადებს: **შესაკრებთა გადანაცვლებით ჯამის მნიშვნელობა არ იცვლება!** ამიტომაც, სულაც არ გამიკვირდება თქვენი დაბეჯითებითი პასუხი: „არ იცვლება!“ და მაინც, გთხოვთ, მოთმინება იქონიოთ და ეს წერილი ბოლომდე წაიკითხოთ. დარწმუნებული ვარ, მაშინ დამეთანხმებით, რომ სათაურში გამოტანილი კითხვა არცთუ მთლად უსაფუძვლოა.

1. გავიხსენოთ, როგორ გამოითვლება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა G ჯამი, ვთქვათ,

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

ასეთი პროგრესიაა. აღვნიშნოთ G_n-ით მისი პირველი n წევრის ჯამი. კარგად არის ცნობილი, რომ

$$G_n = \frac{u_1 - u_n q}{1-q},$$

სადაც q პროგრესიის მნიშვნელია.

თუ უკანასკნელ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა n უსასრულოდ იზრდება და გავითვალისწინებთ, რომ u_n-ის ზღვარი ნულია, მივიღებთ:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 - u_n q}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to+\infty} (u_1 - u_n q) = \frac{u_1}{1-q}.$$

მაშასადამე, G -სათვის

$$G=\frac{u_1}{1-q}$$

ფორმულა მიიღება. რამდენადაც ამ ფორმულაში შემავალი G არის პროგრესიის ყველა წევრის ჯამი, ამიტომ ფორმულა ბუნებრივია ასეთ სახით ჩავწეროთ:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}. \tag{1}$$

აი, რამდენიმე მაგალითი:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2, \tag{2}$$

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots=\frac{2}{3}, \tag{3}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{3}{4}. \tag{4}$$

2. ამრიგად, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის გამოსათვლელად უნდა ვიპოვოთ ჯერ პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი და შემდეგ — ამ ჯამის ზღვარი. ეს მეთოდი წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი სხვა უსასრულო მიმდევრობის წევრთა ჯამის მოსაძებნადაც. ავიღოთ, მაგალითად,

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$$

მიმდევრობა. ვიპოვოთ მისი პირველი n წევრის ჯამი, ესე იგი

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

ამისათვის აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}.$$

თუ ამ იგივეობაში m-ის ნაცვლად 1-ს, 2-ს, 3-ს,..., n-ს შევიტანთ, შემდეგ n ტოლობას მივიღებთ:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

. . . .

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

მათი შეკრება გვაძლევს:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

ახლა საკმარისია ამ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, რომ მივიღოთ:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1. \tag{5}$$

ანალოგიურად ვიპოვით, რომ:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\frac{1}{3}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{20}. \tag{8}$$

აღსანიშნავია, რომ (5) — (8) ტოლობები ერთი ზოგადი ტოლობის კერძო შემთხვევებია. სახელდობრ, თუ (a_n) არითმეტიკული პროგრესიაა, რომლის არც ერთი წევრი ნულს არ უდრის, მაშინ:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}+\ldots=\frac{1}{a_1d}, \tag{9}$$

სადაც d პროგრესიის სხვაობაა. მართლაც, რადგან ნებისმიერი ნატურალური m-ისათვის

$$\frac{1}{a_ma_{m+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_m}-\frac{1}{a_{m+1}}\right),$$

ამიტომ, როგორც ეს ადვილი გამოსათვლელია,

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1^2+na_1d}.$$

თუკი მიღებულ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, მივიღებთ (9)-ს.

3. გამოვიყენოთ იგივე მეთოდი

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ldots,\frac{(-1)^{n-1}}{n},\ldots$$

მიმდევრობის წევრთა ჯამის, ესე იგი,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots \tag{10}$$

გამოსახულების მნიშვნელობის მოსაძებნად.

ამისათვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ S_n — მოცემული მიმდევრობის პირველი n წევრის ჯამი, ხოლო შემდეგ — მისი ზღვარი, როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. თუმცა, ისიც უნდა ვთქვა, რომ ზემოთ განხილული მაგალითებისაგან განსხვავებით ამ ზღვრის რიცხვით მნიშვნელობას ამჯერად ჩვენ არ ვიპოვით, — ეს არც ისე ადვილია, მაგრამ დავამტკიცებთ მის არსებობას (ცნობისმოყვარეთათვის დავძენ, რომ ხსენებული ზღვარი ln 2-ის ტოლია).

მაშ ასე, ვთქვათ,

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს გარკვეული S რიცხვი,

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n.$$

დამტკიცება ჩავატაროთ ორ ეტაპად. სახელდობრ, ჯერ დავამტკიცოთ, რომ არსებობს (S_{2m}) მიმდევრობის S ზღვარი, ხოლო შემდეგ შევამოწმოთ, რომ იმავე S რიცხვისკენ მიისწრაფვის (S_{2m-1}) მიმდევრობაც.

ვთქვათ, n ლუწია: $n=2m$. გვაქვს:

$$S_{2m}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

რამდენადაც თითოეულ ფრჩხილში მდგომი გამოსახულება დადებითია, ამიტომ S_{2m} იზრდება m-ის ზრდასთან ერთად. მეორეს მხრივ,

$$S_{2m}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-$$

$$-\left(\frac{1}{2m-2}-\frac{1}{2m-1}\right)-\frac{1}{2m}$$

ტოლობიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი m-ისათვის $S_{2m}<1$.

ამრიგად, (S_{2m}) მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრუ-

ლი. ცნობილია, რომ ეს ორი პირობა უზრუნველყოფს მიმდევრობის კრებადობას, მაშასადამე, (S_{2m}) მიმდევრობა კრებადია — მას აქვს გარკვეული S ზღვარი:

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m}=S \tag{11}$$

ახლა, ვთქვათ, n კენტია: $n=2m-1$. რადგან

$$S_{2m-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2m-2}+\frac{1}{2m-1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)+\frac{1}{2m}.$$

ამიტომ

$$S_{2m-1}=S_{2m}+\frac{1}{2m}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილს, როცა m უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, აქვს ზღვარი — ესაა S რიცხვი. ცხადია, იმავე S-ისაკენ მიისწრაფვის მარცხენა ნაწილიც, ესე იგი,

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m-1}=S. \tag{12}$$

მიღებული (11) და (12) ტოლობების საფუძველზე ვასკვნით, რომ (S_n) მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარია S:

$$\lim_{m\to+\infty} S_n=S.$$

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0, რომ მასზე მეტი ყველა n-ისათვის

$$|S_n-S|<\varepsilon. \tag{13}$$

ცხადია, n ან ლუწია, ან კენტი. პირველ შემთხვევაში, (11) ტოლობის თანახმად არსებობს ისეთი n_0', რომ (13) უტოლობა სამართლიანი იქნება მასზე მეტი ყველა n-ისათვის. ანალოგიურად, თუ n კენტია, არსებობს n_0'' ისეთი, რომ (13) უტოლობა სამართლიანი იქნება n_0''-ზე მეტი ყველა n-ისათვის (ეს (12) ტოლობიდან გამომდინარეობს).

უდიდესი n_0'-სა და n_0''-ს შორის n_0-ით აღვნიშნოთ და ვთქვათ, $n>n_0$. ადვილი მისახვედრია, რომ ყველა ასეთი n-ისათვის, მიუხედავად იმისა ლუწია იგი თუ კენტი, (13) უტოლობა ჭეშმარიტი იქნება. ეს კი სწორედ იმას ნიშნავს, რომ (S_n) მიმდევრობის ზღვარი არის S.

მაშასადამე, (10) გამოსახულებისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots=S. \tag{14}$$

4. თავდაპირველად აღებულ (10) გამოსახულებაში, ესე იგი (14) ტოლობის მარცხენა ნაწილში დადებითი და უარყოფითი წევრები მორიგეობითაა განლაგებული — ყოველ დადებითს უარყოფითი მოსდევს და ყოველ უარყოფითს — დადებითი. გადავაადგილოთ ეს წევრები ისე, რომ ყოველ დადებითს ორი უარყოფითი მოსდევდეს. მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4n}+\ldots$$

როგორ ფიქრობთ, რას უდრის ამ გამოსახულების მნიშვნელობა? ისევ S რიცხვს? თითქოს ასე უნდა იყოს, მაგრამ... არ არის! თურმე შესაკრებთა ამ გადანაცვლებით გამოსახულების მნიშვნელობა ორჯერ მცირდება! სხვანაირად: თუ ახლად მიღებული გამოსახულების პირველი n წევრის ჯამს S'_n-ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ (S'_n) მიმდევრობას, იგი კრებადია და მისი ზღვარი S-ის ნახევარია:

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n=\frac{1}{2}S. \tag{15}$$

შევუდგეთ დამტკიცებას. განვიხილოთ შესაძლო შემთხვევები. ვთქვათ, ჯერ, რომ $n=3m$. გვაქვს:

$$S'_{3m}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-$$

$$-\frac{1}{2(2m-1)}-\frac{1}{4m}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2(2m-1)}-\frac{1}{4m}\right).$$

თითოეულ ფრჩხილში პირველი ორი წევრი შევკრიბოთ და მიღებული ჯამი გარდავქმნათ:

$$S'_{3m}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(2m-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4m}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m}\right).$$

ფრჩხილებში მდგომი გამოსახულება ჩვენ უკვე შეგვხვდა — იგი S_{2m}-ის ტოლია. მაშასადამე,

$$S'_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m}.$$

ვინაიდან, (S_{2m}) მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ კრებადია (S'_{3m}) მიმდევრობაც და

$$\lim_{m\to+\infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} \lim_{m\to+\infty} S_{2m} = \frac{1}{2} S.$$

ახლა ვთქვათ, $n = 3m+1$. რადგან

$$S'_{3m+1} = S'_{3m} + \frac{1}{2m+1},$$

ამიტომ,

$$\lim_{m\to+\infty} S'_{3m+1} = \lim_{m\to+\infty} \left(S'_{3m} + \frac{1}{2m+1}\right) = \lim_{m\to+\infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} S.$$

დაბოლოს, თუ $n = 3m+2$, მაშინ

$$S'_{3m+2} = S'_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(2m+1)}$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{m\to+\infty} S'_{3m+2} = \lim_{m\to+\infty} \left(S'_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(2m+1)}\right) = \frac{1}{2} S.$$

ამრიგად,

$$\lim_{m\to+\infty} S'_{3m} = \lim_{m\to+\infty} S'_{3m+1} = \lim_{m\to+\infty} S'_{3m+2} = \frac{1}{2} S.$$

რადგან ყველა შესაძლო შემთხვევა განვიხილეთ ($n = 3m$, $n = 3m+1$, $n = 3m+2$) და ყველა შემთხვევაში (S'_n) მიმდევრობას ერთი და იგივე ზღვარი აქვს, ამიტომაც (15) ტოლობა დამტკიცებულია. (ცხადია, აქაც შეიძლება ზემოთ S_{2m} და S_{2m-1}-სათვის ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობა ჩატარდეს და დავრწმუნდეთ, რომ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0, რომ მასზე მეტი ყველა n-ისათვის

$$\left|S'_n - \frac{1}{2} S\right| < \varepsilon.$$

იმედი მაქვს, ამას მკითხველი თავად მოახერხებს.)

მაშასადამე, (14) ტოლობასთან ერთად

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \\ - \frac{1}{4n} \dots = \frac{1}{2} S$$

ტოლობაცა გვაქვს — წევრთა გადანაცვლებით ჯამი ორჯერ შემცირდა! გამოდის, რომ გადანაცვლებადობის კანონი სწორი არ ყოფილა...

5. დიახ, განხილულმა მაგალითმა თითქოს შეარყია გადანაცვლებადობის კანონის საძირკველი და ჩვენც მზად ვართ ეჭვქვეშ დავაყენოთ ამ კანონის ჭეშმარიტება. მაგრამ ეჭვი ნაადრევია — გადანაცვლებადობის კანონი ჭეშმარიტია და არც ერთ შემთხვევაში არ ირღვევა!

მაშ რა მოხდა? — იკითხავთ თქვენ. აი, სწორედ ამაზე ვისაუბროთ.

საქმე ის არის, რომ გადანაცვლებადობის კანონი ჩამოყალიბებულია ჯამებისათვის, ჯამი კი თავისთავად გულისხმობს შესაკრებთა სასრულ რაოდენობას. ჯამის მისაღებად ერთადერთი მოქმედება უნდა ჩავატაროთ — შეკრება და ისიც სასრულ რიცხვჯერ. ზემოთ კი ჩვენ განვიხილეთ „უსასრულო ჯამები“ და მათი მნიშვნელობის მოსაძებნად, შეკრების გარდა ზღვარზე გადასვლის ოპერაციაც მოვიშველიეთ. სწორედ ამან „აურ-დაურია“ ყველაფერი. ამასთანავე, უნდა გითხრათ, რომ „უსასრულო ჯამებს“ მათემატიკაში მეტად საპატიო ადგილი უკავიათ. მხოლოდ მათ სპეციალური სახელი აქვთ — მწკრივი. ზემოთ დაწერილი (1) — (9) ტოლობების მარცხენა ნაწილები სწორედ მწკრივებია და არა ჯამები. მწკრივია აგრეთვე (10) გამოსახულებაც. დავაზუსტოთ მწკრივის ცნება.

ვთქვათ, (a_n) რაიმე უსასრულო მიმდევრობაა. შევადგინოთ მისი წევრებისაგან

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{16}$$

გამოსახულება. მას ეწოდება **მწკრივი**.

მწკრივს რომ გარკვეული მნიშვნელობა მივანიჭოთ, განვიხილოთ მისი **კერძო ჯამები**:

$$S_1=a_1,$$
$$S_2=a_1+a_2,$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ამრიგად, ყოველი მწკრივი „წარმოშობს“ კერძო ჯამთა (S_n) მიმდევრობას. თუ უკანასკნელი კრებადია და მისი ზღვარია S, მაშინ მწკრივსაც **კრებადი** ეწოდება, ხოლო S რიცხვს — მისი ჯამი. ამ შემთხვევაში წერენ:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=S.$$

თუკი კერძო ჯამთა (S_n) მიმდევრობა განშლადია (ესე იგი მას ზღვარი არა აქვს), მაშინ (16) მწკრივიც განშლადია და მას არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა არ მიეწერება.

საზოგადოდ, მწკრივისათვის გადანაცვლებადობის კანონი სამართლიანი არ არის. საზოგადოდ — მეთქი, რადგან არის შემთხვევები, როცა ეს კანონი, ასე ვთქვათ, კანონობს. მაგალითად, როგორც არ უნდა გადავაადგილოთ (1) — (9) ტოლობებში მწკრივის წევრები, მათი ჯამები არ შეიცვლება.

მწკრივთა თეორიაში მტკიცდება აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ (16) მწკრივის წევრთა გადანაცვლებით ჯამი მწკრივისა არ იცვლებოდეს. ამისათვის მწკრივი უნდა იყოს **აბსოლუტურად კრებადი,** ესე იგი, მასთან ერთად კრებადი უნდა იყოს

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (17)$$

მწკრივი.

ჩვენ მიერ განხილული (10) მწკრივი კრებადია, მაგრამ არააბსოლუტურად, ამიტომაც მისთვის გადანაცვლებადობის კანონი ძალაში არ არის.

დაბოლოს აღვნიშნავ, რომ გასული საუკუნის ერთ-ერთმა უდიდესმა მათემატიკოსმა ბერნჰარდ რიმანმა (1826 — 1866) დაამტკიცა შემდეგი მართლაცდა საოცარი თეორემა: როგორიც უნდა იყოს არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივი და A რიცხვი, შესაძლებელია მწკრივის წევრთა ისეთი გადანაცვლება, რომ ახლად მიღებული მწკრივის წევრთა ჯამი A-ს უდრიდეს.

როგორც თავისებურ კურიოზს მოვიყვან ასეთ ფაქტს: თუ (10) მწკრივის წევრებს ისე გადავანაცვლებთ, რომ ყოველ დადებით წევრს ოთხი უარყოფითი მოსდევდეს, მივიღებთ მწკრივს, რომლის ჯამი... ნულს უდრის.

მათემატიკა — ეს არის ის, რის მეშვეობითაც ადამიანი ბუნებასა და თავის თავს მართავს.

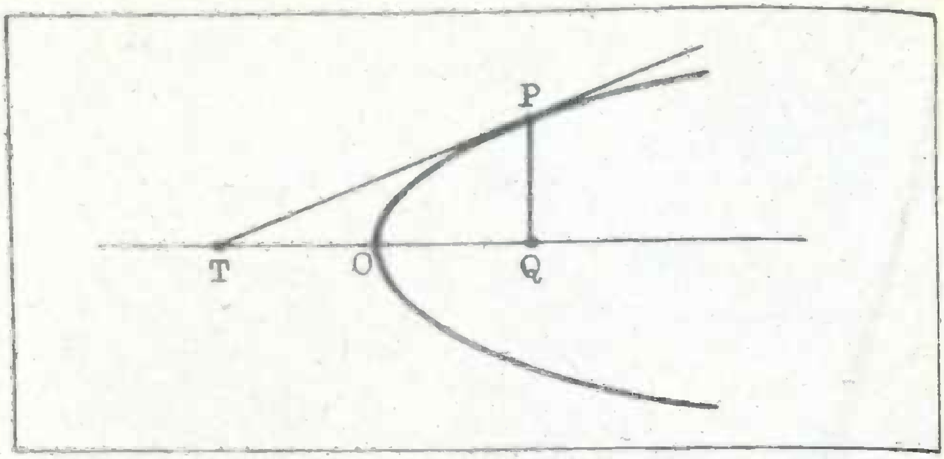
ანდრეი კოლმოგოროვი.

რენე დეკარტი

(1596 – 1650)

მხების გავლების ნორმალთა მეთოდი

მხების გავლების, უფრო ზუსტად — მისი აგების ამოცანა ჯერ კიდევ ძველ საბერძნეთში დაისვა. და უნდა ითქვას, იმ დროის მეცნიერები მას ხშირ შემთხვევაში წარმატებითაც წყვეტდნენ. კერძოდ, მათ იცოდნენ ფარგლითა და სახაზავით წრეწირის, ელიფსის, ჰიპერბოლის, პარაბოლის და ზოგიერთი სხვა წირის მხებების აგება. მაგრამ მათ არ ჰქონდათ ზოგადი მეთოდი, რომელიც ამის საშუალებას მისცემდა, რის გამო იძულებულნი იყვნენ მოცემული კერძო შემთხვევის შესაბამისად ემოქმედათ — ესარგებლათ საძიებელი მხების ამა თუ იმ თვისებით. მაგალითად, თუ წრეწირი იყო მოცემული, ემყარებოდნენ იმას, რომ მისი მხები რადიუსის მართობია, თუ პარაბოლა — იმას, რომ მისი მხების PT მონაკვეთის QT გეგმილი პარაბოლის ღერძზე პარაბოლის O წვეროთი შუაზე იყოფა (ნახ. 1) და სხვ.



ნახ. 1

ზოგადი მეთოდის არსებობის საკითხი წლების, თუმცა რატომ წლების — საუკუნეების მანძილზე ღიად რჩებოდა. და აი, XVII საუკუნის ოცდაათიანი წლებისათვის ერთდროულად ორი ასეთი მეთოდი შეიქმნა. ერთის ავტორი იყო დეკარტი, მეორისა — ფერმა. ქვემოთ გადმოცემულია დეკარტის მეთოდი. ფერმას მეთოდზე საუბარია ნარკვევში, რომელიც ექსტრემუმების მოძებნის ფერმას წესს ეძღვნება. ძნელია გადაჭარბებით შეაფასო ის როლი, რომელიც მეცნიერების, და კერძოდ მათემატიკის განვითარებისათვის ჰქონდა დეკარტის „გეომეტრიას“. ყველაფერს რომ თავი დავანებოთ, პირველად სწორედ ამ წიგნში გვხვდება ცვლადი სიდიდე, რომელიც მათემატიკაში, ენგელსის სიტყვებით, რომ ვთქვათ, შემობრუნების წერტილი იყო. სხვა მნიშვნელოვან საკითხებთან ერთად, ავტორს „გეომეტრიაში“ განხილული აქვს „ზოგადი მეთოდი იმ წრფეების პოვნისა, რომლებიც წირებს ანდა მათ მხებებს მართი კუთხით ჰკვეთენ“. ახლავე ვიტყვი, რომ წრფეს, რომელიც შეხების წერტილზე გადის და მხების მართობია, **ნორმალი** ჰქვია. ამრიგად, შეიძლება ვთქვათ, რომ დეკარტი თავის წიგნში ნორმალის პოვნის ზოგად მეთოდს გვაძლევს. ამიტომაც, „გეომეტრიის“ ერთ-ერთი პუნქტის საკმაოდ გრძელი სათაური, ზემოთ რომ მოვიყვანე, შეიძლება შევამოკლოთ და ვთქვათ: „ნორმალთა პოვნის ზოგადი მეთოდი“. ახლა ამ მეთოდს მოკლედ **ნორმალთა მეთოდს** უწოდებენ. ცხადია, რომ ნორმალთა მეთოდი ამავე დროს მხების გავლების ზოგადი მეთოდიც არის. მართლაც, თუკი ნორმალი ვიცით, მხების გავლებას რაღა უნდა?!

ნორმალის აგებისას დეკარტი სარგებლობს მის მიერვე დამუშავებული კოორდინატთა მეთოდით, რაც მას საშუალებას აძლევს გეო-

მეტრიული ამოცანა ალგებრული გზით — განტოლებათა მოშველიებით ამოხსნას. ამიტომაც ხშირად ამბობენ, რომ დეკარტის მეთოდი არის ნორმალთა ალგებრული მეთოდი. ბარემ აქვე ვიტყვი, რომ იგი თუმცა პირველად 1637 წელს გამოცემულ გეომეტრიაში გვხვდება, მათემატიკის ისტორიკოსები დაბეჯითებით ამბობენ, რომ დეკარტმა მას უფრო ადრე — 1629 წელს მიაგნო.

გავეცნოთ დეკარტის ძირითად იდეას.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე წირი და მასზე P წერტილი, რომელზეც მხებია გასავლები. ვეძებოთ წრეწირი, ცენტრით ერთ-ერთ საკოორდინატო ღერძზე ისეთი, რომ მას წირთან P წერტილში ერთმანეთთან შერწყმული ორი ან ორზე მეტი გადაკვეთის წერტილი ჰქონდეს. ცხადია, ეს წრეწირი წირს შეეხება და შეეხება სწორედ P წერტილში. ამიტომაც ამ უკანასკნელში მათ საერთო მხები ექნებათ. მაგრამ საძიებელი წრეწირის CP რადიუსი რომ მისი ნორმალის მონაკვეთია, ცხადია, — მაშასადამე ის არის წირის P წერტილზე გავლებული ნორმალის მონაკვეთიც, ხოლო მისი მართობი PT წრფე — წირის მხები P წერტილში (ნახ. 2.)

დეკარტი თავის წიგნში საილუსტრაციო მაგალითებსაც იხილავს. მათ შორის ელიფსის მხების შემთხვევასაც. განვიხილოთ ეს მაგალითი ჩვენც.

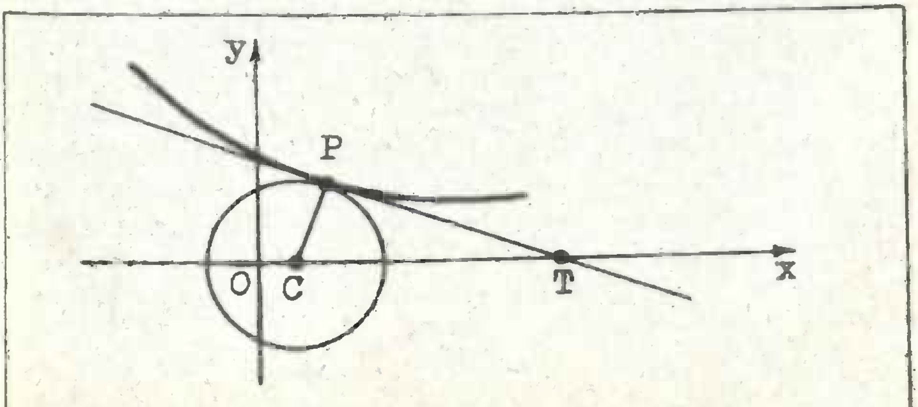
გავახსენებთ, რომ ელიფსი წრეწირის მისი დიამეტრისაკენ შეკუმშვით მიღებულ წირს ეწოდება. გამოვიყვანოთ მისი განტოლება.

ვთქვათ, მოცემულია

$$x^2+y^2=a^2$$

წრეწირი. მისი ყოველი $M=(x, y)$ წერტილის x კოორდინატი

ნახ. 2



უცვლელი დავტოვოთ, y კოორდინატი კი ky-ით შევცვალოთ, სადაც k, კუმშვის კოეფიციენტი, 1-ზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. ამ გარდაქმნის შედეგად წრეწირის $M=(x, y)$ წერტილი $M'=(x, ky)$ წერტილში გადავა — წრეწირი შეიკუმშება x ღერძზე მდებარე დიამეტრისაკენ. მივიღებთ ელიფსს, რომლის ყოველი $M'=(x', y')$ წერტილის კოორდინატები მოცემული წრეწირის სათანადო $M=(x, y)$ წერტილის კოორდინატებთან შემდეგი თანაფარდობებით არიან დაკავშირებული: $x'=x$, $y'=ky$.

თუკი წრეწირის განტოლებაში x-სა და y-ს მათი მნიშვნელობებით შევცვლით,

$$x'^2+\frac{y'^2}{k^2}=a^2$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{(ka)^2}=1$$

განტოლებას მივიღებთ. სწორედ ეს არის აღებული წრეწირის x ღერძისაკენ შეკუმშვით მიღებული ელიფსის განტოლება. თუ მასში $(ka)^2$-ს b^2-ით შევცვლით (რამდენადაც $0<k<1$, $b=ka<a$) და x'-ისა და y'-ის ნაცვლად კვლავ x-სა და y-ს დავწერთ, ელიფსის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

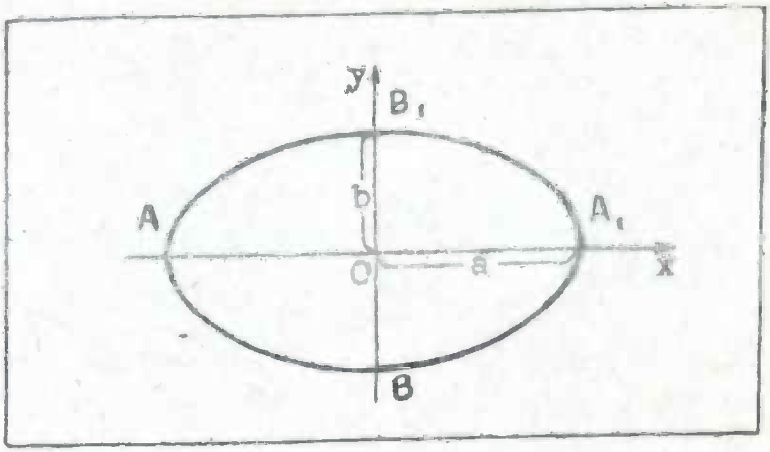
მას ელიფსის **კანონიკური** განტოლება ჰქვია.

შეიძლება ვთქვათ, რომ ელიფსს ოვალური ფორმა აქვს, მაგრამ მისი მოხაზულობა მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული კუმშვის k კოეფიციენტზე. სახელდობრ, რაც უფრო მცირეა k, მით უფრო „გაჭიმულია" ელიფსი და რაც უფრო ახლოს არის ეს რიცხვი 1-თან, მით უფრო „მომრგვალებული", წრეწირისაგან ნაკლებად განსხვავებულია. მე-3 ნახაზზე გამოსახულია ელიფსი, რომლისთვისაც $k=0{,}6$. აქვე აღვნიშნავ, რომ AA_1 და BB_1 მონაკვეთებს, რომელთა სიგრძეები შესაბამისად $2a$ და $2b$, ელიფსის დიდი და მცირე ღერძები ეწოდება.

ახლა, როცა დავადგინეთ, თუ რა სახე აქვს ელიფსის განტოლებას, დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას.

მაშ ასე, ვთქვათ, მოცემულია (1) ელიფსი და მასზე რაიმე $P=(x_0, y_0)$ წერტილი. საჭიროა P-ზე გავავლოთ ელიფსის მხებ-

ნახ. 3



ავიღოთ წრეწირი, რომლის რადიუსია r, ხოლო ცენტრი — $C=$ $=(c,0)$ წერტილი. მისი განტოლებაა:

$$(x-c)^2+y^2=r^2. \tag{2}$$

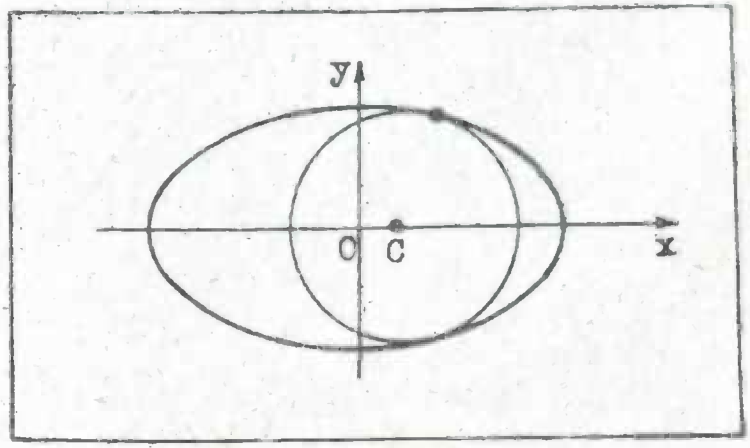
იგი ორ, ჯერ-ჯერობით უცნობ, c და r პარამეტრს შეიცავს. შევარჩიოთ ისინი ისე, რომ:

1^0. წრეწირი გადიოდეს P წერტილზე,

2^0. წრეწირსა და ელიფსს P-ში ერთმანეთთან შერწყმული გადაკვეთის ორი წერტილი ჰქონდეთ (ნახ. 4).

პირველი ამ მოთხოვნებიდან ნიშნავს, რომ P წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ წრეწირის (2) განტოლებას, ესე იგი

$$r^2=(x_0-c)^2+y_0^2.$$



ნახ. 4

თუ r^2-ის ამ მნიშვნელობას (2) განტოლებაში შევიტანთ, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0. \tag{3}$$

ამრიგად, ერთი — r პარამეტრი გამოვრიცხეთ. დარჩა განსასაზღვრავი c. ზემოთ მოყვანილი მეორე პირობის ძალით იგი ისე უნდა შეირჩეს, რომ (1) ელიფსსა და (3) წრეწირს P-ში გადაკვეთის ორი, ერთად შერწყმული გადაკვეთის წერტილი ჰქონდეთ, ეს კი, როგორც ადვილი მისახვედრია, იმის ტოლძალოვანია, რომ განტოლებათა

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \\ x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0 \end{cases} \tag{4}$$

სისტემას მხოლოდ ორი — (x_0, y_0) და $(x_0, -y_0)$ ამონახსენი ჰქონდეს (აქ მხედველობაშია მისაღები სიმეტრია x ღერძის მიმართ, რაც ძალიან კარგად ჩანს მე-4 ნახაზზე).

გამოვრიცხოთ (4) სისტემის განტოლებებიდან y^2. მივიღებთ x-ის მიმართ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას:

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2cx-a^2(x_0^2+y_0^2-2cx_0-b^2)=0.$$

რამდენადაც c ისე უნდა შეირჩეს, რომ (4) სისტემას ორად-ორი — (x_0, y_0), $(x_0, -y_0)$ ამონახსენი ჰქონდეს, უკანასკნელ განტოლებას ერთი ამონახსენი აქვს, ესე იგი, მისი დისკრიმინანტი ნულია. ეს გვაძლევს:

$$a^4c^2+a^2(a^2-b^2)(x_0^2+y_0^2-2cx_0-b^2)=0. \tag{5}$$

სწორედ ამ განტოლებიდან უნდა განვსაზღვროთ c. რა თქმა უნდა, ეს სულაც არ არის ძნელი, მაგრამ საქმეს კიდევ უფრო გავიადვილებთ, თუკი განტოლების მარცხენა ნაწილს წინასწარ გავამარტივებთ.

გავიხსენოთ, რომ (x_0, y_0) წერტილი მოცემულ ელიფსზე მდებარეობს და, მაშასადამე,

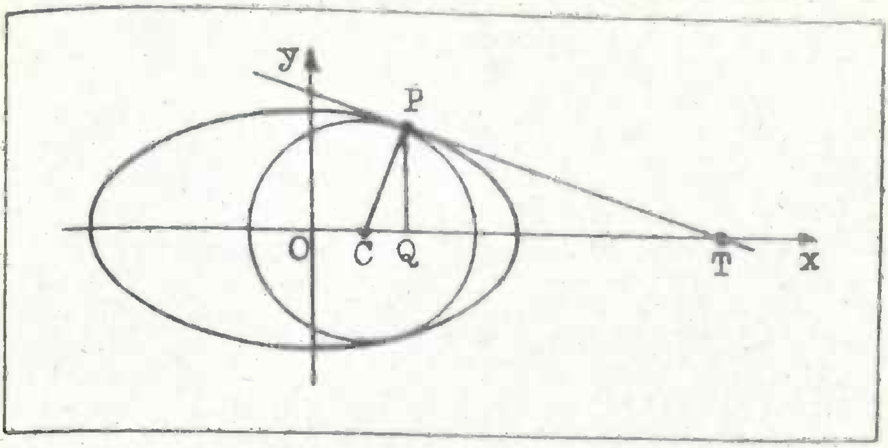
$$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2 \tag{6}$$

ტოლობა იგივეობაა. განვსაზღვროთ ამ იგივეობიდან y_0^2 და მისი მნიშვნელობა (5) განტოლების მარცხენა ნაწილში შევიტანოთ. მარტივი გარდაქმნის შემდეგ ეს განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$a^4c^2-2a^2(a^2-b^2)x_0c+(a^2-b^2)^2x_0^2=0.$$

ძნელი შესამჩნევი არ არის, რომ განტოლების მარცხენა ნაწილი $a^2c-(a^2-b^2)x_0$ ორწევრის სრული კვადრატია. მაშასადამე, c-სათვის გვაქვს:

$$c=\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}.$$



ნახ. 5

ამრიგად, ვიპოვეთ ცენტრი წრეწირისა, რომელიც ელიფსს P წერტილში ეხება. ცხადია, რომ მისი CP რადიუსი არის ერთდროულად წრეწირისა და ელიფსის ნორმალის მონაკვეთი, საძიებელი PT მხები კი — ამ რადიუსის P წერტილზე მისადმი მართობულად გავლებული წრფე (ნახ. 5).

ამოცანა ამოხსნილია...

სხვათა შორის, შეიძლება სხვანაირადაც მოვიქცეთ. მართლაც, ვთქვათ, $0 < x_0 < a$, მაშინ, როგორც ეს იმავე მე-5 ნახაზიდან ჩანს, მივიღებთ CPT მართკუთხა სამკუთხედს, საიდანაც:

$$|PQ|^2 = |CQ| \cdot |QT|.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$|PQ| = y_0, \ |CQ| = |OQ| - |OC| = x_0 - \frac{(a^2 - b^2)x_0}{a^2} = \frac{b^2 x_0}{a^2},$$

$|QT|$-სათვის გვაქვს:

$$|QT| = \frac{a^2 y_0^2}{b^2 x_0}.$$

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ $|OT| = |OQ| + |QT|$ და აგრეთვე (6) ტოლობას, OT მონაკვეთის სიგრძესაც ვიპოვით:

$$|OT| = \frac{a^2}{x_0}.$$

ამრიგად, ვიპოვეთ მხების აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის $T = (a^2/x_0, 0)$ წერტილი. (ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $0 < x_0 < a$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ მიღებული შედეგი მაშინაც არის სამართლიანი, როცა $-a < x_0 < 0$. შეამოწმეთ!) ვინაიდან ვიცით მხების ორი — P და T წერტილი, მხებსაც ადვილად გავავლებთ.

ზემოჩატარებულ მსჯელობაში არსებითად არის გამოყენებული კოორდინატთა მეთოდი, ამიტომაც ბუნებრივია ელიფსის მხების განტოლების დაწერაც ვცადოთ.

ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, ვიპოვოთ მისი კუთხური კოეფიციენტი. ეს სულ ადვილი გასაკეთებელია, რადგან ვიცით მასზე მდებარე ორი — P და T წერტილის კოორდინატები.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_0-0}{x_0-\frac{a^2}{x_0}}=\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0},$$

რადგან (6) იგივეობიდან:

$$x_0^2-a^2=-\frac{a^2y_0^2}{b^2}.$$

მხების განტოლებას შემდეგი სახე უნდა ექნეს:

$$y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x+p, \tag{7}$$

სადაც p ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ეს წრფე T (ან P) წერტილზე გადიოდეს. x-ისა და y-ის ნაცვლად უკანასკნელ განტოლებაში T-ს კოორდინატების ჩასმა გვაძლევს:

$$p=\frac{b^2}{a^2}.$$

შევიტანთ რა p-ს ამ მნიშვნელობას (7) განტოლებაში, სათანადო გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.} \tag{8}$$

შესანიშნავი შედეგია! მიღებული განტოლება გარკვეული აზრით ენათესავება ელიფსის განტოლებას — საკმარისია უკანასკნელში x^2 და y^2 შესაბამისად x_0x-ითა და y_0y-ით შევცვალოთ, რომ (8) მივიღოთ. შევნიშნავ ბარემ, რომ (8) იმ პირობით იყო მიღებული, რომ $0<|x_0|<a$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა $x_0=0$ ან $|x_0|=a$, (8) განტოლება ელიფსის მხებს გამოსახავს. შეამოწმეთ!

დაბოლოს, გთავაზობთ დავალებას: ისარგებლეთ ნორმალთა მეთოდით და გამოიყვანეთ $y^2=2px$ პარაბოლის მხების განტოლება. შეამოწმეთ ის თვისება, რაზედაც ზემოთ იყო საუბარი (იხ. ნახ. 1).

ექსტრემუმის მოძებნის ფერმას წესი

არის მათემატიკური ამოცანები, რომელთაც თამამად შეიძლება კლასიკური ვუწოდოთ. ასეთებია, მაგალითად, წრის კვადრატურის ამოცანა, წრეწირის ტოლ ნაწილებად გაყოფის ამოცანა, ფერმას დიდი თეორემა და მრავალი სხვა.

დასახელებული ამოცანებიდან პირველი — წრის კვადრატურა — ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში დაისვა: ფარგლითა და სახაზავით აიგოს მოცემული წრის ტოლდიდი კვადრატი. მათემატიკოსთა მრავალი თაობა ცდილობდა ასეთი კვადრატის აგებას, მაგრამ ამაოდ... მხოლოდ XIX საუკუნეში გაირკვა, რომ ეს ასეც უნდა ყოფილიყო — დამტკიცდა ამ აგების შეუძლებლობა.

საუკუნეები დასჭირდა აგრეთვე მეორე ამოცანაზე საბოლოო პასუხის გაცემას. ეს ამოცანა მოითხოვს, კვლავ ფარგლითა და სახაზავით წრეწირის ტოლ ნაწილებად გაყოფას, რაც წესიერი მრავალკუთხედის აგების ტოლძალოვანია. ძველმა ბერძნებმა იცოდნენ წესიერი სამკუთხედის, ოთხკუთხედის, ხუთკუთხედის, თხუთმეტკუთხედის აგება. მათ ისიც იცოდნენ, რომ თუ წესიერი n-კუთხედი აგებულია, მაშინ წესიერი $2n$-კუთხედის აგება ძნელი აღარ არის. მაგრამ საკითხი ბოლომდე გარკვეული მაინც არ იყო. სახელდობრ, არ იყო ცნობილი იმ n რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვისაც შეიძლება წესიერი n-კუთხედის აგება. ამ კითხვას ამომწურავი პასუხი გასცა გენიალურმა გაუსმა, რომელმაც დაადგინა, თუ რა არითმეტიკული ბუნებისა უნდა იყოს n რიცხვი, რომ სათანადო წესიერი მრავალკუთხედის აგება შეიძლებოდეს. გაუსის შედეგი თითქოსდა მოულოდნელია: წმინდა გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნადობა რიცხვის

არითმეტიკულ ბუნებაზე ყოფილა დამოკიდებული! მაგრამ არავითარი მოულოდნელობა აქ არ არის! რატომ? იმიტომ, რომ მათემატიკა ერთიანი მეცნიერებაა და მისი დაყოფა სხვადასხვა ნაწილებად, თუნდაც არითმეტიკად და გეომეტრიად, მხოლოდ პირობითია.

მესამე ამოცანა — ფერმას დიდი თეორემა ასე ყალიბდება: დამტკიცდეს, რომ არ არსებობს სამი მთელი დადებითი რიცხვი, რომელთაგან პირველი ორის 2-ზე მეტი ნატურალური ხარისხი მესამის იმავე ხარისხის ტოლია. აქ წინა ამოცანებისაგან განსხვავებით სულ სხვა ვითარება გვაქვს: მიუხედავად მრავალი ცდისა, ფერმას დიდი თეორემა დღემდე ვერც ვერავინ დაამტკიცა და ვერც ვერავინ უარყო...

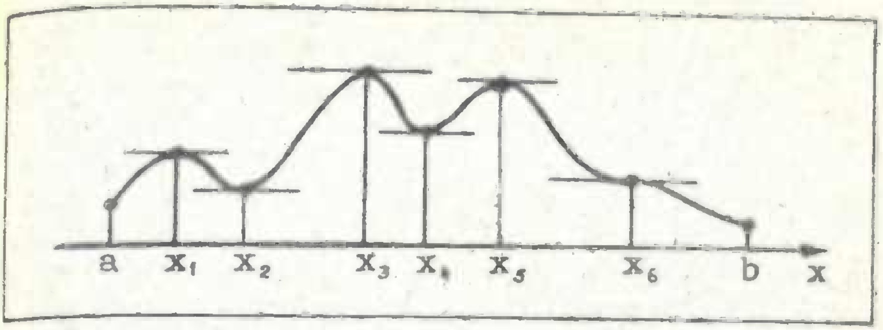
კლასიკური ამოცანა უპირველესად იმით არის შესანიშნავი, რომ მისი კვლევისას ახალ-ახალი იდეები იბადება, ახალი მეთოდები მუშავდება. ეს კი, მათემატიკის წინსვლისა და განვითარების საწინდარია...

სრულიად განსაკუთრებული როლი შეასრულა მათემატიკის ისტორიაში ორმა კლასიკურმა ამოცანამ — ფუნქციის ექსტრემუმების მოძებნისა და წირის მხების გავლების ამოცანებმა. საქმე ის არის, რომ სწორედ ამ ამოცანებთან არის დაკავშირებული მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილის — დიფერენციალური აღრიცხვის აღმოჩენა. აი, ამ ამოცანებს ეძღვნება წინამდებარე ნარკვევი, — მასში საუბარია ფერმას მიერ ჩამოყალიბებულ ერთ წესზე, რომლის მეშვეობით შეიძლება როგორც ექსტრემუმების მოძებნა, ისე მხების გავლება.

ზოგი რამ ექსტრემუმის თეორიიდან. ტერმინოლოგიის დაზუსტება

ფუნქციის გამოკვლევისას არსებით როლს ასრულებენ მისი განსაზღვრის არეში მდებარე ის წერტილები, სადაც წარმოებული ნულის ტოლია. მათ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს უწოდებენ. (თუ საიდან წარმოდგება ეს სახელწოდება, ამაზე ქვემოთ.) თუ x_0 არის f ფუნქციის სტაციონარული წერტილი, მაშინ f-ის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია. მაგალითად, 1-ელ ნახაზზე გამოსახულია რაღაც ფუნქციის გრაფიკი. ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილებია: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 და x_6.

რითია შესანიშნავი სტაციონარული წერტილები? იმით, რომ წარმოებად ფუნქციას **ლოკალური მაქსიმუმი** და აგრეთვე **ლოკალური**



ნახ. 1

მინიმუმი მხოლოდ და მხოლოდ ასეთ წერტილებში შეიძლება ექნეს. დავაზუსტოთ ზარემ ეს ორი ტერმინი.

ვიტყვით, რომ f ფუნქციას მისი განსაზღვრის შიგა x_0 წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, თუ x_0-ისაგან განსხვავებულ და მასთან საკმაოდ ახლოს მდებარე ყველა x-ისათვის

$f(x_0) > f(x)$.

მსგავსადვე განისაზღვრება ლოკალური მინიმუმი, ოღონდ უკანასკნელი უტოლობის ნაცვლად უნდა ავიღოთ:

$f(x_0) < f(x)$.

ამრიგად, x_0 წერტილში ფუნქციას მაქსიმუმი (მინიმუმი) აქვს, თუ მასში ფუნქციის მნიშვნელობა მეტია (ნაკლებია) ვიდრე მასთან ახლოს მდებარე ნებისმიერ სხვა წერტილში.

კარგად უნდა გვახსოვდეს, რომ საუბარია ფუნქციის არა უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობაზე, არამედ მის მხოლოდ ლოკალურ, ესე იგი, ადგილობრივ მაქსიმუმსა და მინიმუმზე ანუ ლოკალურ ექსტრემუმზე (ექსტრემუმი — ლათ. *exstremum* — ნიშნავს განაპირას და მათემატიკაში მაქსიმუმისა და მინიმუმის გამაერთიანებელ ტერმინად გამოიყენება). ეს ექსტრემუმი ლოკალურია, რამდენადაც ზემოთ დაწერილ უტოლობებში მხოლოდ x_0-თან ახლოს მდებარე x წერტილები განიხილება. ეს გარკვეულ თავისებურებათა მიზეზიც კი შეიძლება გახდეს. სახელდობრ, ფუნქციას შესაძლოა ერთზე მეტი მაქსიმუმი ან მინიმუმი ჰქონდეს, ანდა რომელიმე მინიმუმი მაქსიმუმზე მეტი (!) იყოს. მაგალითად, ზემოთ განხილულ ფუნქციას (ნახ. 1) სამი მაქსიმუმი აქვს — x_1, x_3 და x_5 წერტილებში, ორი მინიმუმი — x_2 და x_4 წერტილებში, ამასთანავე, x_4 წერტილში მიღწეული მინიმუმი x_1 წერტილში მიღწეულ მაქსიმუმზე მეტია.

ამრიგად, სტაციონარული ის წერტილია, სადაც ფუნქციის წარმოებული ნულია. მეორეს მხრივ, წარმოებული ხომ სიჩქარეა და უკა-

ნასკნელის ნულთან ტოლობა იმაზე მიუთითებს, რომ გრაფიკის გასწვრივ მოძრავი წერტილი სათანადო მომენტში თითქოს წამით შეჩერდა. ჰოდა, რამდენადაც უძრავი, მდგარი ლათინურად არის *stationarius*, ამიტომაც ვუწოდებთ ამ წერტილს — სტაციონარულს... აქვე ვიტყვი, რომ არაა აუცილებელი, ფუნქციას ექსტრემუმი ყველა სტაციონარულ წერტილში ჰქონდეს. მაგალითი: x_6 წერტილი 1-ელ ნახაზზე.

ფერმას წესი

ზედმეტია ლაპარაკი იმაზე, თუ რა მნიშვნელოვანია ხოლმე ამა თუ იმ ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნა. უმარტივესი ამოცანები ხშირად ელემენტარული ხერხებით გადაწყდება. მაგალითად, კვადრატული ფუნქციის ექსტრემუმს სულ ადვილად ვიპოვით სრული კვადრატის გამოყოფით. მაგრამ, საზოგადოდ, ეს ასე არ არის... დიდხანს არ არსებობდა ერთიანი მეთოდი, რომელიც ექსტრემუმების მოძებნის ამოცანის ამოხსნის საშუალებას მოგვცემდა. და აი, 1629 წელს, — ყოველ შემთხვევაში არა უგვიანეს ამ დროისა, ფერმამ ჩამოაყალიბა წესი, რომლის მეშვეობით შეიძლება ფუნქციათა საკმაოდ ფართო კლასის ექსტრემუმების მოძებნა. გავეცნოთ ამ წესს.

თანამედროვე აღნიშვნებში, თითქმის ყოველგვარი ცვლილების გარეშე, იგი ასე გამოითქმის: **ვთქვათ, გვინდა x ცვლადზე დამოკიდებული რაღაც f ფუნქციის მაქსიმუმის ან მინიმუმის პოვნა. ამისათვის დავწეროთ $f(x+h)\approx f(x)$ მიახლოებითი ტოლობა, სადაც h საკმაოდ მცირეა. გავამარტივოთ ეს ტოლობა — გავათავისუფლოთ რადიკალებისაგან (თუ ასეთები არის) და შევკრიბოთ მსგავსი წევრები, რის შემდეგ გავყოთ იგი h-ზე ან h-ის უმაღლეს შესაძლებელ ხარისხზე, შემდგომ, უკუვაგდოთ წევრები, რომლებიც ჯერ კიდევ შეიცავენ h-ს და მიახლოებითი ტოლობა ზუსტი ტოლობით შევცვალოთ. მივიღებთ განტოლებას, რომლის ამონახსნებია x-ის ის მნიშვნელობანი, რომელთათვისაც f-ს შესაძლოა ექსტრემუმი ჰქონდეს.**

ამ წესს, ფერმამ, როგორც აღვნიშნე, დაახლოებით 1629 წელს მიაგნო, თუმცა ფართო საზოგადოებრიობისათვის იგი მოგვიანებით — დეკარტის „გეომეტრიის" გამოსვლის შემდეგ გახდა ცნობილი. საქმე ის არის, რომ „გეომეტრიის" გაცნობისთანავე ფერმამ მის ავტორს გაუგზავნა ხელნაწერი თხზულება: „მაქსიმუმებისა და მინიმუმების მოძებნის მეთოდი", სადაც ჩამოყალიბებულია ზემოთ მოყ-

ვანილი წესი და ამოხსნილია ორი ამოცანა. თავად წესის დასაბუთება ფერმას ამ თხზულებაში არ მოჰყავს.

შესავალში აღნიშნული იყო, რომ ფერმას წესის მეშვეობით შეიძლება ექსტრემუმების მოძებნაც და მხების გავლებაც. განვიხილოთ სათანადო მაგალითები.

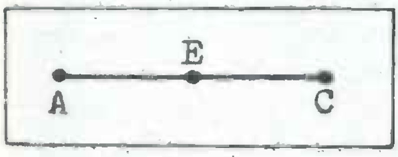
ექსტრემუმების მოძებნა

მის მიერ აღმოჩენილ წესს რომ ადრესატს აცნობს, ფერმა წერს: „მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი: საჭიროა AC მონაკვეთი ისე გაიყოს E წერტილით, რომ AEC მართკუთხედი უდიდესი იყოს".

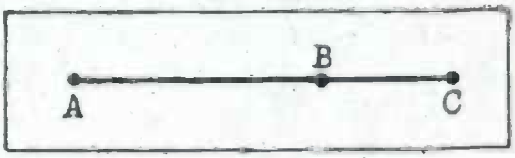
ადვილი მისახვედრია, რომ ფერმას უნდა AC მონაკვეთზე ისეთი E წერტილი იპოვოს, რომ მართკუთხედს, რომლის გვერდებია AE და EC უდიდესი შესაძლებელი ფართობი ექნეს. ვნახოთ, როგორ ხსნის ფერმა ამ ამოცანას — მივყვეთ მის მსჯელობას (ქვემოთ მხოლოდ აღნიშვნებია „გათანამედროვებული", ავტორისეული მსჯელობა უცვლელია).

ვთქვათ, AC მონაკვეთის სიგრძეა a, AE მონაკვეთისა კი x (ნახ. 2). მაშინ, ცხადია, EC მონაკვეთის სიგრძე $a-x$ იქნება, ხოლო AE-სა და EC-ზე აგებული მართკუთხედის ფართობი $x(a-x)$. აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი $S(x)$-ით:

$$S(x)=x(a-x).$$



ნახ. 2



ნახ. 3

ახლა, ვთქვათ, AE მონაკვეთის სიგრძეა $x+h$. მაშინ $|EC|=a-x-h$ და, მაშასადამე,

$$S(x+h)=ax-x^2+ah-2xh-h^2.$$

თუკი $S(x+h)\approx S(x)$ ტოლობას გავამარტივებთ, გვექნება:

$$ah-2xh-h^2\approx 0.$$

გავყოთ ეს ტოლობა h-ზე:

$$a-2x-h\approx 0.$$

ამ მიახლოებით ტოლობაში უკუვაგდოთ h-ის შემცველი წევრი და მიახლოებითი ტოლობა ზუსტი ტოლობით შევცვალოთ:

$a-2\,x=0.$

ეს სწორედ ის განტოლებაა, რომლის მიღებაც გვსურდა, აქედან $x=0{,}5\,a$, ესე იგი, E მოცემული მონაკვეთის შუაწერტილი უნდა იყოს, რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი მართკუთხედი კვადრატია.

ის, რომ მოცემულპერიმეტრიან მართკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობი კვადრატსა აქვს, ფერმას არ აღმოუჩენია — ამ ფაქტს გაცილებით ადრე იცნობდნენ, მაგრამ ამ ამოცანის ამოხსნით ფერმა თითქოსდა გვეუბნება: „ხომ ხედავთ, ჩემს მეთოდს სწორ შედეგამდე მივყავართ"...

განვიხილოთ ფერმას მიერ ამოხსნილი კიდევ ერთი ამოცანა. აი, როგორ აყალიბებს მას ფერმა: მოცემული AC მონაკვეთი გავკვეთოთ B წერტილით ისე, რომ AB-ს კვადრატზე და BC ხაზზე აგებული სხეულის მოცულობა უდიდესი იყოს.

საძიებელია უდიდესი მოცულობის კვადრატულფუძიანი მართი პარალელეპიპედი, რომლის ფუძის გვერდია AB, ხოლო სიმაღლე — BC. ცხადია, რომ, თუ AC მონაკვეთის სიგრძეს a-თი აღვნიშნავთ, AB-სას კი x-ით, მაშინ პარალელეპიპედის V მოცულობისთვის მივიღებთ:

$$V(x)=x^2(a-x).$$

აი ფუნქცია, რომლის უდიდეს მნიშვნელობასაც ვეძებთ. ვიმოქმედოთ „ფერმას მიხედვით" — ვიპოვოთ $V(x+h)$, დავწეროთ $V(x+h)-V(x)\approx 0$ ტოლობა და გავამარტივოთ იგი. მივიღებთ:

$$(2\,ax-3\,x^2)h+(a-3\,x-h)h^2\approx 0.$$

შევკვეცოთ ეს ტოლობა h-ზე, უკუვაგდოთ ის წევრები, რომლებიც ამის შემდეგ კიდევ შეიცავენ h-ს და მიახლოებითი ტოლობა ზუსტი ტოლობით შევცვალოთ:

$$2\,ax-3\,x^2=0.$$

ამ განტოლებიდან $x=0$ ან $x=2a:3$.

პირველი მნიშვნელობა x-ისა არ ვარგა — თუ $x=0$, პარალელეპიპედის მოცულობაც ნულის ტოლია, რაც შეეხება მეორეს, იგი გამოგვადგება.

ამრიგად, საძიებელი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდი სიმაღლეზე ორჯერ მეტი უნდა იყოს.

კი, მაგრამ, — იტყვით თქვენ, — რა ვიცით, რომ სწორედ ამ პარალელეპიპედს აქვს უდიდესი მოცულობა? განა ამას დასაბუთება არ უნდა?

რა მეთქმის, — სწორი შენიშვნაა! მართლაც საჭიროა მიღებული პასუხის შემოწმება. ამის გაკეთება ძნელი არ არის.

მაშ ასე, ვთქვათ, x-ის რაღაც x_0 მნიშვნელობა V-ს უდიდეს მნიშ-

ვნელობას ანიჭებს, მაშინ ნებისმიერი, რაგინდ მცირე დადებითი h რიცხვისათვის $V(x_0)$ მეტი უნდა იყოს როგორც $V(x_0+h)$-ზე, ისე $V(x_0-h)$-ზე, ესე იგი უნდა გვქონდეს:

$$\begin{cases} V(x_0+h)-V(x_0)<0 \\ V(x_0-h)-V(x_0)<0. \end{cases}$$

თუ V-ს სათანადო მნიშვნელობებს შევიტანთ, თანაც იმას გავითვალისწინებთ, რომ h დადებითია, რაც უტოლობების მასზე გაყოფის უფლებას გვაძლევს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 2\,ax_0-3\,x_0^2+(a-3\,x_0-h)h<0 \\ -(2\,ax_0-3\,x_0^2)+(a-3\,x_0+h)h<0. \end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ x_0 აუცილებლად უნდა იყოს $2\,ax-3\,x^2=0$ განტოლების ფესვი.

მართლაც, ვთქვათ, $2\,ax_0-3\,x_0^2\neq 0$. ვიგულისხმოთ ჯერ, რომ $2\,ax_0-3\,x_0^2>0$. შევარჩიოთ h ისე, რომ იყოს:

$$|(a-3\,x_0-h)h|<2\,ax_0-3\,x_0^2.$$

რამდენადაც h რაგინდ მცირეა, ამას ყოველთვის მივაღწევთ. თუ h ასეა შერჩეული, ცხადია, რომ

$$2\,ax_0-3\,x_0^2+(a-3\,x_0-h)h$$

ჯამს იგივე ნიშანი აქვს, რაც $(2\,ax_0-3\,x_0^2)$-ს, ესე იგი,

$$2\,ax_0-3\,x_0^2+(a-3\,x_0-h)h>0,$$

რაც ზემოთ დაწერილი სისტემის პირველ უტოლობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, $2\,ax_0-3\,x_0^2$ არ შეიძლება დადებითი იყოს.

ახლა ვთქვათ, $2\,ax_0-3\,x_0^2<0$ და h იმდენად მცირეა, რომ იყოს:

$$|(a-3\,x_0+h)h|<3x_0^2-2\,ax_0.$$

ცხადია, h-ის ნებისმიერობის გამო, ამასაც მივაღწევთ. მაგრამ მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია,

$$3\,x_0^2-2\,ax_0+(a-3\,x_0+h)h>0$$

და ეს სისტემის მეორე უტოლობას ეწინააღმდეგება. გამოდის, რომ $2\,ax_0-3\,x_0^2$ არც უარყოფითი შეიძლება იყოს.

ამრიგად, $2\,ax_0-3\,x_0^2=0$. მაგრამ მაშინ $x_0=0$ ან $x_0=2a:3$. რაც იმას ნიშნავს, რომ ამოცანა სწორად არის ამოხსნილი.

ზემოთ ვთქვი, რომ დეკარტისადმი მიწერილ წერილში ფერმას თავისი წესი არ დაუსაბუთებია. რამდენიმე წლის შემდეგ მან ეს დასაბუთებაც გააცნო მეცნიერებს. აი, მისი ძირითადი იდეა: თუ h საკმაოდ მცირე დადებითი რიცხვია და $f(x+h)-f(x)$, $f(x-h)-f(x)$ სხვაობები h-ის ზრდად ხარისხებადაა განლაგებული, მაშინ ექსტრემუმის წერტილში h-ის კოეფიციენტი ნულს უდრის. თუ დაკვირ-

ვებით წაიკითხავთ იმ მსჯელობას, რომელიც ჩვენ ზემოთ V-სათუ-
ჩავატარეთ, დარწმუნდებით, რომ ამჯერადაც „ფერმას მიხედვით"
ვიმოქმედეთ.

მხების გავლება

ახლა ვნახოთ, როგორ შეიძლება ფერმას წესის მეშვეობით მხების
გავლება. ჯერ ზოგად იდეას გავეცნოთ, შემდეგ კი განვიხილოთ
ფერმას მიერვე ამოხსნილი ამოცანა პარაბოლისადმი მხების გავლე-
ბის შესახებ. თავიდანვე ვიტყვი, რომ ორივე შემთხვევაში ჩვენთვის
ჩვეული აღნიშვნებით ვისარგებლებ.

ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ წირი და მის $P=(x_0, y_0)$ წერტილში
უნდა გავავლოთ მხები. წარმოვიდგინოთ, რომ მხები — PT წრფე უკ-
ვე გავლებულია. ავიღოთ წირზე მეორე — P-სთან ახლოს მდებარე
$Q=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ წერტილი, რომლის ორდინატაა BQ მო-
ნაკვეთი (ნახ. 4). ამ ორდინატის მხებთან გადაკვეთის წერტილი იყოს
C. რამდენადაც TAP და TBC სამკუთხედები მსგავსია,

$$\frac{|TB|}{|TA|}=\frac{|BC|}{|AP|}.$$

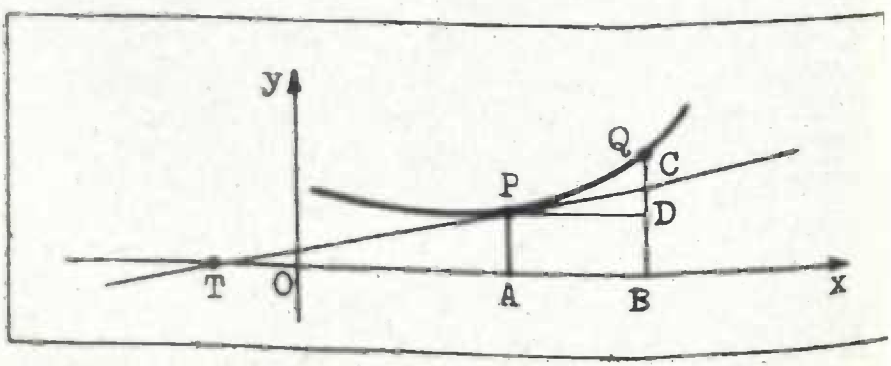
ამ ტოლობაში BC მონაკვეთი BQ-თი შევცვალოთ („გავუთანაბ-
როთ", — როგორც ამბობს ფერმა). მივიღებთ

$$\frac{|TB|}{|TA|}\approx\frac{|BQ|}{|AP|}$$

ან, რაც იგივეა

$$\frac{|TA|+|AB|}{|TA|}\approx\frac{|BD|+|DQ|}{|AP|}$$

ნახ. 4



მიახლოებით ტოლობას, მაგრამ $|BD| = |AP|$ და, მაშასადამე,

$$\frac{|AB|}{|TA|} \approx \frac{|DQ|}{|AP|}.$$

ჩვენი შეთანხმების თანახმად,

$$|AB| = \triangle x, \ |AP| = y_0, \ |DQ| = \triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0),$$

ამიტომაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\triangle x}{|TA|} \approx \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{y_0}.$$

აქედან

$$|TA| \approx y_0 : \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

ახლა ისღა დაგვრჩენია ფერმას წესით ვისარგებლოთ: სახელდობრ,

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

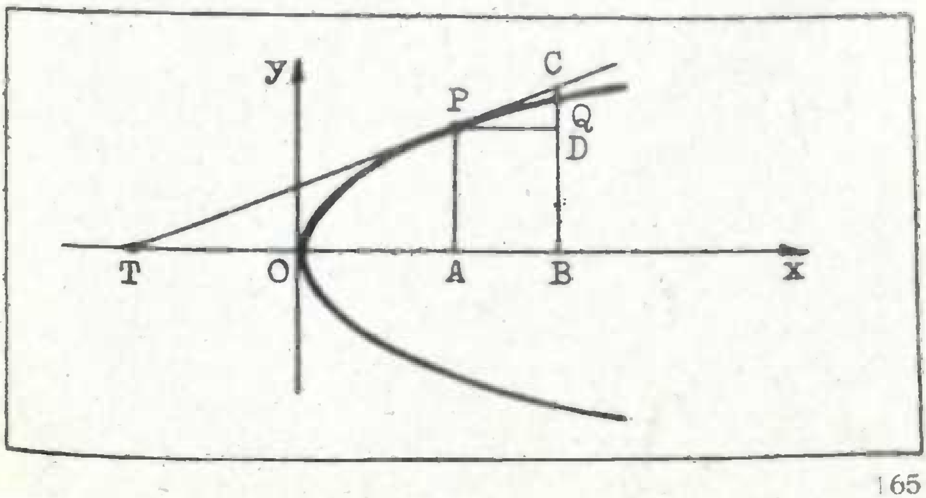
გამოსახულება გარდავქმნათ — შევასრულოთ გაყოფა, უკუვაგდოთ ამის შემდეგ დარჩენილი ის წევრები, რომლებიც კიდევ შეიცავენ $\triangle x$-ს და ზემოთ დაწერილი მიახლოებითი ტოლობა ზუსტი ტოლობით შევცვალოთ. ვიპოვით $|TA|$-ს, რის შემდეგ მხების გავლება სულ ადვილია.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი: გავავლოთ $y^2 = 2px$ პარაბოლის $P = (x_0, y_0)$ წერტილზე მხები (ნახ. 5).

ავიღოთ პარაბოლაზე P-სთან ახლოს მდებარე რაიმე $Q = (x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ წერტილი. გვაქვს:

$$|OA| = x_0, \ |AP| = y_0, \ |OB| = x_0 + \triangle x, \ |BQ| = y_0 + \triangle y.$$

ნახ. 5



თუ BQ ორდინატის გაგრძელების გადაკვეთის წერტილს PT მხებთან C-თი აღვნიშნავთ, მაშინ TBC და TAP სამკუთხედების მსგავსების გამო,

$$\frac{|TB|}{|TA|}=\frac{|BC|}{|AP|}.$$

ამ პროპორციაში BC მონაკვეთი BQ-ს „გავუთანაბროთ", მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას:

$$\frac{|TB|}{|TA|}\approx\frac{|BQ|}{|AP|}.$$

ისევე, როგორც ზოგად შემთხვევაში, ელემენტარული გარდაქმნის შედეგად გვექნება:

$$|TA|\approx y_0:\frac{\triangle y}{\triangle x},$$

სადაც, როგორც ეს ადვილი მისახვედრია,

$$\triangle y=\sqrt{2p(x_0+\triangle x)}-\sqrt{2px_0}=\frac{2p\triangle x}{\sqrt{2p(x_0+\triangle x)}+\sqrt{2px_0}}.$$

ვინაიდან $y_0=\sqrt{2px_0}$ (იგულისხმება, რომ $y_0>0$), ამიტომ მხების TA მონაკვეთისათვის გვაქვს:

$$|TA|\approx\frac{\left(\sqrt{2p(x_0+\triangle x)}+\sqrt{2px_0}\right)\sqrt{2px_0}}{2p}.$$

უკუვაგდოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში $\triangle x$-ის შემცველი წევრი და მიახლოებითი ტოლობა ზუსტით შევცვალოთ. მივიღებთ:

$$|TA|=\frac{2\sqrt{2px_0}\cdot\sqrt{2px_0}}{2p}=2x_0.$$

ამრიგად, ვიპოვეთ მხების TP მონაკვეთის TA გეგმილი x ღერძზე, ესე იგი, T წერტილიც. ახლა საკმარისია P-ზე და T-ზე გავავლოთ წრფე. სწორედ ეს წრფეა საძიებელი მხები.

ვინაიდან $|OA|=x_0$, ხოლო $|TA|=2x_0$, ცხადია, რომ $|TO|=x_0$. საგულისხმო შედეგია: პარაბოლის ნებისმიერ P წერტილზე გავლებული მხების TP მონაკვეთის TA გეგმილი პარაბოლის წვეროთი შუაზე იყოფა. პარაბოლის მხების ეს შესანიშნავი თვისება ცნობილი იყო ძველი ბერძნებისთვის, რომლებიც სწორედ მასზე დაყრდნობით აგებდნენ პარაბოლის მხებს. სხვათა შორის, იგივე თვისება ძალიან ამარტივებს პარაბოლის მხების განტოლების დაწერასაც, იმედი მაქვს, თქვენ თვითონ მოახერხებთ ამას.

ფერმას წესი და... წარმოებული

გავიხსენოთ ფერმას წესის შინაარსი. იმისათვის, რომ x-ზე დამოკიდებული f ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ვიპოვოთ, საჭიროა:

1. დავწეროთ $f(x+h)\approx f(x)$ მიახლოებითი ტოლობა,

2. გავამარტივოთ იგი, ყველა წევრი მარცხნივ გადავიტანოთ და ტოლობის ორივე ნაწილი h-ზე გავყოთ:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx 0,$$

3. უკუვაგდოთ მარცხენა ნაწილში წევრები, რომლებიც ამის შემდეგ ჯერ კიდევ შეიცავენ h-ს, ესე იგი, h ნულის ტოლად მივიღოთ და მიახლოებითი ტოლობა ზუსტი ტოლობით შევცვალოთ:

$$\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=0}=0.$$

უკანასკნელი საფეხური ზღვრის სიმბოლოს მოშველიებით შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

როგორც ხედავთ, ფერმას თავისი წესით წარმოებული შემოუღია! დიახ, ეს ასეა. ამიტომაც ლაგრანჟს, ლაპლასს და ფურიეს სრული საფუძველი ჰქონდათ ემტკიცებინათ, რომ ფერმა დიფერენციალური აღრიცხვის აღმომჩენია. მათ, სხვათა შორის, არ იცოდნენ ნიუტონის აზრი ამის შესახებ, გამოთქმული ერთ-ერთ კერძო წერილში, რომელიც მხოლოდ ჩვენი საუკუნის ოცდაათიანი წლების დასაწყისში იყო მიკვლეული — ორასზე მეტი წლის შემდეგ ნიუტონის გარდაცვალებიდან! ნიუტონი, ყოველგვარი ორაზროვნების გარეშე წერს: „მინიშნება მეთოდზე მივიღე მხებების გავლების ფერმას წესიდან. მე ვიყენებდი მას აბსტრაქტული განტოლებებისათვის როგორც პირდაპირ, ისე შებრუნებით და იგი ზოგადი გავხადე". აქ აუცილებლად უნდა ითქვას, რომ ნიუტონი საუბრობს ფლუქსიათა მეთოდზე („მინიშნება მეთოდზეო" ამბობს იგი), ნიუტონისეული ფლუქსია არის ის, რასაც ჩვენ დღეს წარმოებულს ვუწოდებთ, ხოლო ფლუქსიათა მეთოდი იგივეა, რაც დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა! მიაქციეთ ყურადღება: „...ვიყენებდი მას... როგორც პირდაპირ, ისე შებრუნებითო..." — ამბობს ნიუტონი. ფერმას წესის პირდაპირ გამოყენებას, როგორც ვნახეთ, წარმოებულის ცნებამდე მივყავართ; შებრუნებით გამოყენებას კი ინტეგრალის ცნებამდე. ამრიგად, უეჭველია ფერმას გავლენა ნიუტონზე. ასეთ გენიოსზე გავლენის მოხდენა კი, დამეთანხმებით, ადვილი არ არის!

დაბოლოს, თქვენს ყურადღებას მივაპყრობ ერთ მეტად საგულისხმო გარემოებას. ზემოთ, S და V ფუნქციების ექსტრემუმების წერტილების მოსაძებნად ჩვენ შესაბამისად

$$2a - x = 0 \text{ და } 2ax - 3x^2 = 0$$

განტოლებების ამოხსნა დაგვჭირდა. მათი მარცხენა ნაწილები სხვა არა არის რა თუ არა $S'(x)$ და $V'(x)$.

ამრიგად, ექსტრემუმის წერტილის მოსაძებნად წარმოებული ნულს უნდა გავუტოლოთ და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. რა თქმა უნდა, მიხვდით, რომ ეს არის **ფერმას თეორემა**, რომელიც სახელმძღვანელოში შემდეგნაირადაა ჩამოყალიბებული: **თუ x_0 წერტილი f ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია და ამ წერტილში არსებობს წარმოებული, მაშინ $f'(x_0) = 0$.**

ალბათ გასაგებია, თუ რატომ ატარებს ეს თეორემა ფერმას სახელს.

რგოლისებურ ზედაპირს, სურათზე რომაა გამოსახული

მებიუსის ზედაპირი

ჰქვია. მას ბევრი საინტერესო თვისება აქვს, რომელთაგან უპირველესი ის არის, რომ იგი... ცალმხრივია! ამიტომაც არ შეიძლება მისი ისე შეღებვა, რომ ერთი მხარე, ვთქვათ, წითელი იყოს, მეორე — მწვანე.

გვ.

რა არის მრავალგანზომილებიანი სივრცე?

ბუნების წიგნი მათემატიკური ნიშნებითაა დაწერილი.

გალილეი

ყველა მეტ-ნაკლებად განათლებულმა ადამიანმა იცის, რომ აინშტაინის ფარდობითობის თეორიამ მთელი გადატრიალება მოახდინა ფიზიკაში. მაგრამ ცოტა ვინმემ თუ იცის, რა როლს ასრულებს ამ თეორიაში აბსტრაქტული ოთხგანზომილებიანი სივრცე. საქმე ის არის, რომ ფარდობითობის თეორიას არ აკმაყოფილებს მოძრავი წერტილის მხოლოდ მდებარეობის განსაზღვრა, რისთვისაც საკმარისია სამი განზომილება, საჭიროა ცნობილი იყოს, თუ რა მომენტში უკავია წერტილს ეს მდებარეობა. ამიტომაც ხსენებულ სამ განზომილებას ემატება მეოთხე — დრო. რატომ ვთქვი, აბსტრაქტული ოთხგანზომილებიანი სივრცე? იმიტომ, რომ ამ ცნებამდე მათემატიკოსები ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი სივრცის თეორიული განზოგადებით მივიდნენ, მას არავითარი რეალური შინაარსი არ ჰქონდა — ეს მხოლოდ და მხოლოდ აბსტრაქცია იყო. მოგვიანებით კი, აინშტაინის ეპოქალური აღმოჩენის შემდეგ ცხადი გახდა, რომ ეს სივრცე ისევე რეალურია, როგორც სამგანზომილებიანი. ეს იყო აბსტრაქტული აზროვნების რეალურ სამყაროსთან სიახლოვის კიდევ ერთი ბრწყინვალე დადასტურება. იმასაც ვიტყვი, რომ მათემატიკოსები მხოლოდ ოთხგანზომილებიანი სივრცით არ კმაყოფილდებიან — ისინი იხილავენ მრავალგანზომილებიან და, თქვენ წარმოიდგინეთ, უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებსაც კი... ალბათ შემეკითხებით: მაინც, რა არის მრავალგანზომილებიანი სივრცე? როგორ განისაზღვრება ის? რა თავისებურებებით ხასიათდება? შევეცდები, შეძლებისდაგვარად ვუპასუხო ამ კითხვებს.

ვერავითარი გეომეტრიული წარმოდგენა ვერ მიგვიყვანს მრავალგანზომილებიანი სივრცის ცნებამდე. ვერ მიგვიყვანს, ვინაიდან გარეშემო არსებული გარე სამყარო სამგანზომილებიანია და ჩვენ არ ძალგვიძს წარმოვიდგინოთ, მაგალითად, ოთხგანზომილებიანი კუბი, — კუბი, რომელსაც **16** წვერო და **32** წიბო აქვს...

მრავალგანზომილებიანი სივრცის ასაგებად გეომეტრიის ანალიზური ენა უნდა მოვიშველიოთ. ესაა — „კოორდინატთა ენა"! რა თქმა უნდა, კარგად იცით, რომ თუ წრფეზე კოორდინატთა სისტემაა შემოღებული, ესე იგი, არჩეულია მიმართულება, ათვლის საწყისი, ანუ სათავე და, აგრეთვე, მასშტაბი, მაშინ წრფის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა ერთი რიცხვით — ამ წერტილის კოორდინატით განისაზღვრება. სხვანაირად, ეს ნიშნავს, რომ წრფის წერტილთა სიმრავლე ურთიერთცალსახად აისახება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. სიბრტყეზე წერტილის მდებარეობის განსასაზღვრავად ერთი რიცხვი აღარ კმარა, ორი რიცხვია საჭირო, სივრცეში კი — სამი (ცხადია, იმ პირობით, რომ სიბრტყეზეც და სივრცეშიც კოორდინატთა გარკვეული სისტემაა შემოღებული).

ამრიგად, წრფეზე წერტილის მდებარეობა რომ ვიცოდეთ, საკმარისია ერთი რიცხვი, სიბრტყეზე — ორი, სივრცეში — სამი. ამის შესაბამისად ამბობენ, რომ წრფე ერთგანზომილებიანი სივრცეა, სიბრტყე — ორგანზომილებიანი, ჩვეულებრივი სივრცე კი — სამგანზომილებიანი. მათ ასე აღნიშნავენ: $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$.

ერთგანზომილებიანი სივრცე შეიძლება გავიაზროთ, აგრეთვე, როგორც ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე, ორგანზომილებიანი, როგორც ნამდვილ რიცხვთა ყველა დალაგებული წყვილის სიმრავლე, ხოლო სამგანზომილებიანი, როგორც ნამდვილ რიცხვთა ყველა დალაგებული სამეულის სიმრავლე, ესე იგი,

$$\mathbf{R}^1=\{(x_1) \mid x_1\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{R}^2=\{(x_1,\ x_2) \mid x_1,\ x_2\in\mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{R}^3=\{(x_1,\ x_2,\ x_3) \mid x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbf{R}\}.$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ წერტილის კოორდინატები ჩვეული x, y, z ასოებით კი არ არის აღნიშნული, არამედ ერთი ასოთი, ოღონდ ნიშნაკიანით. ეს უკანასკნელი მიგვანიშნებს, რომელი კოორდინატია აღებული — პირველი, მეორე თუ მესამე, ასეთი აღნიშვნა, როგორც ქვემოთ ნახავთ, უფრო მოსახერხებელია. აქვე ვიტყვი, რომ

შემდგომში წერტილს იმავე ასოთი აღვნიშნავ, რითაც მის კოორდინატებს, ოღონდ უნიშნაკოდ. მაგალითად, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ და ასე შემდეგ.

მრავალგანზომილებიანი სივრცე

ახლა ჩვენ უკვე მომზადებულები ვართ, რომ n-განზომილებიანი სივრცის განსაზღვრება შემოვიღოთ.

ვთქვათ, n რაიმე ნატურალური რიცხვია. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ყველა დალაგებული n-ეული: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. მათ სიმრავლეს **n-განზომილებიანი სივრცე** ეწოდება, თვით ამ n-ეულებს კი **n-განზომილებიანი სივრცის წერტილები**.

აღვნიშნოთ n-განზომილებიანი სივრცე $\mathbf{R}^n$-ით. მაშინ, ჩვენი შეთანხმების თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1, x_2,\ldots,x_n) \mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R}\}.$$

აქვე შევნიშნავ, რომ, თუ

$$x=(x_1, x_2,\ldots, x_n) \text{ და } y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$$

$\mathbf{R}^n$ სივრცის ორი წერტილია, მაშინ $x=y$ ტოლობა შემდეგი n ტოლობის ეკვივალენტურია:

$$x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ldots,\ x_n=y_n.$$

ცხადია, ასეთნაირად განსაზღვრული ტოლობა რეფლექსურია (ყველა x თავის თავს უდრის), სიმეტრიულია ($x=y\Rightarrow y=x$) და ტრანზიტულია ($x=y$ და $y=z\Rightarrow x=z$).

მეტრიკა მრავალგანზომილებიან სივრცეში

შემოვიღოთ n-განზომილებიან სივრცეში მეტრიკა, ესე იგი, განვსაზღვროთ მანძილი სივრცის ორ — x და y წერტილს შორის. აღვნიშნოთ ეს მანძილი $d(x, y)$-ით.

ალბათ გასაგებია, $d(x, y)$ მანძილი ისე უნდა განისაზღვროს, რომ თუ n არის 1, 2 ან 3, ჩვენთვის ცნობილი ტოლობები მივიღოთ. გავიხსენოთ, როგორ გამოითვლება მანძილი ამ შემთხვევებში.

თუ x და y წრფის წერტილებია, ესე იგი, $x=(x_1)$, $y=(y_1)$, მაშინ, როგორც გახსოვთ,

$$d(x,y)=|x_1-y_1|=\sqrt{(x_1-y_1)^2}\ .$$

თუკი x და y სიბრტყეზე მდებარე წერტილებია, ესე იგი, $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, მაშინ

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\ .$$

დაბოლოს, იმ შემთხვევაში, როცა x და y სივრცის წერტილებია: $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$, $d(x, y)$ მანძილისათვის შემდეგი ფორმულა გვაქვს:

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}\ .$$

დიდი გამჭრიახობა არაა საჭირო, რომ ზემოთ დაწერილი სამი ტოლობის საფუძველზე დავასკვნათ: თუ $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ და $y=(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ორი წერტილი, მათ შორის მანძილი

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

ფორმულით უნდა განისაზღვროს.

როგორც ხედავთ, ნებისმიერი x-ისა და y-ისათვის

$$d(x, y)\geqslant 0,$$

ამასთან ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა $x=y$. ამრიგად, მანძილი $\mathbf{R}^n$ სივრცეში არაუარყოფითი რიცხვია.

განსაზღვრებიდან ჩანს აგრეთვე, რომ მანძილი სიმეტრიულია, ესე იგი, როგორიც უნდა იყოს x და y

$$d(x, y)=d(y, x).$$

აღვნიშნოთ მანძილის კიდევ ერთი თვისება, სახელდობრ, დავამტკიცოთ, რომ როგორიც უნდა იყოს $\mathbf{R}^n$ სივრცის სამი — x, y და z წერტილი,

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

სიბრტყისა და, აგრეთვე, სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში ეს უტოლობა იმ, ყველასთვის ცნობილ, ფაქტს გამოხატავს, რომ სამკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამს არ აღემატება. ამიტომაც დაწერილ უტოლობას **სამკუთხედის უტოლობა** ჰქვია. მის დასამტკიცებლად წინასწარ ვაჩვენოთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ და $b_1,b_2,\ldots,b_n$ მიმდევრობებისათვის

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)}\ .$$

ესაა ეგრეთ წოდებული **კოშის უტოლობა**. (კოშის სახელი, თქვენთვის რა თქმა უნდა ცნობილია — იგი გამოჩენილი ფრანგი მათემა-

ტიკოსია, რომლის შრომებმა დიდი როლი შეასრულეს მათემატიკური ანალიზის დაფუძნების საქმეში.)

კოშის უტოლობის დასამტკიცებლად, განვიხილოთ

$$u(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\ldots+(a_nx+b_n)^2$$

გამოსახულება. მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ:

$$u(x)=Ax^2+2Cx+B,$$

სადაც

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,$$

$$B=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2,$$

$$C=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

როგორც ხედავთ, $u(x)$ კვადრატული სამწევრია, რომლის უფროსი წევრის კოეფიციენტი, ესე იგი A, დადებითია (თუ $A=0$, მაშინ ყველა $a_k=0$ და კოშის უტოლობის სამართლიანობა ცხადია). გარდა ამისა, $u(x)\geqslant 0$ ყველა x-ისათვის. მაშასადამე, ამ სამწევრის დისკრიმინანტი არ შეიძლება დადებითი იყოს. ამრიგად,

$$C^2\leqslant AB,$$

საიდანაც

$$C\leqslant\sqrt{AB}.$$

ეს კი სწორედ ის უტოლობაა, რომლის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა გადავიდეთ სამკუთხედის უტოლობის დამტკიცებაზე, გვაქვს:

$$d^2(x,y)=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2=$$

$$=((x_1-z_1)+(z_1-y_1))^2+((x_2-z_2)+(z_2-y_2))^2+\ldots+$$

$$+((x_n-z_n)+(z_n-y_n))^2=d^2(x,z)+2D+d^2(z,y),$$

სადაც

$$D=(x_1-z_1)(z_1-y_1)+(x_2-z_2)(z_2-y_2)+\ldots+$$

$$+(x_n-z_n)(z_n-y_n).$$

კოშის უტოლობის თანახმად, $D\leqslant d(x,z)\,d(z,y)$ და, მაშასადამე, $d^2(x,y)$-ისათვის მივიღებთ:

$$d^2(x,y)\leqslant d^2(x,z)+2\,d(x,z)d(z,y)+d^2(z,y).$$

აქედან სულ მარტივად მიიღება სასურველი $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ უტოლობა.

მრავალგანზომილებიანი სფერო და ბირთვი

ვთქვათ, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ არის n-განზომილებიანი სივრცის რაიმე წერტილი, ხოლო r — დადებითი რიცხვი. აღვნიშნოთ S-ით $\mathbf{R}^n$ სივრცის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$d(a,x)=r,$$

რამდენადაც S არის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც a წერტილიდან r მანძილით არიან დაშორებული, ალბათ ხვდებით, რომ $n=1$-ისათვის S ორად ორი წერტილისგან შედგება — ეს იმ მონაკვეთის ბოლოებია, რომლის სიგრძეა $2r$, ხოლო შუაწერტილი — a. თუ $n=2$, მაშინ S არის წრეწირი. მისი ცენტრია a, რადიუსი კი — r. დაბოლოს, იმ შემთხვევაში, როცა $n=3$, S არის r-რადიუსიანი სფერო ცენტრით a წერტილში.

სრულიად ბუნებრივია, ზოგად შემთხვევაში S სიმრავლეს **n-განზომილებიანი სფერო** ვუწოდოთ. ამ სფეროს ცენტრია a, რადიუსი — r. მსგავსადვე განისაზღვრება **n-განზომილებიანი ბირთვი** ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r. სახელდობრ, ეს არის იმ x წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$d(a,x)\leqslant r.$$

მრავალგანზომილებიან სივრცეში შეიძლება განისაზღვროს სხვა ფიგურებიც — წრფე, კუთხე, კუბი და ასე შემდეგ. ამნაირად, აიგება n-განზომილებიანი გეომეტრია.

მრავალგანზომილებიანი სივრცის ერთი საინტერესო თვისება

იმ თავისებურებებიდან, რაც მრავალგანზომილებიან სივრცეს აქვს, მხოლოდ ერთს შევეხები — ყველაზე საგულისხმოსა და, ამავე დროს, მოულოდნელს, მაგრამ წინასწარ მოისმინეთ

ამბავი
კვაჭის გაკოტრებისა
და ერთი სეიფისა

კვაჭის გაუჭირდა. მეტისმეტად გაუჭირდა — ფული გამოელია. უფულო კვაჭი უწყლო თევზივით ეგდო ნაპირზე და სულს ღაფავდა. ბესომ სულზე მოუსწრო. მან მეგობარს იმ სეიფის ამბავი გაანდო, რომელშიც დიდძალი თანხა ინახებოდა...

აი, კვაჭი და ბესო სეიფის წინ დგანან. მაგრამ სეიფი საგულდაგულოდაა დაკეტილი. მისი გაღება შეუძლებელია.

— აბა, ბესო, ახლავე გავაომასქნათ ყველაფერი.

მეგობრებმა სეიფი ოთხგანზომილებიან სივრცეში მოათავსეს, რის შემდეგ მისი დაცარიელება სულ ადვილი საქმე იყო.

ორ დღე-ღამეს გადაბმულად ქეიფობდნენ კვაჭი და ბესო შიქია ლაითამისა და ერემოს დუქანში...

როგორც ხედავთ, კვაჭი ამჯერადაც გამარჯვებული გამოვიდა (მერამდენედ!) მაგრამ სხვა მისი „გაიმასქნებისაგან“ განსხვავებით მას არავითარი კანონი არ დაურღვევია, არ უყალთაბანდია (თუ სეიფის მოპარვას არ ჩავთვლით!), კვაჭი მეცნიერულად მიუდგა საქმეს — მან მეტად მოხდენილად გამოიყენა მრავალგანზომილებიანი, კერძოდ, ოთხგანზომილებიანი სივრცის ის თავისებურება, რაზედაც ახლა მინდა გესაუბროთ.

ვთქვათ, n-განზომილებიან სივრცეში რაიმე ჩაკეტილი σ ზედაპირი გვაქვს (მაგალითად, სფერო). იგი $\mathbf{R}^n$ სივრცეს ორ ნაწილად ყოფს — ერთი ნაწილი სივრცის იმ წერტილებისაგან შედგება, რომლებიც σ-ს შიგნით არის, მეორე — დანარჩენ წერტილებს შეიცავს. მაგალითად, წრეწირი — იგივე ორგანზომილებიანი სფერო — სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს. ასევე ორ ნაწილად ყოფს $\mathbf{R}^3$ სივრცეს სფერო.

ახლა წარმოიდგინეთ, რომ σ ზედაპირი $\mathbf{R}^{n+1}$ სივრცეში მოვათავსეთ. გაყოფს თუ არა ის ამ სივრცეს ორ ნაწილად? თურმე, არა, არ გაყოფს! — იგი ამ სივრცეში „ჩაკეტილი“ აღარ იქნება. ეს თითქოს მოულოდნელია, მაგრამ ფაქტია. აი, მაგალითად, წრეწირი სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს და თუ რაიმე არსება, რომელსაც მხოლოდ სიბრტყეზე მოძრაობა შეუძლია, ვთქვათ, ჭიანჭველა, ამ წრეწირის შიგნით არის, გარეთ ისე ვერ გამოვა, თუ საზღვარს, ესე იგი, წრეწირს არ გადაკვეთს. ამასთანავე, თუ წრეწირის შიგნით პეპელა იმყოფება, ის სულ ადვილად დააღწევს თავს ტყვეობას — აფრინდება ზევით და წრეწირის გარეთ მდებარე ნებისმიერ წერტილში შეძლებს დაჯდომას ისე, რომ საზღვარს — წრეწირს არ გადაკვეთს. მსგავსადვე, „ოთხგანზომილებიანი არსება“, რომელიც სფეროს შიგნით არის მოთავსებული, სულ მარტივად გამოვა გარეთ ისე, რომ სფეროს არ გადაკვეთს — ეს სფერო $\mathbf{R}^4$ სივრცეში ჩაკეტილი არ არის. თქვენთვის, ალბათ, გასაგებია, რომ ოთხგანზომილებიანი სივრცის სწორედ ამ თვისებით ისარგებლა კვაჭიმ — ჩაკეტილი სეიფი ოთხგანზომილებიან სივრცეში ჩაკეტილი აღარ არის!

თანაფარდობა არითმეტიკულ და გეომეტრიულ საშუალოებს შორის

თუკი თქვენ გაეცანით ამ წიგნში დაბეჭდილ ნარკვევს — „საშუალო სიდიდეები", გეცოდინებათ, რას ეწოდება მოცემული რიცხვების არითმეტიკული, გეომეტრიული, ჰარმონიული და, აგრეთვე, კვადრატული საშუალო. ისიც გეცოდინებათ, რომ ხსენებულ სიდიდეებს შორის გარკვეული თანაფარდობებია. შესაძლოა, ზოგიერთ თქვენგანს ახსოვს კიდეც, როგორ შეიძლება ამ უკანასკნელთა დამტკიცება, როცა ორი რიცხვის საშუალოები გვაქვს — ეს სულაც არ არის ძნელი! იმ შემთხვევაში, როცა რიცხვთა რაოდენობა ორზე მეტია, შესაბამისი დამტკიცებანი საგრძნობლად რთულდება. ამასთანავე, უტოლობა, რომელიც აკავშირებს არითმეტიკულსა და გეომეტრიულ საშუალოებს ზოგად შემთხვევაში, მეტად მნიშვნელოვანია და მიზანშეწონილია ამ საკითხის უფრო დაწვრილებით შესწავლა.

საშუალო სიდიდეთა თეორიის ძირითადი თეორემა

ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ სრულიად ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვებია ($n \geqslant 2$). A_n იყოს მათი არითმეტიკული საშუალო, ხოლო G_n — გეომეტრიული საშუალო:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.$$

ჩვენი უახლოესი მიზანია დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა, რომელსაც თამამად შეიძლება საშუალო სიდიდეთა თეორიის ძირითადი თეორემა დავარქვათ.

მოცემული რიცხვების არითმეტიკული საშუალო არაა ნაკლები ამავე რიცხვების გეომეტრიულ საშუალოზე. ამასთანავე, $A_n = G_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა a თანატოლია.

ამრიგად, ჩვენ უნდა დავადგინოთ, რომ, როგორიც უნდა იყოს არაუარყოფითი $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$) რიცხვები,

$$A_n \geqslant G_n \tag{1}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\,, \tag{2}$$

თანაც ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა ყველა a თანატოლია: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. (აქვე ვიტყვი: თუ ერთი a მაინც ნულია, (1) უტოლობის ჭეშმარიტება ცხადია. ამიტომაც ქვემოთ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყველა a დადებითია.)

ცნობილია (1) უტოლობის ბევრი დამტკიცება. მე გაგაცნობთ სამ მათგანს. თავად დარწმუნდებით, რომ ეს დამტკიცებანი სხვადასხვა იდეაზეა დამყარებული და ამდენად უფრო საინტერესოა.

პირველი დამტკიცება

ეს დამტკიცება გამოჩენილ ფრანგ მათემატიკოს ოგიუსტენ კოშის (*A. Cauhy*, 1789 — 1857) ეკუთვნის. იგი იმითაცაა შესანიშნავი, რომ მასში გამოყენებულია ეგრეთ წოდებული უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპი. თუ რა პრინციპია ეს, ამაზე ქვემოთ, ახლა კი თეორემის დამტკიცებას შევუდგეთ.

სულ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია, როცა $n = 2$. მართლაც, ვინაიდან

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0,$$

ამიტომ

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geqslant 0,$$

ანუ

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}\,.$$

მიღებულ უტოლობაზე დაყრდნობით ვაჩვენოთ, რომ თუ (1) სამართლიანია რაიმე n-ისათვის, მაშინ ის $2n$-ისთვისაც იქნება სამართლიანი, ესე იგი,

$$A_n \geqslant G_n \Rightarrow A_{2n} \geqslant G_{2n}.$$

მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ რიცხვები. დავაჯგუფოთ ისინი ორ-ორად და შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\frac{a_1+a_2}{2}=b_1, \frac{a_3+a_4}{2}=b_2, \ldots, \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}=b_n.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}}{2n}=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

და, რამდენადაც, დაშვების თანახმად, (1) უტოლობა სამართლიანია n-ისათვის, ამიტომ

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

ეს კი შემდეგის ეკვივალენტურია:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}}{2n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2} \ldots \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}}. \tag{3}$$

მაგრამ, როგორც ვიცით,

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}, \frac{a_3+a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3 a_4}, \ldots, \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}$$

და, მაშასადამე, (3) უტოლობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}}{2n} \geqslant \sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n}}.$$

ამრიგად, (1) უტოლობა სამართლიანია $2n$-ისთვის.

რამდენადაც (1) სამართლიანი $n=2$-ისათვის, დამტკიცებულის თანახმად, ის სამართლიანი იქნება, როცა n უდრის 4-ს, 8-ს, 16-ს, 32-ს, და საზოგადოდ, 2-ის ნებისმიერ ხარისხს.

მაშასადამე, გამოვიყენეთ რა ინდუქცია ზევით, ჩვენ დავამტკიცეთ (1) უტოლობის ჭეშმარიტება რიცხვთა

$$\{2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

სიმრავლისათვის.

ახლა გამოვიყენოთ ინდუქცია ქვევით — ვაჩვენოთ, რომ, თუ (1) უტოლობა სამართლიანია რაიმე n-ისათვის, მაშინ ის სამართლიანი იქნება $(n-1)$-სათვისაც ($n \geqslant 3$):

$A_n \geqslant G_n \Rightarrow A_{n-1} \geqslant G_{n-1}$.

მართლაც, აღვნიშნოთ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ რიცხვების არითმეტიკული საშუალო b-თი,

$$b = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

და დავწეროთ (1) უტოლობა, რომელიც დაშვების ძალით სამართლიანია n რიცხვისათვის, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b$ რიცხვებისათვის. გვაქვს:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b}\ .$$

ეს უტოლობა, იმის გათვალისწინებით, რომ

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)b$,

შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$b \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b}\ .$$

აქედან კი სულ ადვილად მიიღება

$$b \geqslant \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$$

უტოლობა.

შევაჯამოთ ყველაფერი, რაც ვიცით. ჯერ ერთი, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (1) უტოლობა სამართლიანია, როცა n არის

$2, 4, 8, 16, \ldots 2^m, \ldots$,

მეორეც, დავრწმუნდით, რომ თუ (1) სამართლიანია რაიმე n-ისათვის ($n \geqslant 3$), ის სამართლიანი იქნება $(n-1)$-სათვისაც. ეს ორი ფაქტი უკვე საკმარისია, რომ დავასკვნათ: (1) უტოლობა სამართლიანია 2-ზე მეტი ნებისმიერი მთელი რიცხვისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, n ასეთი რიცხვია. ცხადია, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური m, რომლისთვისაც

$2^m \leqslant n < 2^{m+1}$.

თუ $n = 2^m$, დასამტკიცებელი არაფერია — ამ ტიპის რიცხვებისათვის (1) უტოლობის ჭეშმარიტება დადგენილი გვაქვს. თუკი

$2^m < n < 2^{m+1}$,

მაშინ ასე ვიმსჯელოთ: (1) უტოლობა სამართლიანია 2^{m+1}-სათვის,

მაშასადამე, დამტკიცებულის თანახმად (ინდუქცია ქვევით!) ის სამართლიანია აგრეთვე $(2^{m+1}-1)$-სათვისაც. აქედან, იმავე მოსაზრების გამო, უტოლობა სამართლიანია $(2^{m+1}-2)$-სათვის და ასე შემდეგ. ცხადია, ადრე თუ გვიან n-ამდესაც მივალთ.

ამრიგად, (1) უტოლობა, ესე იგი, ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია ყველა n-ისათვის.

ახლა მეორე ნაწილი დავამტკიცოთ — ვაჩვენოთ, რომ (1) თანაფარდობაში ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა ყველა a თანატოლია.

თუ $a_1=a_2=\ldots=a_n$, მაშინ, ცხადია,

$A_n=G_n$,

ესე იგი, (1) თანაფარდობაში ტოლობა გვაქვს. დავრწმუნდეთ, რომ შებრუნებითაც — თუ $A_n=G_n$, მაშინ ყველა a თანატოლია. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ ორი a მაინც არაა თანატოლი, მაშინ $A_n>G_n$.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a_1\neq a_2$. მაშინ, იმის გამო, რომ

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2>a_1a_2,$$

გვაქვს:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2a_3\ldots a_n}>\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპი

ახლა შევეხოთ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ლოგიკურ საფუძველს. როგორც თეორემის დამტკიცებისას იყო აღნიშნული, ჩვენ გამოვიყენეთ ჯერ ინდუქცია ზევით, შემდეგ კი — ინდუქცია ქვევით. ორივეს გაერთიანება გვაძლევს ინდუქციური დამტკიცების სპეციალურ სახეს, რომელიც უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპს ეფუძნება. გავეცნოთ მის არსს.

თუ $P(n)$ ნატურალურ n რიცხვზე დამოკიდებული ცვლადიანი წინადადებაა, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი, რომელსაც ახლა შეიძლება პირდაპირი ინდუქციის პრინციპი დავარქვათ, შემდეგნაირად წარმოგვიდგება:

პირდაპირი ინდუქციის პრინციპი

ცვლადიანი $P(n)$ წინადადების ჭეშმარიტებას ყველა ნატურალური n რიცხვისათვის შემდეგი ორი წანამძღვარი უზრუნველყოფს:

(1) $P(n)$ ჭეშმარიტია $n = 1$-ისათვის,

(2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

რაც შეეხება უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპს, იგი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპი

ცვლადიანი $P(n)$ წინადადების ჭეშმარიტებას ყველა ნატურალური n რიცხვისათვის შემდეგი ორი წანამძღვარი უზრუნველყოფს:

(1) $P(n)$ ჭეშმარიტია n -ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლისათვის,

(2) $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

თუ გავაანალიზებთ კოშის დამტკიცებას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ აქ ჯერ მტკიცდება (1) უტოლობის სამართლიანობა $n = 2^m$ სახის რიცხვებისათვის (ინდუქცია ზევით), ხოლო შემდეგ იმავე უტოლობის სამართლიანობიდან რაიმე n-ისათვის დგინდება მისი სამართლიანობა $(n-1)$ -სათვის. ზუსტად მოყვანილი სქემაა!

პირდაპირი ინდუქციის პრინციპით სარგებლობისას, აუცილებელია ორი წანამძღვარი: $P(1)$-ის ჭეშმარიტობა და $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ იმპლიკაციის ჭეშმარიტობა. $P(1)$ არის ბაზისი, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ — ინდუქციური ბიჯი.

ანალოგიური ვითარებაა უკუქცევადი ინდუქციის პრინციპის შემთხვევაში. აქაც ორი წანამძღვარია: $P(n)$-ის ჭეშმარიტება n-ის მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლისათვის და $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ იმპლიკაციის ჭეშმარიტება. პირველი ბაზისია, მეორე — ინდუქციური ბიჯი.

ხატოვნად პირდაპირი ინდუქციის პრინციპი შეიძლება ასე გამოვთქვათ: თუ შენობის პირველ სართულზე მოხვედრა შესაძლებელია და ყველა სართულიდან მის ზედა სართულზე ასვლაც შეიძლება, მაშინ ამ შენობის ნებისმიერ სართულზე ავალთ, რაგინდ მაღალიც უნდა იყოს ის.

უკუქცევადი პრინციპი კი გვარწმუნებს, რომ თუ შენობის უსასრულოდ ბევრ სართულზე მოხვედრა შეიძლება და ყველა სართულო-

დან მის ქვედა სართულზე ჩამოსვლაც შეიძლება, მაშინ შესაძლებელია ამ შენობის ნებისმიერ სართულზე მოხვედრა.

დარწმუნებული ვარ, თქვენთვის ნათელია როგორც მსგავსება, ისე განსხვავება ამ ორ პრინციპს შორის.

მცირე დაზუსტება

ცხადია, ზემოთ მოყვანილ ტოლობებს A_n-ისა და G_n-ისათვის აზრი ეკარგებათ, როცა $n=1$. მართლაც, რას ნიშნავს, მაგალითად, პირველი ხარისხის ფესვი? მაგრამ, ზოგჯერ, თურმე, მიზანშეწონილია განისაზღვროს როგორც A_1, ისე G_1: ჩვენთვისაც მოსახერხებელი იქნება მათი განსაზღვრა. სახელდობრ, შევთანხმდეთ, რომ

$$A_1=G_1=a_1.$$

უფრო ზუსტად: ერთი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო, ისევე როგორც მისი გეომეტრიული საშუალო თვით ამ რიცხვის ტოლად მივიღოთ.

ძირითადი თეორემის ის დამტკიცება, რომელიც ახლა უნდა გაგაცნოთ, ერთ —

$$A_m=\frac{G_{m-1}}{m}\left((m-1)\frac{A_{m-1}}{G_{m-1}}+\left(\frac{G_m}{G_{m-1}}\right)^m\right) \tag{4}$$

ტოლობას და ერთ —

$$x^m \geqslant mx-(m-1) \tag{5}$$

უტოლობას ემყარება. აქ $x>0$, ხოლო $m\in\{2, 3, 4, \ldots\}$. შევამოწმოთ ეს თანაფარდობანი. დავიწყოთ (4) ტოლობით. გვაქვს:

$$\frac{G_{m-1}}{m}\left((m-1)\frac{A_{m-1}}{G_{m-1}}+\left(\frac{G_m}{G_{m-1}}\right)^m\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\left((m-1)A_{m-1}+\frac{G_m^m}{G_{m-1}^{m-1}}\right)=\frac{1}{m}(a_1+a_2+\ldots+a_{m-1}+$$
$$+a_m)=A_m.$$

ამრიგად, (4) ჭეშმარიტია. რაც შეეხება (5) უტოლობას, იმ შემთხვევაში, როცა $x=1$, მისი ჭეშმარიტება ცხადია. თუკი $x\neq 1$, შემდეგნაირად მოვიქცეთ, განვიხილოთ

$$F_m(x)=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1-m)$$

ნამრავლი და გარდავქმნათ იგი. ვინაიდან

$$x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1=\frac{x^m-1}{x-1},$$

ამიტომ

$$P_m(x)=x^m-1-mx+m=x^m-mx+(m-1).$$

როგორც ხედავთ, საკმარისია დავადგინოთ, რომ $P_m(x) \geqslant 0$ და (5) უტოლობაც დამტკიცებული იქნება. აქ სულ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება: $0 < x < 1$ ან $x > 1$ ($x = 1$ შემთხვევას აღარ ვიხილავ — აკი უშუალოდ შევამოწმეთ, რომ მისთვის (5) ჭეშმარიტია!).

პირველ შემთხვევაში $x - 1 < 0$ და, გარდა ამისა, ვინაიდან x-ის ყველა ხარისხი 1-ზე ნაკლებია, ამიტომ

$$x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1 < m,$$

რაც გვირჩევნებს, რომ $P_m(x)$-ის მეორე მამრავლიც უარყოფითია. ესე იგი, ამ შემთხვევაში $P_m(x) > 0$. ანალოგიურად განიხილება მეორე შემთხვევაც (აქ ორივე მამრავლი დადებითია).

ამრიგად, (5) უტოლობის ჭეშმარიტებაშიც დავრწმუნდით. ჩავსვათ მასში x-ის ნაცვლად დადებითი

$$\frac{G_m}{G_{m-1}}$$

რიცხვი. მივიღებთ:

$$\left(\frac{G_m}{G_{m-1}}\right)^m \geqslant m\frac{G_m}{G_{m-1}} - (m-1).$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით, (4) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$A_m \geqslant \frac{G_{m-1}}{m}\left((m-1)\frac{A_{m-1}}{G_{m-1}} + m\frac{G_m}{G_{m-1}} - (m-1)\right) =$$

$$= \frac{m-1}{m}(A_{m-1} - G_{m-1}) + G_m,$$

ანუ

$$A_m \geqslant G_m + \frac{m-1}{m}(A_{m-1} - G_{m-1}). \tag{6}$$

ახლა, სასურველ — (1) უტოლობამდე სულ ცოტაღა დარჩა — საკმარისია (6) უტოლობაში m-ს მივცეთ მნიშვნელობანი: $2, 3, 4, \ldots, n-1, n$ და გავიხსენოთ, რომ $A_1 = G_1$. მივიღებთ შემდეგ $n-1$ უტოლობას:

$$A_2 \geqslant G_2,$$

$$A_3 \geqslant G_3 + \frac{2}{3}(A_2 - G_2),$$

$$A_4 \geqslant G_4 + \frac{3}{4}(A_3 - G_3),$$

. . . .

$$A_{n-1} \geqslant G_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}(A_{n-2} - G_{n-2}),$$

$$A_n \geqslant G_n + \frac{n-1}{n}(A_{n-1} - G_{n-1}).$$

უტოლობათა ამ ერთობლიობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ჯაჭვი იმპლიკაციებისა:

$$A_2 \geqslant G_2 \Rightarrow A_3 \geqslant G_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{n-1} \geqslant G_{n-1} \Rightarrow A_n \geqslant G_n.$$

ამრიგად, (1) უტოლობა დამტკიცებულია. მასთან ერთად ძირითადი თეორემაც შეიძლება დამტკიცებულად ჩავთვალოთ, რადგან, როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ ორი a მაინც განსხვავებულია, მაშინ $A_n > G_n$.

მესამე დამტკიცება

კოშის დამტკიცება (1) უტოლობისა ინდუქციურია, მეორე დამტკიცება, მე ვიტყოდი, ალგებრულია, მესამე კი, რომელსაც ახლა გთავაზობთ, — ანალიზური და წარმოებულის გამოყენების შესანიშნავი ნიმუშია. არ შეგეშინდეთ, არ იფიქროთ, რომ ბევრი რამის ცოდნაა საჭირო. სულაც არა! ნებისმიერ მეცხრეკლასელს, რომელიც დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტებს იცნობს, შესწევს ძალა გაიგოს ეს დამტკიცება. ერთი კია: მან უნდა იცოდეს რა არის $ln\ x$ — ლოგარითმული ფუნქცია და რას უდრის მისი წარმოებული (ეს საკითხი მეათე კლასში შეისწავლება).

1. ვთქვათ, f არის $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი და ამ სეგმენტის შიგნით წარმოებადი ფუნქცია. თუ, გარდა ამისა, $f(a)=0$, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს a-სა და b-ს შორის მოთავსებული ისეთი c, რომ

$$f(b)=\frac{(b-a)^n f'(c)}{n(c-a)^{n-1}}. \tag{7}$$

მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი ტოლობით განსაზღვრული g ფუნქცია:

$$g(x)=f(x)-\frac{(x-a)^n f(b)}{(b-a)^n},$$

რომელიც, რა თქმა უნდა, უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე.

ორში ერთი: g ან მუდმივია მთელ მოცემულ სეგმენტზე, ან არ არის მუდმივი.

პირველ შემთხვევაში $g'(x)=0$ ყველა x-ისათვის $]a, b[$ შუალედიდან. მაგრამ,

$$g'(x)=f'(x)-\frac{n(x-a)^{n-1} f(b)}{(b-a)^n}$$

და, მაშასადამე, თუ x-ის ნაცვლად a-სა და b-ს შორის მოთავსებულ ნებისმიერ c-ს ჩავსვამთ, გვექნება:

$$0=f'(c)-\frac{n(c-a)^{n-1} f(b)}{(b-a)^n}. \tag{8}$$

ეს იგივე (7) ტოლობაა, ოღონდ სხვა სახით ჩაწერილი! მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ეს ტოლობა სამართლიანია a-სა და b-ს შორის მოთავსებული ნებისმიერი c-სათვის.

მეორე შემთხვევაში, ესე იგი, როცა g არაა მუდმივი, $[a, b]$ სეგმენტის შიგნით მას ექსტრემუმის ერთი წერტილი მაინც ექნება. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $g(a)=g(b)=0$ (შეამოწმეთ!) ვთქვათ, c ასეთი წერტილია. მაშინ, ფერმას ცნობილი თეორემის თანახმად $f'(c)=0$, რაც ისევ (8) ტოლობას გვაძლევს.

ამრიგად, (7) ტოლობა სამართლიანია ორივე შესაძლო შემთხვევაში.

II. ნებისმიერი დადებითი a და b რიცხვებისათვის, არსებობს მათ შორის მოთავსებული ისეთი ξ, რომ

$$\ln b = \ln a + \frac{b-a}{a} - \frac{(b-a)^2}{2\xi^2}. \tag{9}$$

ამ ტოლობის დასამტკიცებლად, განვიხილოთ $]0, +\infty[$ შუალედში განსაზღვრული შემდეგი R ფუნქცია:

$$R(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{a}.$$

ცხადია, R უწყვეტია და წარმოებადი. გარდა ამისა, როგორც სულ ადვილი შესამოწმებელია, $R(a)=0$. ამიტომ, (7) ტოლობის თანახმად, თუ უკანასკნელში მივიღებთ $n=2$, გვექნება:

$$R(b) = \frac{(b-a)^2 R'(c)}{2(c-a)}, \tag{10}$$

სადაც c მოთავსებულია a-სა და b-ს შორის.

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$R'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$$

და, მაშასადამე, $R'(a)=0$, შეგვიძლია I დებულება გამოვიყენოთ უკვე $R'(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც, რა თქმა უნდა, უწყვეტი და წარმოებადია ყველა დადებითი x-ისათვის და, მით უმეტეს, a-სა და b-ს შორის მოთავსებული x-ებისათვის. თუ (7) ფორმულაში $f=R'$, $b=c$, $n=1$, მივიღებთ:

$$R'(c) = (c-a)R''(\xi) \tag{11}$$

სადაც ξ მოთავსებულია a-სა და c-ს და, მაშასადამე, a-სა და b-ს შორის. (10) და (11) ტოლობებიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ

$$R''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

გვაქვს:

$$R(b) = -\frac{(b-a)^2}{2\,\xi^2}.$$

თუ გავიხსენებთ R ფუნქციის განმსაზღვრელ ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\ln b - \ln a - \frac{b-a}{a} = -\frac{(b-a)^2}{2\,\xi^2}.$$

ეს იგივე (9) ტოლობაა.

ამრიგად, (11) დებულებაც დამტკიცებულია. გადავიდეთ ძირითადი თეორემის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ მოცემული დადებითი რიცხვებია, A_n — მათი არითმეტიკული საშუალო. ვისარგებლოთ (9) ტოლობით, რომელშიც მივიღოთ: $b = a_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, $a = A_n$. გვექნება შემდეგი n ტოლობა:

$$\ln a_1 = \ln A_n + \frac{a_1 - A_n}{A_n} - \frac{(a_1 - A_n)^2}{2\xi_1^2},$$

$$\ln a_2 = \ln A_n + \frac{a_2 - A_n}{A_n} - \frac{(a_2 - A_n)^2}{2\xi_2^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ln a_n = \ln A_n + \frac{a_n - A_n}{A_n} - \frac{(a_n - A_n)^2}{2\xi_n^2}.$$

აქ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ რაღაც რიცხვებია, მოთავსებული შესაბამისად a_1-სა და A_n-ს, a_2-სა და A_n-ს, …, a_n-სა და A_n-ს შორის.

შევკრიბოთ დაწერილი ტოლობები:

$$\ln(a_1 a_2 \ldots a_n) = n \ln A_n + \frac{1}{A_n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n - nA_n) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{(a_1 - A_n)^2}{\xi_1^2} + \frac{(a_2 - A_n)^2}{\xi_2} + \ldots + \frac{(a_n - A_n)^2}{\xi_n^2}\right).$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = nA_n$, სულ ადვილად მივიღებთ

$$\ln A_n = \ln G_n + C, \tag{12}$$

სადაც

$$C = \frac{1}{2n}\left(\frac{(a_1 - A_n)^2}{\xi_1^2} + \frac{(a_2 - A_n)^2}{\xi_2^2} + \ldots + \frac{(a_n - A_n)^2}{\xi_n^2}\right).$$

ვინაიდან C არაუარყოფითი რიცხვია, ამიტომ (12) ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\ln A_n \geqslant \ln G_n,$$

ანუ

$$A_n \geqslant G_n.$$

როდის არის ტოლობა? ცხადია, მაშინ, როცა $C=0$. მაგრამ C ნულის ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა

$$a_1=A_n,\ a_2=A_n,\ \ldots,\ a_n=A_n,$$

ესე იგი,

$$a_1=a_2=\ldots=a_n.$$

ძირითადი თეორემა დამტკიცებულია.

უტოლობათა დამტკიცება

ჩვენს მიერ დამტკიცებულ (1) უტოლობას ძალზე ხშირად იყენებენ — მისი მეშვეობით შეიძლება ადვილად დავადგინოთ ბევრი ისეთი უტოლობა, რომელთა უშუალოდ დამტკიცება ხშირად ძალიან ძნელია. ამ უტოლობებიდან კი ზოგიერთი თავისთავადაც მნიშვნელოვანია. გავეცნოთ რამდენიმე მაგალითს.

1. დავამტკიცოთ, რომ 1-ზე მეტი ყველა ნატურალური n რიცხვისათვის

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

სანამ დამტკიცებას შევუდგებოდეთ, მოვაგონებთ, რომ $n!$-ით (იკითხება: „n-ფაქტორიალი“) აღინიშნება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-იდან n-ამდე ამ უკანასკნელის ჩათვლით. გარდა ამისა, პირობით მიიღება: $1!=1$, $0!=1$.

რადგან $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, თანაც ყველა მამრავლი ერთმანეთისგან განსხვავებულია, ამიტომ ძირითადი თეორემის ძალით

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}.$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

უცბად მივიღებთ დასამტკიცებელ

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$$

უტოლობას.

2. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\leqslant(n+1)^n.$$

(თუ $n=1$, უტოლობის მარცხენა ნაწილში ნამრავლი არა გვაქვს;

მხოლოდ ერთი რიცხვი რჩება, მაგრამ ბუნებრივია ამ შემთხვევაში ეს გამოსახულება 2-ის ტოლად მივიღოთ.)

უტოლობის დასამტკიცებლად აქაც (1)-ით ვისარგებლოთ. გვაქვს:

$$\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\leqslant\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n}=$$

$$=\frac{2n(n+1)}{2n}=n+1\Rightarrow 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\leqslant(n+1)^n,$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა. როგორ ფიქრობთ, როდის არის მკაცრი უტოლობა?

3. დავამტკიცოთ, რომ თუ $h>-1$, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

რადგან $h>-1$, ამიტომ, როგორც ადვილი დასადგენია, $1+nh>0$. ავიღოთ n დადებითი რიცხვი —

$$1+nh,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1$$

და დავწეროთ მათთვის (1) უტოლობა. გვაქვს მიმდევრობით:

$$\frac{1+nh+1+1+\ldots+1}{n}\geqslant\sqrt[n]{(1+nh)\cdot 1\cdot 1\ldots 1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+h\geqslant\sqrt[n]{1+nh}\Rightarrow(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

სხვათა შორის, თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ h ნულისაგან განსხვავებული იყოს, ხოლო n — ერთზე მეტი, მაშინ მკაცრი უტოლობა გვექნება:

$$(1+h)^n>1+nh.$$

უტოლობა, რომელიც დავამტკიცეთ, მეტად მნიშვნელოვანია, იგი ბერნულის უტოლობის სახელითაა ცნობილი. სიტყვამ მოიტანა და ბარემ გეტყვით ორიოდ სიტყვას ბერნულის, უფრო სწორად, ბერნულების შესახებ.

მეცნიერებისა და კულტურის ისტორიაში გვხვდება შემთხვევები, როცა ამა თუ იმ ნიჭით მთელი ოჯახის წევრები არიან დაჯილდოებულნი და ეს ნიჭი შთამომავლობიდან შთამომავლობას გადაეცემა. შორს ნუღარ წავალთ, — ჩვენი სინამდვილით შემოვიფარგლოთ. განა ქართველ კაცს არ გაუკვირდება, რომ უთხრან — ესა და ეს ფალიაშვილი მუსიკოსი არ არისო?! მსგავს ვითარებას, იქნებ არცთუ ხშირად, მაგრამ, მადლობა ღმერთს, მაინც ვხვდებით, თუმცა ძნელია ამ მხრივ ვინმე პირველობაში შეეცილოს ბერნულების „მათემატიკურ“ გვარს. ამ გვარის რვა წარმომადგენელი თავისი დროის გამოჩენილი მათე-

მატიკოსი იყო. მათგან სამმა — ძმებმა იაკობმა, იოჰანმა და ამ უკანასკნელის შვილმა დანიილმა წარუშლელი კვალი დატოვეს მეცნიერებაში. მინდა რამდენიმე შთამბეჭდავი ფაქტი გაგაცნოთ. ბაზელის უნივერსიტეტის მათემატიკის კათედრას მთელი საუკუნის მანძილზე ბერნულები განაგებდნენ, ორი საუკუნის განმავლობაში კი რომელიმე ბერნული მაინც იყო მისი პროფესორი. იმ რვა ადგილიდან, პარიზის სამეფო აკადემიას უცხოელთათვის რომ ჰქონდა გამოყოფილი, ორი — ბერნულებს ეკავათ თითქმის ასი წელი. ოთხი ბერნული პეტერბურგის აკადემიის საპატიო, ხოლო სამი — ნამდვილი წევრი იყო. მათემატიკაში ძალზე ხშირად შეხვდებით ამ გვარს: ბერნულის განაწილების კანონი, ბერნულის ინტეგრალი, ბერნულის ლემნისკატა, ბერნულის მეთოდი, ბერნულის მრავალწევრი, ბერნულის განტოლება, ბერნულის რიცხვები, ბერნულის უტოლობა და ასე შემდეგ...

ჩვენს მიერ დამტკიცებული უტოლობაც, როგორც ვთქვი, ბერნულის სახელს ატარებს. იგი აღმოაჩინა უფროსმა ბერნულიმ — იაკობმა (1354 — 1705).

4. დადებითი — $a_1, a_2, \ldots, a_n$ რიცხვების ჰარმონიული საშუალო — H_n შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$H_n = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

დავამტკიცოთ, რომ $H_n \leqslant G_n$, თანაც ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა ყველა a თანატოლია.

მართლაც,

$$\frac{1}{H_n} = \frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{G_n},$$

საიდანაც

$$H_n \leqslant G_n.$$

რამდენადაც უკანასკნელი უტოლობის დადგენისას ჩვენ ძირითადი თეორემით ვისარგებლეთ, ცხადია, რომ ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა ყველა a თანატოლია.

გეორგ კანტორი

(1845 — 1918)

თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები

მათემატიკა — ეს არის
უსასრულობის ერთიანი სიმფონია.

დავიდ ჰილბერტი

შუა საუკუნეებში, შესაძლოა უფრო ადრეც, სწავლულებმა უსასრულო რაოდენობის, ანუ, როგორც ახლა ვამბობთ, — უსასრულო სიმრავლის ერთი უცნაური თვისება აღმოაჩინეს. სახელდობრ, მათ შენიშნეს, რომ ორი სხვადასხვა სიგრძის მონაკვეთის წერტილები შეიძლება ისეთნაირად დავაწყვილოთ, რომ ერთი მონაკვეთის ყოველ წერტილს მეორის ერთი და მხოლოდ ერთი წერტილი შეესაბამებოდეს, თანაც ისე, რომ მეორის ყოველი წერტილი პირველის მხოლოდ ერთ წერტილთან იქნება დაწყვილებული. ეს, რა თქმა უნდა, პარადოქსია — ერთმანეთის არატოლი ორი მონაკვეთი... ერთმანეთის ტოლია!? მოგვიანებით მსგავსმა მდგომარეობამ გალილეი შეაშფოთა, — მან შეამჩნია, რომ თუ ნატურალური რიცხვებისა და მათი კვადრატებისაგან (n, n^2) წყვილებს შევადგენთ, იძულებული

ვიქნებით ვაღიაროთ, რომ სრული კვადრატი იმდენივეა, რამდენიც ნატურალური რიცხვი. ეს აბსურდია — კვადრატების რაოდენობა საგრძნობლად ნაკლებია ნატურალურ რიცხვთა რაოდენობაზე... ამ ვითარებამ დიდი მოაზროვნე იმ დასკვნამდე მიიყვანა, რომ მიმართებანი — „ტოლია", „მეტია", „ნაკლებია", რომელთაც ჩვენ, ასე ვთქვათ, უშიშრად ვხმარობთ სასრულ რაოდენობათა განხილვისას, არ შეიძლება უსასრულო რაოდენობებისთვისაც გამოვიყენოთ. გალილეის ეს მოსაზრება, რა თქმა უნდა, სწორია, მაგრამ განა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამით სიძნელე დაძლეულია? უსასრულო სიმრავლეთა შემთხვევაში ხსენებულ მიმართებებით სარგებლობის აკრძალვა ჯერ კიდევ არაფერს ნიშნავს: ხომ საჭიროა ვიცოდეთ ასეთ სიმრავლეთა შედარება? რა თქმა უნდა, საჭიროა! მაშ, როგორ მოვიქცეთ? ამ კითხვაზე ამომწურავი პასუხი გასცა სიმრავლეთა თეორიის შემქმნელმა, გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა კანტორმა (G. Cantor). ქვემოთ, სწორედ სიმრავლეთა შედარების კანტორისეული იდეასა და მასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საინტერესო საკითხზე მინდა გესაუბროთ.

ორიოდე სიტყვა წინასწარ

არის ზოგიერთი მათემატიკური ცნება, რომლის ზუსტი განსაზღვრა არ ხერხდება. ეს არცაა გასაკვირი. საქმე ის არის, რომ ყოველი ცნება უნდა განისაზღვროს უფრო მარტივი ცნებით, ეს უკანასკნელი მასზე მარტივით, ის — კიდევ უფრო მარტივით და ასე შემდეგ. ამრიგად, მარტივი, უფრო მარტივი, კიდევ უფრო მარტივი... სადამდე? ბოლოს აუცილებლად მივალთ ისეთ ცნებამდე, რომ უფრო მარტივს ველარ მოვძებნით. იძულებული ვხდებით იგი პირველად, ანუ საწყის ცნებად მივიღოთ და მისი შინაარსი მხოლოდ მაგალითებით აღვწეროთ. სიმრავლეც პირველადი ცნებაა და არ განისაზღვრება. ამასთანავე, ყველას კარგად გვესმის, თუ რა იგულისხმება, როცა ვამბობთ ქართული ანბანის ასო-ნიშნების სიმრავლე, გეომეტრიული ფიგურის წერტილთა სიმრავლე, ამა თუ იმ კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე და ასე შემდეგ. თითოეულ ხსენებულ შემთხვევაში სიმრავლე წარმოგვიდგება, როგორც ერთი მთლიანი რამ და სწორედ ეს არის არსებითი სიმრავლის ცნებაში. კანტორი ამბობს: „სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ". ზუსტი და მოხდენილი ნათქვამია! ზემოთ მოყვანილ მაგალითებს თუ გადავხედავთ, ეს თვალსაზრისი ნათელი გახდება. მართლაც, როდესაც ვამბობთ „ქარ-

თული ანბანი", ცალკე ასო — ნიშნებს კი არ ვგულისხმობთ, არამედ ყველას ერთად აღებულს. ასევე, გეომეტრიული ფიგურა წარმოდგენილი გვაქვს ერთ დაუნაწილებელ რამედ. იგივე ითქმის კლასის შესახებ. სხვათა შორის, ანბანი, ფიგურა, კლასი, სხვა არაფერია თუ არა სინონიმები სიტყვისა „სიმრავლე". ასეთებია, აგრეთვე, ერთობლიობა, გაერთიანება, ოჯახი, ჯოგი, ფარა, გუნდი და მრავალი სხვა.

სიმრავლეთა განხილვისას მათი ელემენტების თვისებებს, ანუ მათ თვისებრივ ბუნებას ვერ უგულებელვყოფთ, მაგრამ არის შემთხვევები, როცა სხვადასხვა ელემენტებისაგან შედგენილ სიმრავლეებს რაღაც საერთო აქვთ. ავიღოთ, მაგალითად, რაიმე ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდები a, b, c-თი აღვნიშნოთ, ხოლო კუთხეები — α, β, γ-თი. მაშინ

$\{A, B, C\}$, $\{a, b, c\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

სიმრავლეები, გარდა იმისა, რომ ერთმანეთის ტოლნი არ არიან, ელემენტების ბუნებითაც განსხვავდებიან: პირველი სამკუთხედის წვეროების სიმრავლეა, მეორე — გვერდებისა, მესამე — კუთხეებისა. ამასთანავე, თუკი ამ სიმრავლეების ელემენტების თვისებრივ ბუნებას მხედველობაში არ მივიღებთ, ადვილად დავასკვნით, რომ მათ ერთი საერთო თვისება აქვთ, სახელდობრ, თითოეულ მათგანში სამი ელემენტია. ამრიგად, მოცემულ სიმრავლეებს ერთი და იგივე რაოდენობრივი მახასიათებელი აქვთ, — ესაა ნატურალური რიცხვი **3**.

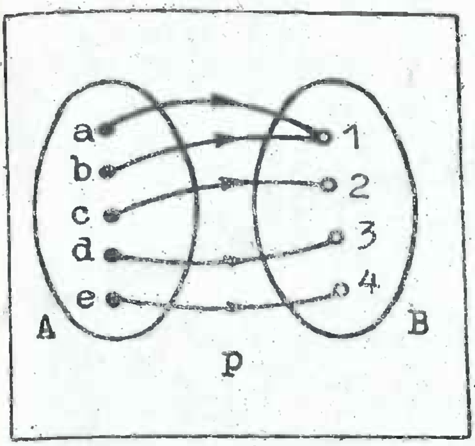
ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი არის რაოდენობრივი მახასიათებელი სასრული სიმრავლისა, თანაც არა მხოლოდ ერთისა, არამედ მათი უსასრულო რაოდენობისა! მაგალითად, იგივე **3** განა მხოლოდ ზემოთ განხილული სიმრავლეების რაოდენობრივი მახასიათებელია? არა, — იგი ახასიათებს აგრეთვე

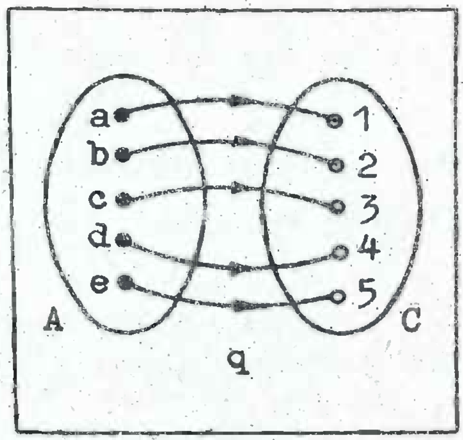
{მზე, დედამიწა, მთვარე}, $\{1, 10, 100\}$, $\{\triangle, \square, \bigcirc\}$

და უამრავ სხვა სიმრავლეს. ყველა ეს სიმრავლე, როგორც ამბობენ, ერთმანეთის ეკვივალენტურია. თუ რას ნიშნავს სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა, ქვემოთ მოგახსენებთ, ახლა კი სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვას გავეცნოთ.

სიმრავლის ასახვა

წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემულია ორი, სრულიად ნებისმიერი A და B სიმრავლე და, აგრეთვე, p წესი, რომელიც A სიმრავლის ყოველ a ელემენტს B სიმრავლის ერთადერთ b ელემენტს შეუსაბამებს, თანაც





ნახ. 1

ნახ. 2

ისე, რომ ყოველი b ერთ a-ს მაინც შეესაბამება. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **A სიმრავლე ასახულია B სიმრავლეზე**. იმ b-ს, რომელიც a-ს შეესაბამება, უკანასკნელის **სახე** ეწოდება და $p(a)$-თი აღინიშნება. ამრიგად, $b=p(a)$ ჩანაწერი ნიშნავს, რომ b არის a-ს სახე p ასახვისას.

განვიხილოთ ორი მაგალითი: ვთქვათ;

$A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$

და

$p(a)=1,\ p(b)=1,\ p(c)=2,\ p(d)=3,\ p(e)=4.$

ცხადია, p არის A სიმრავლის ასახვა B-ზე. ამასთანავე, a-სა და b-ს ერთი და იგივე სახე აქვთ: **1**, ხოლო c-ს, d-ს და e-ს სხვადასხვა სახე აქვთ.

წარმოვადგინოთ p ასახვა გრაფიკულად (ასეთი წარმოდგენა თვალსაჩინოა, და ამდენად, მოსახერხებელი). ამისათვის დავხატოთ ხუთელემენტიანი A და ოთხელემენტიანი B სიმრავლეები და A-ს ყოველი ელემენტიდან B-ს შესაბამის ელემენტამდე ისარი მივმართოთ (ნახ. 1). დამეთანხმებით, ალბათ, ნახატზე კარგად ჩანს, რომ **1** არის სახე ერთდროულად ორი — a და b ელემენტისა.

ახლა, იგივე A სიმრავლე

$C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

სიმრავლეზე ავსახოთ. აღვნიშნოთ ეს ასახვა q-თი და შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$q(a)=1,\ q(b)=2,\ q(c)=3,\ q(d)=4,\ q(e)=5.$

ცხადია, სათანადო გრაფიკული წარმოდგენა უკვე სხვა იქნება (ნახ. 2).

სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვისას ჩვენ ამ სიმრავლეთა ელემენტებისაგან გარკვეულ წყვილებს ვადგენთ — ყოველ a-ს ($a \in A$) თავის $p(A)$ სახესთან ვაწყვილებთ (ცხადია, $p(a) \in B$). ამიტომ ასახვა წყვილთა სიმრავლის სახითაც შეიძლება წარმოვადგინოთ. ზემოთ განხილულ შემთხვევებში სათანადო სიმრავლეებია

$$\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3), (e, 4)\}$$

და

$$\{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (e, 5)\}$$

ორივე — p და q ასახვა, სასრულ სიმრავლეს სასრულზევე ასახავს. მაგრამ შეიძლება უსასრულო სასრულზე ან უსასრულოზეც იყოს ასახული (ეს უკანასკნელი შემთხვევა განსაკუთრებით საინტერესოა). აი, წყვილებით მოცემული ორი სათანადო ასახვა (**N**-ით, როგორც ყოველთვის, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა აღნიშნული):

$$\{(2n-1, 0), (2n, 1) \mid n \in \mathbf{N}\}, \{(n, 2n) \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

ალბათ მიხვდით, რომ პირველი ამ ასახვებიდან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს ორელემენტიან $\{0, 1\}$ სიმრავლეზე ასახავს ისე, რომ ყოველი კენტი რიცხვის სახეა **0**, ლუწისა კი — **1**. მეორე, იმავე სიმრავლეს ლუწ რიცხვთა სიმრავლეზე ასახავს, თანაც ყოველ რიცხვს მის გაორკეცებულს შეუსაბამებს.

სიმრავლეთა ეკვივალენტურობა

დახედეთ კიდევ ერთხელ 1-ელ ნახატს. მასზე A სიმრავლის B-ზე ასახვაა გამოსახული. წარმოიდგინეთ, რომ ისრებს მიმართულებანი შევუცვალეთ. მივიღებთ თუ არა B-ს A-ზე ასახვას? არა, რადგან ასე რომ ყოფილიყო, B-ს ყოველი ელემენტიდან მხოლოდ ერთი ისარი უნდა გამოსულიყო! ახლა, ანალოგიური ვითარება მე-**2** ნახატზე გამოსახული q ასახვისთვის წარმოიდგინეთ. ალბათ მიხვდით, რომ ისრების მიმართულებათა შეცვლით მიიღება B სიმრავლის A-ზე ასახვა.

ამრიგად, p არ არის შექცევადი ასახვა, q კი — არის. შეიძლება ვთქვათ, აგრეთვე, რომ q არის ურთიერთცალსახა ასახვა. დავაზუსტოთ ეს ცნება.

ვთქვათ, A და B ორი, სრულიად ნებისმიერი სიმრავლეა და p არის ისეთი ასახვა A-სი B-ზე, რომ B-ს ყოველი b ელემენტი A-ს ერთსა და მხოლოდ ერთ a ელემენტს შეესაბამება. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ **A სიმრავლე ურთიერთცალსახად არის ასახული**

B სიმრავლეზე. შეიძლება უფრო მოკლედაც ვთქვათ: p **ურთიერთცალსახა ასახვაა**.

ცხადია, „ისრების ენაზე“ ურთიერთცალსახა ასახვა შემდეგს ნიშნავს: A-ს ყოველი ელემენტიდან ერთადერთი ისარი გამოდის და B-ს ყოველ ელემენტთან, ასევე, ერთადერთი ისარი მიდის. რაც შეეხება „წყვილების ენას“, ურთიერთცალსახა ასახვა მოცემულ სიმრავლეთა ელემენტების ისეთ დაწყვილებას გულისხმობს, როცა თითოეული სიმრავლის ყოველი ელემენტი ერთსა და მხოლოდ ერთ წყვილში შედის.

გაიხსენეთ გალილეის მაგალითი, შესავალში რომ მოვიყვანეთ. ადვილი მისახვედრია, რომ აქ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ასახულია სრული კვადრატების

$\{1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ...\}$

სიმრავლეზე, თანაც ურთიერთცალსახად. ასევე, ურთიერთცალსახაა ასახვა, რომელიც ყოველ ნატურალურ რიცხვს მის გაორკეცებულს შეუსაბამებს, ესე იგი, $(n, 2n)$ წყვილებით მოცემული ასახვა.

თუ შესაძლებელია A სიმრავლის ურთიერთცალსახად ასახვა B-ზე, მაშინ ვამბობთ, აგრეთვე, რომ **A სიმრავლე ეკვივალენტურია B სიმრავლისა** და ვწერთ: $A \sim B$.

აღსანიშნავია ეკვივალენტურობის მიმართების შემდეგი სამი, მართლაცდა შესანიშნავი თვისება.

(1) **ეკვივალენტურობის რეფლექსურობა:** ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ეკვივალენტურია: $A \sim A$.

(2) **ეკვივალენტურობის სიმეტრიულობა:** თუ A სიმრავლე ეკვივალენტურია B-სი, მაშინ B-ც ეკვივალენტურია A-სი, ესე იგი, $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$.

(3) **ეკვივალენტურობის ტრანზიტულობა:** თუ A სიმრავლე ეკვივალენტურია B-სი, ეს უკანასკნელი კი C-სი, მაშინ A ეკვივალენტურია C-სი, ესე იგი, $(A \sim B$ და $B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$.

სხვათა შორის, სიმეტრიულობის თვისება უფლებას გვაძლევს ვიხმაროთ ტერმინი ურთიერთეკვივალენტური — თუ A ეკვივალენტურია B-სი მაშინ ხომ B-ც არის A-ს ეკვივალენტური!

ახლა ვიკითხოთ: როდის შეიძლება ორი სასრული სიმრავლე ურთიერთეკვივალენტური იყოს? პასუხი ცხადია: როცა ორივეში ელემენტთა ერთი და იგივე რაოდენობაა. ამრიგად, სასრული სიმრავლე არ შეიძლება თავისი ნაწილის ეკვივალენტური აღმოჩნდეს. რაც შეეხება უსასრულო სიმრავლეებს, აქ სულ სხვა სურათი გვაქვს. ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია ლუწ რიცხვთა სიმრავლისაც და სრული კვადრატების სიმ-

რავლისაც, თუმცა ორივე უკანასკნელი პირველის ნაწილები, ანუ საკუთარი ქვესიმრავლეებია. (მოგაგონებთ, რომ A-ს ეწოდება B-ს ქვესიმრავლე, თუ მისი ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B-საც. ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეც არის. თუკი A არის B-ს ქვესიმრავლე, მაგრამ არ უდრის B-ს, მაშინ ამბობენ, რომ A არის B-ს საკუთარი ქვესიმრავლე).

გავეცნოთ ურთიერთეკვივალენტური სიმრავლეების კიდევ რამდენიმე მაგალითს.

ვაჩვენოთ, რომ მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ სიმრავლე ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია: $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$. მართლაც, ამოვწეროთ ამ სიმრავლეების ელემენტები შემდეგი ცხრილის სახით:

$\mathbf{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...	n	$-n$	...
$\mathbf{N}$	1	2	3	4	5	6	7	...	$2n$	$2n+1$	...

ეს ცხრილი ნათლად გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა დავაწყვილოთ მოცემული სიმრავლეების ელემენტები. წყვილები, როგორც ხედავთ, შემდეგია:

$(0, 1), (n, 2n), (-n, 2n+1), n=1, 2, 3,\ldots$

ახლა ავიღოთ ორი მონაკვეთი: $[0, 1]$ და $[a, b]$. დავამტკიცოთ, რომ პირველი შეიძლება ურთიერთცალსახად ავსახოთ მეორეზე. ამისათვის განვიხილოთ

$$y=a+(b-a)x$$

ფორმულა, სადაც $x \in [0, 1]$. შევამოწმოთ, რომ $y \in [a, b]$.

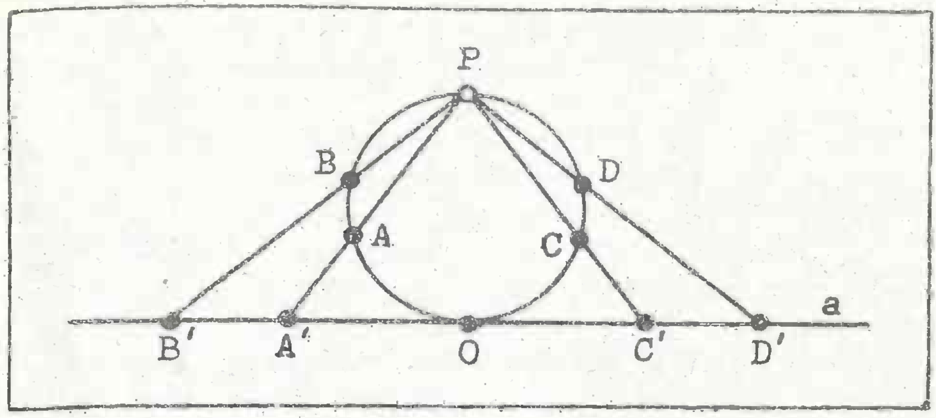
$$x=0 \Rightarrow y=a, \ x=1 \Rightarrow y=b.$$

თუკი x იზრდება 0-დან 1-მდე, მაშინ y, იმის გამო, რომ $b>a$, აგრეთვე იზრდება, თანაც a-დან b-მდე. ამრიგად, $[0, 1]$ ასახულია $[a, b]$-ზე. ეს ასახვა ურთიერთცალსახაა — ყოველი y მხოლოდ ერთ x-ს შეესაბამება. მართლაც,

$$\begin{cases} y=a+(b-a)x_1 \\ y=a+(b-a)x_2 \end{cases} \Rightarrow 0=(b-a)(x_2-x_1) \Rightarrow x_1=x_2$$

რადგან, $b-a \neq 0$. ამრიგად, $[0, 1] \sim [a, b]$.

ეს მაგალითი მეტად საგულისხმოა: $[0, 1]$ მონაკვეთის სიგრძე 1-ის ტოლია, $[a, b]$-სი კი შეიძლება რაგინდ დიდი (პატარა) იყოს. ორ სხვადასხვა სიგრძის მონაკვეთზე წერტილების ერთი და იგივე რაოდენობაა...



ნახ. 3.

აი, კიდევ უფრო საკვირველი მაგალითი. ავიღოთ რაიმე წრეწირი და ამოვაგდოთ მისგან რომელიმე P წერტილი. ამ უკანასკნელის დიამეტრალურად მოპირდაპირე O წერტილზე გავავლოთ წრეწირის a მხები (ნახ. 3).

ვფიქრობ, მიხვდით, როგორ შეიძლება „წერტილამოგდებული" წრეწირის წრფეზე ურთიერთცალსახა ასახვა. მაინც გეტყვით, რომ ამისათვის საკმარისია P წერტილზე (მართალია, ის წრეწირიდან ამოვაგდეთ, მაგრამ სიბრტყეზე ხომ ძევს!) გავავლოთ წრფეები და წრეწირთან მათი გადაკვეთის $A, B, C, D, \ldots$, წერტილები a წრფის $A', B', C', D', \ldots$ წერტილებთან დავაწყვილოთ. რაც შეეხება O წერტილს, ის თავისთავთან დაწყვილდება. მიაქციეთ ყურადღება: წრეწირზე, რომლის რადიუსი შეიძლება რაგინდ მცირე იყოს, იმდენივე წერტილია, რამდენიც მთელს წრფეზე!

სიმრავლეთა შედარება, სიმრავლის სიმძლავრე

ზემოთ ვთქვი, რომ ყოველი ნატურალური რიცხვი არის რაოდენობრივი მახასიათებელი სასრული სიმრავლისა, თანაც არა მხოლოდ ერთისა, არამედ მათი უსასრულო რაოდენობისა. რა მიმართებაში არიან ერთმანეთთან ის სასრული სიმრავლეები, რომელთაც ერთი და იგივე რაოდენობრივი მახასიათებელი აქვთ? პასუხი ცხადია: ეს სიმრავლეები ურთიერთეკვივალენტურია! თუკი ორი სიმრავლე არ არის ურთიერთეკვივალენტური, მაშინ ერთ-ერთი მათგანის ქვესიმრავლეა მეორის ეკვივალენტური და, მაშასადამე, პირველშია, მე-

ტი ელემენტი. ეს შედეგი ბუნებრივად განზოგადდება უსასრულო სიმრავლეებისთვისაც. ვნახოთ, როგორ შეიძლება ამის გაკეთება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი — A და B სიმრავლე. სასრულია თუ არა ეს სიმრავლეები, ამას მნიშვნელობა არა აქვს. ლოგიკურად შემდეგი სამი შესაძლო შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1. A და B ურთიერთეკვივალენტურია.

2. A და B არ არიან ურთიერთეკვივალენტურნი, მაგრამ რომელიმე მათგანის ქვესიმრავლე მეორის ეკვივალენტურია.

3. A და B არ არიან ურთიერთეკვივალენტურნი, ამასთან, თითოეული მათგანის ქვესიმრავლე მეორის ეკვივალენტურია.

თურმე მესამე შემთხვევა შეუძლებელია. საქმე ის არის, რომ თუ მოცემულია ორი სიმრავლე, რომელთაგან თითოეულის ქვესიმრავლე მეორის ეკვივალენტურია, მაშინ ეს სიმრავლეები ურთიერთეკვივალენტურია. ამის დამტკიცება ძნელი არ არის, მაგრამ დამატებით ახალი ცნებების შემოღებას მოითხოვს და ამიტომ არ მომყავს. იმედია, დამიჯერებთ, რომ ეს ასეა.

ამრიგად, დარჩა პირველი ორი შემთხვევა.

თუ $A \sim B$, მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს ერთი და იგივე **სიმძლავრე** აქვთ. მეორე შემთხვევაში A-სა და B-ს სიმძლავრეები განსხვავებულია, ამასთან, მეტი სიმძლავრე იმას მიეწერება, რომლის ქვესიმრავლე მეორის ეკვივალენტურია.

მაგალითად, ტოლი სიმძლავრეები აქვთ $\mathbf{Z}$-სა და $\mathbf{N}$-ს, $\mathbf{N}$-სა და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეს, $[0, 1]$ და $[a, b]$ მონაკვეთებს. ამავე დროს, ცხადია, რომ თითოეული მათგანის სიმძლავრე ნებისმიერი სასრული სიმრავლის სიმძლავრეზე მეტია.

როგორც ხედავთ, სიმძლავრის ცნება არის ბუნებრივი განზოგადება სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობისა.

გავარკვიოთ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი. სახელდობრ, ყველა A სიმრავლისათვის არსებობს თუ არა ისეთი B სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე A-ს სიმძლავრეზე მეტია? თუ A სასრულია, პასუხი დადებითია — საკმარისია B ისე შევარჩიოთ, რომ მასში 1-ით მეტი ელემენტი იყოს, ვიდრე A-ში. თუ A უსასრულოა? აქაც შეიძლება სათანადო B-ს მოძებნა! დავამტკიცოთ ეს. (სხვათა შორის, ქვემოთ ჩატარებული მსჯელობა სასრული A სიმრავლისთვისაც სამართლიანი რჩება. შეამოწმეთ!)

ვთქვათ,

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

და B მისი ქვესიმრავლეების სიმრავლეა:

$$B = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots, \{a, b\}, \ldots, \{a, b, c\}, \ldots\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ B-ს სიმძლავრე A-ს სიმძლავრეზე მეტია. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ შემდეგი ორი რამ:

1. A არ არის B-ს ეკვივალენტური.

2. არსებობს B-ს ქვესიმრავლე, ეკვივალენტური A-სი.

მეორე წინადადების ჭეშმარიტება თითქმის ცხადია. მართლაც, ვთქვათ, B_1 არის B-ს ის ქვესიმრავლე, რომელიც მხოლოდ ერთელემენტიან სიმრავლეებს შეიცავს:

$B_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots\}$.

შევუსაბამოთ A-ს ყოველ x ელემენტს B-ს $\{x\}$ ელემენტი, ესე იგი, შევადგინოთ

$(a, \{a\}), (b, \{b\}), (c, \{c\}), \ldots$

წყვილები, ცხადია, ამით A ურთიერთცალსახად აისახება B_1-ზე. მაშასადამე, $A \sim B_1$.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ A არაა B-ს ეკვივალენტური. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, $A \sim B$. ეს ნიშნავს, რომ შეიძლება A და B სიმრავლეების ელემენტები შემდეგნაირად დავაწყვილოთ: ორივე ამ სიმრავლის ყველა ელემენტი მოხვდება რომელიმე წყვილში და, გარდა ამისა, ყოველი ელემენტი ერთ და მხოლოდ ერთ წყვილში შევა. თუ B სიმრავლის ელემენტებისათვის, ესე იგი, A სიმრავლის ქვესიმრავლეებისათვის $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ აღნიშვნებს შემოვიღებთ, მაშინ რაღაც

$(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), \ldots$

წყვილები გვექნება.

ავიღოთ რომელიმე წყვილი. ვთქვათ, (x, ξ). ვინაიდან x არის A-ს ელემენტი, ξ კი — A-ს ქვესიმრავლე, ამიტომ x ან ეკუთვნის ξ-ს, ან არ ეკუთვნის. პირველ შემთხვევაში x-ს „კარგი" ელემენტი დავარქვათ, მეორეში — „ცუდი". ცხადია, A-ს ყოველი ელემენტი ან „კარგია" ან „ცუდი".

ამრიგად, A შეიძლება ორ ნაწილად გავყოთ: ერთი მხოლოდ „კარგი" ელემენტებისაგან შედგება, მეორე — მხოლოდ „ცუდი" ელემენტებისაგან. ეს უკანასკნელი η-თი აღვნიშნოთ.

ვინაიდან $\eta \in B$, ის აუცილებლად დაწყვილებულია A-ს რომელიღაც y ელემენტთან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ზემოთ დაწერილ წყვილებს შორის არის (y, η) წყვილიც. ახლა ვიკითხოთ, როგორია y ელემენტი — „კარგი" თუ „ცუდი"?

თუ y „კარგია", მაშინ $y \in \eta$, რაც შეუძლებელია რადგან, η მხო-

ლოდ „ცუდ“ ელემენტებს შეიცავს. ამრიგად, y არ შეიძლება „კარგი“ ელემენტი იყოს. მაგრამ... ის არც „ცუდი“ შეიძლება იყოს. მართლაც, ვინაიდან y სწორედ η-სთან არის დაწყვილებული, ჩვენი შეთანხმების ძალით იგი „კარგია“.

მაშასადამე, y არც „კარგია“ და არც „ცუდი“, რაც, ცხადია, შეუძლებელია. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ ჩვენი დაშვება არაა სწორი: A არ არის B-ს ეკვივალენტური. თუ იმასაც გავიხსენებთ, რომ $B_1 \sim A$, ვასკვნით: B სიმრავლის სიმძლავრე A-ს სიმძლავრეზე მეტია.

ამრიგად, ისევე, როგორც არ არსებობს უდიდესი ნატურალური რიცხვი, არც უდიდესი სიმძლავრე არსებობს.

თვლადი სიმრავლეები

როგორც ვნახეთ, ეკვივალენტურობის მიმართება სიმრავლეებს კლასებად ჰყოფს. თითოეული კლასი ურთიერთეკვივალენტური სიმრავლეებისაგან შედგება — მასში გაერთიანებულ ყველა სიმრავლეს ერთი და იგივე სიმძლავრე აქვს. რამდენადაც უდიდესი სიმძლავრე არ არსებობს, მაშასადამე, კლასთა რაოდენობა უსასრულოა.

იმ კლასებს შორის, რომლებიც უსასრულო სიმრავლეებს შეიცავენ, განსაკუთრებით ორი კლასია საინტერესო: ერთი, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა $\mathbf{N}$ სიმრავლეს შეიცავს, მეორე — ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლეს. (ქვემოთ დარწმუნდებით, რომ $\mathbf{R}$-ის სიმძლავრე $\mathbf{N}$-ის სიმძლავრეზე მეტია, ესე იგი, ეს სიმრავლეები სხვადასხვა კლასებშია.)

განვიხილოთ $\mathbf{N}$ სიმრავლის შემცველი კლასი. როგორც ვთქვი, ეს კლასი $\mathbf{N}$-ის ეკვივალენტურ სიმრავლეებს შეიცავს. თითოეულ ამ სიმრავლეს **თვლადი** ეწოდება. ამრიგად, **$\mathbf{A}$ სიმრავლე თვლადია, თუ $\mathbf{A \sim N}$.** ასეთი სიმრავლეების მაგალითები თქვენთვის უკვე ცნობილია: ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, სრული კვადრატების სიმრავლე, მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ სიმრავლე.

სიმრავლის თვლადობა სხვანაირად იმას ნიშნავს, რომ მისი ელემენტები შეიძლება გადავნომროთ, ესე იგი, ის

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

სახით წარმოვადგინოთ.

მართლაც, A თვლადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მისი ყოველი ელემენტი გარკვეულ n ნატურალურ რიცხვთან შეიძლება დავაწყვილოთ. თუ ამ ელემენტს a_n-ით აღვნიშნავთ, ზემოთ მოყვანილ წარმოდგენას მივიღებთ.

თვლადი სიმრავლის თვისებებიდან განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემდეგი ორი:

1. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ქვესიმრავლე კვლავ თვლადია.

2. ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე თვლად ქვესიმრავლეს შეიცავს.

კარგად დაუკვირდით: ეს ორი თვისება გვიჩვენებს, რომ თვლადი სიმრავლე პირველია უსასრულო სიმრავლეთა რიგში — იგი ნებისმიერ სხვა უსასრულო სიმრავლეზე „ნაკლებ" ელემენტს შეიცავს.

დავამტკიცოთ ჩამოყალიბებული თვისებები.

1. ვთქვათ, მოცემულია თვლადი

$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}$

სიმრავლე და B მისი უსასრულო ქვესიმრავლეა. ცხადია B-ს ელემენტებს

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

მიმდევრობაში გარკვეული ადგილები უკავიათ. ამ მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც B-ს ეკუთვნის, b_1-ით აღვნიშნოთ, მეორე — b_2-ით, მესამე — b_3-ით და ასე შემდეგ. რამდენადაც B უსასრულოა, ეს პროცესი, ცხადია, არ შეწყდება, ესე იგი B სიმრავლე

$\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}$

სახით წარმოგვიდგება, რაც მის თვლადობას ამტკიცებს.

2. ვთქვათ, E რაიმე უსასრულო სიმრავლეა. ავიღოთ მისი ნებისმიერი ელემენტი და ის e_1-ით აღვნიშნოთ. ცხადია, E-ში კიდევ დარჩება ელემენტები. უკანასკნელთაგან ავიღოთ რომელიმე და ის e_2-ით აღვნიშნოთ. რადგანაც E მხოლოდ ამ ორი ელემენტით არ ამოიწურება, დარჩენილებიდან კვლავ შეგვიძლია ავიღოთ რომელიმე. აღვნიშნოთ ის e_3-ით. ეს პროცესი გავაგრძელოთ. ვთქვათ, E-დან უკვე აღებულია $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ ელემენტები. მათი ამოგდების შემდეგ E-ში, ცხადია, კიდევ დარჩება ელემენტები (თანაც უსასრულო რაოდენობით!) ავირჩიოთ მათგან ნებისმიერი, რომელიც e_{n+1}-ით აღვნიშნოთ და ასე შემდეგ. მივიღებთ

$F=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots\}$

სიმრავლეს. ცხადია, F თვლადია და, ამავე დროს, E-ს ქვესიმრავლეც არის. ეს თვისებაც დამტკიცებულია.

ზემოთ მე გიჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z}$ თვლადია. მისი ელემენტების გადანომვრა ბუნებრივად და თვალსაჩინოდ ხდება. ამიტომაც $\mathbf{Z}$-ის თვლადობა მეტ-ნაკლებად ადვილად აღიქმება. სამაგიეროდ, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის თვლადობა ყოველთვის გაკვირვებას იწვევს და დაუჯერებელიც კია. ამის მიზეზი ის არის, რომ რაციონა-

ლურ რიცხვთა სიმრავლე, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, მკვრივია — ნებისმიერ ორ, არატოლ რაციონალურ რიცხვს შორის რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეა მოთავსებული. არ გინდა დაიჯერო, რომ ასე მკვრივად დალაგებულ რიცხვთა გადანომვრა შესაძლებელია... არ გვჯერა, მაგრამ რას იზამ, — ფაქტი ჯიუტია! მაშ ასე, დავამტკიცოთ, რომ $\mathbf{Q}$ თვლადი სიმრავლეა.

ვთქვათ, m და n ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია. განვიხილოთ 2^m3^n სახის რიცხვთა სიმრავლე. იგი, როგორც ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე, თვლადია. თუ ყოველ 2^m3^n რიცხვს დადებით უკვეც m/n წილადს შევუსაბამებთ, მივიღებთ A სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვას დადებით რაციონალურ რიცხვთა $\mathbf{Q}^+$ სიმრავლეზე. ამრიგად, $\mathbf{Q}^+$ თვლადია:

$$\mathbf{Q}^+=\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots\}.$$

ახლა, $\mathbf{Q}$-ს თვლადობის დასამტკიცებლად ეს სიმრავლე

$$\mathbf{Q}=\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \ldots, r_n, -r_n, \ldots\}$$

სახით წარმოვადგინოთ და ისევე მოვიქცეთ, როგორც $\mathbf{Z}$-ის $\mathbf{N}$-ზე ასახვისას — შევადგინოთ შემდეგი წყვილები:

$$(0, 1), (r_n, 2n), (-r_n, 2n+1), n=1, 2, 3, \ldots.$$

არათვლადი სიმრავლეები

თვლად სიმრავლეებს გარდა არსებობს არათვლადი სიმრავლეებიც. მათ რიცხვს მიეკუთვნება, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლე. ამ სიმრავლის არათვლადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მას აქვს ერთი მაინც არათვლადი ქვესიმრავლე. ასეთად შეიძლება ავიღოთ $\mathbf{0}$-სა და $\mathbf{1}$-ს შორის მოთავსებულ ნამდვილ რიცხვთა $\triangle$ სიმრავლე. დავუშვათ საწინააღმდეგო; ვთქვათ, $\triangle$ თვლადია, ესე იგი, მისი ელემენტები გადანომრილია:

$$\triangle=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

თქვენ ალბათ იცით, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო — პერიოდული ან არაპერიოდული ათწილადის სახით. ამასთანავე, თუ ეს ათწილადი პერიოდულია, მისი პერიოდი მხოლოდ 9-იანებისაგან არ შედგება. რამდენადაც ყველა a_k დადებითი, 1-ზე ნაკლები ნამდვილი რიცხვია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_1=0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots\alpha_{1n}\ldots,$$
$$a_2=0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots\alpha_{2n}\ldots,$$

$a_3=0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots\alpha_{3n}\ldots$,

. . . .

$a_n=0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots\alpha_{nn}\ldots$,

. . . . ,

სადაც $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13},\ldots,\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23},\ldots,\alpha_{n1},\alpha_{n2},\alpha_{n3},\ldots$ რაღაც ციფრებია.

ახლა, ვთქვათ, $\beta_1, \beta_2, \beta_3,\ldots, \beta_n,\ldots$ ციფრები ისეა შერჩეული, რომ

$\beta_1\neq\alpha_{11},\ \beta_2\neq\alpha_{22},\ \beta_3\neq\alpha_{33},\ldots,\ \beta_n\neq\alpha_{nn},\ldots$

და არც ერთი მათგანი არაა არც **0** და არც **9.** დამეთანხმეთ, ასეთი β-ების შერჩევა ყოველთვის შეიძლება. განვიხილოთ

$b=0,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ldots\beta_n\ldots$

რიცხვი. რა თქმა უნდა, $0<b<1$ და, მაშასადამე, $b\in\triangle$. ამასთანავე, ის არც ერთ α_k-ს არ უდრის, ვინაიდან α_1-საგან პირველი ათწილადი ნიშნით განსხვავდება, α_2-საგან მეორე ათწილადი ნიშნით, α_3-საგან მესამეთი და, საზოგადოდ, α_n-საგან n-ური ათწილადი ნიშნით.

ამრიგად, $b\in\triangle$ და $b\neq a_k\,(k=1,2,3,\ldots)$. გამოდის, რომ b ერთდროულად ეკუთვნის კიდეც და არც ეკუთვნის $\triangle$-ს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, $\triangle$ არ შეიძლება თვლადი იყოს, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არათვლადობის ეს ორიგინალური დამტკიცება კანტორს ეკუთვნის.

როგორც ხედავთ, **R**-ის სიმძლავრე **N**-ის სიმძლავრეზე მეტია. მას კონტინუუმის სიმძლავრეს უწოდებენ (ლათინური სიტყვიდან *continuum* — უწყვეტი), ხოლო ამ სიმძლავრის ყველა სიმრავლეს — კონტინუალურ სიმრავლეს.

კონტინუუმის პრობლემა

კანტორს, თვლადი და კონტინუალური სიმრავლეების აღმოჩენისთანავე, დაებადა კითხვა: არსებობს თუ არა საშუალედო სიმრავლე, ესე იგი ისეთი, რომლის სიმძლავრე თვლადი სიმრავლის სიმძლავრეზე მეტია და კონტინუალურის სიმძლავრეზე ნაკლები? სხვანაირად: არსებობს თუ არა **R**-ის ისეთი უსასრულო ქვესიმრავლე, რომელიც არც **N**-ის ეკვივალენტურია და არც **R**-ისა?

მიუხედავად მრავალი ცდისა, კანტორმა ასეთი სიმრავლის არსებობის დადგენა ვერ შეძლო. იგი საბოლოოდ იმ დასკვნამდე მივიდა, რომ ამ თვისების მქონე სიმრავლე არ შეიძლება არსებობდეს. კანტორის ამ ვარაუდმა „კონტინუუმ-ჰიპოთეზის" სახელწოდება მიიღო. მან მალე მიიპყრო სპეციალისტთა ყურადღება. განსაკუთრებით გა-

ფართოვდა ინტერესი კონტინუუმ-ჰიპოთეზის მიმართ 1900 წელს პარიზში მოწვეულ მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესის შემდეგ. ამ კონგრესზე დავიდ ჰილბერტმა (1862 — 1943) წაიკითხა მოხსენება — „მათემატიკური პრობლემები“. ჰილბერტის მოხსენებაში ჩამოყალიბებული იყო 23 პრობლემა, რომლებიც, თითქოსდა, XIX საუკუნემ „გადაულოცა“ XX-ს. პირველი ამ პრობლემათა შორის სწორედ კანტორის ჰიპოთეზა იყო. ჰილბერტი მოუწოდებდა მათემატიკოსებს დადებითი ან უარყოფითი პასუხი გაეცათ მასზე.

არა ერთი და ორი მეცნიერი ფიქრობდა ამ პრობლემაზე. მიღებული იყო სხვადასხვა მეტ-ნაკლებად მნიშვნელოვანი შედეგი, მაგრამ საბოლოო პასუხი არ ჩანდა. და აი, ოცდაათიან წლებში ავსტრიელმა ლოგიკოსმა და მათემატიკოსმა კურტ გიოდელმა (1906 — 1978) დაამტკიცა კონტინუუმ-ჰიპოთეზის არაწინააღმდეგობრიობა — მან აჩვენა, რომ თუ აქსიომათა იმ სისტემას, რომლითაც სიმრავლეთა თეორია სარგებლობს, ამ ჰიპოთეზას დავუმატებთ, არავითარ წინააღმდეგობას არ მივიღებთ. ეს იყოს კანტორის პრობლემის სანახევროდ გადაწყვეტა... მართლაც, გიოდელის შედეგი ნიშნავს, რომ კონტინუუმ-ჰიპოთეზის უარყოფა არ შეიძლება.

სამი ათეული წელი დასჭირდა პრობლემის მეორე ნახევრის გადაწყვეტას. 1963 წელს ახალგაზრდა ამერიკელმა მათემატიკოსმა პოლ კოენმა (დაიბადა 1934 წ.) დაამტკიცა, რომ, თუ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომათა სისტემას კონტინუუმ-ჰიპოთეზის უარყოფას დავუმატებთ, არც მაშინ მიიღება წინააღმდეგობა. ეს თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ კონტინუუმ-ჰიპოთეზის დამტკიცება არ შეიძლება...

ამრიგად, კონტინუუმის პრობლემა საბოლოოდ გადაწყდა, თუმცა არა ისე, როგორც ამას ჰილბერტი მოელოდა. შედეგი, რა თქმა უნდა, უცნაურია — არის წინადადება, რომლის არც ჭეშმარიტების დადგენა შეიძლება და არც მცდარობისა. მაგრამ მსგავსი ვითარება მათემატიკაში ადრეც ყოფილა, ევკლიდეს ცნობილ მეხუთე პოსტულატთან დაკავშირებით...

გიოდელისა და კოენის შედეგები გვიჩვენებენ, რომ სიმრავლეთა ორი თეორია არსებობს — სტანდარტული და არასტანდარტული. ამასთან, არც ერთი მათგანი წინააღმდეგობრივი არ არის. შევნიშნავ, რომ სიმრავლეთა არასტანდარტული თეორიის აღმოჩენა ჩვენი საუკუნის მათემატიკის ერთ-ერთი უბრწყინვალესი მიღწევაა...

ლეონარდ ეილერი
(1707 — 1783)

ეილერის თეორემა

მინდა გაგაცნოთ გეომეტრიის ერთი შესანიშნავი თეორემა — ეილერის თეორემა, რომელიც ამყარებს კავშირს მრავალწახნაგას წვეროების რიცხვსა, წიბოების რიცხვსა და წახნაგების რიცხვს შორის. მაგრამ სანამ უშუალოდ თეორემაზე საუბარს დავიწყებდე, უნდა წარმოგიდგინოთ მისი ავტორი — XVIII საუკუნის უდიდესი მათემატიკოსი ლეონარდ ეილერი.

ეილერი მეცნიერთა იმ კატეგორიას ეკუთვნის, რომელთა სახელი თითქმის ყველა განათლებულ ადამიანს გაუგონია. ხოლო რაც შეეხება სპეციალისტებს — მათემატიკოსებს, ფიზიკოსებს, მექანიკოსებს, ასტრონომებს, თითოეულ მათგანს სწავლების ამა თუ იმ საფეხურზე შეხვედრია ეილერის კუთხეები, ეილერის ჩასმები, ეილერის ფორმულები, ეილერის ინტეგრალები, ეილერის თეორემა, ეილერის მუდმივა, ეილერის ფუნქცია და ასე შემდეგ და ასე შემდეგ... მათემატიკის ისტორიაში მეთვრამეტე საუკუნე ეილერის საუკუნედაა აღიარებული — არ დარჩენილა ამ მეცნიერების არც ერთი დარგი, რომლის განვითარებაში მას თავისი წვლილი არ შეეტანოს.

ეილერი დაიბადა 1707 წელს შვეიცარიის ქალაქ ბაზელში. აქვე დაამთავრა უნივერსიტეტი, სადაც ღვთისმეტყველებასა და ძველ

ენებს სწავლობდა, პარალელურად კი გამოჩენილი მათემატიკოსის იოჰან ბერნულის ლექციებს ისმენდა. უკანასკნელმა მალე შეამჩნია მისი ახალგაზრდა მსმენელის მიდრეკილება მათემატიკისადმი და დასთანხმდა მისთვის კვირაში დამატებით ერთი გაკვეთილი ჩაეტარებინა. ეილერი დაუახლოვდა თავისი მასწავლებლის შვილებს — შემდგომში ცნობილ მათემატიკოსებს — ნიკოლაისა და დანიელს, რომლებიც 1726 წელს პეტერბურგის აკადემიის მიწვევით რუსეთს გაემგზავრნენ. ძმები შეჰპირდნენ ეილერს — რეკომენდაციას გაგიწევთ და შენც ჩვენთან იქნებიო. მართლაც, ერთი წლის შემდეგ აკადემიამ ეილერიც მიიწვია.

პეტერბურგს ჩასვლისთანავე ეილერმა დაიწყო ინტენსიური კვლევითი მუშაობა, რომელიც სიცოცხლის ბოლომდე არ შეუწყვეტია. მისი ძირითადი ინტერესები თუმც კი მათემატიკის ირგვლივ იყრიდა თავს, იგი იძულებული იყო აკადემიისა და მთავრობის დავალებით არცთუ იშვიათად სხვა საკითხების კვლევაზეც გადასულიყო.

რუსეთში ყოფნის მერვე წელს ეილერს დიდი უბედურება დაატყდა თავს — მან ცალ თვალში მხედველობა დაკარგა. ამის მიზეზი კი ის იყო, რომ გამოთვლები, რომელთა შესრულებისათვის სხვებმა რამდენიმე თვე მოითხოვეს, ეილერმა სამ (!) დღეში შეასრულა. საერთოდ, ეილერი უბადლო გამომთვლელი იყო. „იგი ითვლიდა ყოველგვარი ძალდატანების გარეშე, როგორც ადამიანი სუნთქავს ანდა არწივი ჰაერში ლივლივებს" (არაგო). ამასთანავე, გასაოცარი მეხსიერების წყალობით ბევრ გამოთვლას იგი ზეპირად ასრულებდა. გადმოცემით, ეილერის ორმა სტუდენტმა, რომლებიც საკმაოდ რთული სახის შესაკრებთა ჯამს ითვლიდნენ, სხვადასხვა პასუხი მიიღეს — განსხვავება 50-ე ნიშანში იყო. დავის გადასაწყვეტად მათ თავიანთ მასწავლებელს მიმართეს. ეილერმა მთელი გამოთვლა ზეპირად (!) ჩაატარა და ზუსტი პასუხიც მიიღო.

მხედველობის დაკარგვა, თუნდაც ნაწილობრივი, მართლაც დიდი უბედურებაა, მაგრამ ეილერმა ეს არად ჩააგდო — მას ერთი წუთითაც არ შეუწყვეტია კვლევა-ძიება. მისთვის მთავარი იყო წყნარი ცხოვრება, რაც მუშაობაში ხელს არ შეუშლიდა. ამავე დროს რუსეთში სულ უფრო მეტად იგრძნობოდა პოლიტიკური ცხოვრების არამყარობა და ეს, რაღა თქმა უნდა, მეცნიერის სიმშვიდესაც არღვევდა. ამიტომ მან გადაწყვიტა ბოლოს და ბოლოს მიეღო ფრიდრიხ დიდის წინადადება — გამხდარიყო ბერლინის აკადემიის წევრი და გერმანიაში გადასულიყო. და აი, 1741 წლის ზაფხულს ეილერი ბერლინს გაემგზავრა, თუმცა პეტერბურგის აკადემიასთან კავშირი არ გაუწყ-

ვეტია — მის საპატიო წევრად დარჩა. იგი შესანიშნავად უთავსებდა მუშაობას ორივე აკადემიაში — თითქმის თანაბრად აქვეყნებდა შრომებს მათ გამოცემებში.

მთელი 25 წელი დაჰყო ეილერმა ბერლინში. შემდეგ კვლავ პეტერბურგში დაბრუნდა, სადაც დარჩა კიდეც სიცოცხლის ბოლომდე — 1783 წლამდე. იგი ისევ ჩვეული ინტენსივობით მუშაობს და თუმცა სულ მალე მხედველობა სრულიად დაკარგა, მისი შრომისუნარიანობა არამცთუ არ შემცირებულა, პირიქით — გაიზარდა კიდეც!? ამაზე მეტყველებს ასეთი, თითქმის დაუჯერებელი ფაქტი: მხოლოდ 1777 წელს ეილერმა თავის მდივანთან ერთად ასამდე სამეცნიერო სტატია მოამზადა. ამ რიცხვმა არ შეიძლება არ გაგვაოცოს — ეს ხომ კვირაში ორ სტატიას ნიშნავს!

ეილერმა უმდიდრესი მემკვიდრეობა დაუტოვა შთამომავლობას. მისი შრომების რიცხვი 900-მდე აღწევს. მათ შორის რამდენიმე ათეული სქელტანიანი წიგნია, რომელთაგან ბევრს დღესაც არ დაუკარგავს თავისი მნიშვნელობა. ეილერი ხუმრობდა თურმე — იმდენ შრომას დავტოვებ, აკადემიურ ჟურნალს 20 წელი ეყოფათ. მაგრამ... მეცნიერი შეცდა: მისი გარდაცვალების შემდეგ გამოუქვეყნებელ თხზულებათა ბეჭდვას თითქმის 80 წელი მოუნდა! აქ ისიც უნდა აღინიშნოს, რომ მათემატიკის ბევრი სხვა კლასიკოსისაგან განსხვავებით, ეილერი წერდა მეტად ნათლად და გასაგებად, მის შრომებში კარგად ჩანს ძირითადი იდეები, რომლებითაც ავტორი ხელმძღვანელობს. როცა ეილერის წიგნებს კითხულობ, ისეთი შთაბეჭდილება გექმნება, თითქოს მათი ავტორი შენი თანამედროვეა...

ეილერი უდიდესი ავტორიტეტია ყველა მათემატიკოსისათვის. „თუ თქვენ ნამდვილად გიყვართ მათემატიკა, იკითხეთ ეილერი" — ამბობდა ლაგრანჟი. იგივე აზრს ავითარებს ლაპლასი, რომელიც ახალგაზრდა მათემატიკოსებს ურჩევდა: „იკითხეთ ეილერი, იკითხეთ ეილერი, ის ჩვენი საერთო მასწავლებელია". არანაკლებ კატეგორიულია ყველა დროის ერთ-ერთი უდიდესი მათემატიკოსი გაუსიც: „ეილერის შრომების შესწავლა საუკეთესო სკოლად რჩება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში და მას ვერაფერი შეცვლის".

ეილერმა 1758 წელს დამტკიცა ერთი საინტერესო და, როგორც შემდეგში გამოირკვა, მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა მრავალწახნაგების შესახებ. სწორედ ეს თეორემაა ჩვენი საუბრის საგანი.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ამოზნექილი მრავალწახნაგა. აღვნიშნოთ მისი წვეროების, წიბოების და წახნაგების რიცხვი შესაბამისად A-თი, B-თი და C-თი. ეილერის თეორემა ამტკიცებს, რომ

$$A - B + C = 2. \qquad (E)$$

გავეცნოთ დამტკიცებას.

წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენი მრავალწახნაგა ელასტიკური მასალისაგან, მაგალითად, რეზინისაგან არის დამზადებული და თანაც ღრუა. მოვაშოროთ მას ერთი წახნაგი. მივიღებთ — მოდით, ასე დავარქვათ მას — ღია მრავალწახნაგას, რომლის წვეროების რიცხვი კვლავ A იქნება, წიბოებისა — B, ხოლო წახნაგებისა — C', სადაც $C' = C - 1$. ახლა, თუკი მოვახერხებთ იმის ჩვენებას, რომ

$$A - B + C' = 1, \qquad (1)$$

ცხადია, (E) ტოლობა დამტკიცებული იქნება.

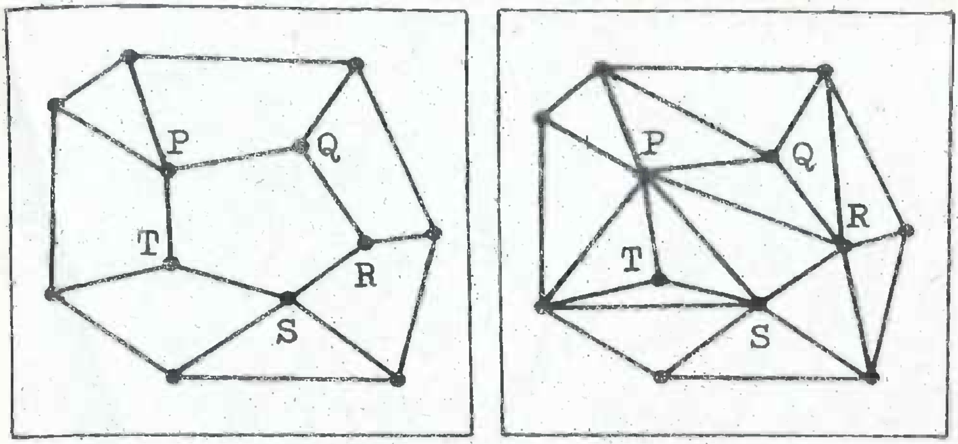
ავიღოთ ეს ჩვენი ღია მრავალწახნაგა და სიბრტყეზე გავშალოთ (ის ხომ რეზინისაგან არის დამზადებული!). მივიღებთ მრავალკუთხედებისაგან შედგენილ გარკვეულ ფიგურას (ნახ. 1). ამასთანავე, ცხადია, რომ ღია მრავალწახნაგას წახნაგები ამ ფიგურის შემადგენელი მრავალკუთხედებია, წიბოები — მრავალკუთხედების გვერდები, ხოლო წვეროები — კვლავ წვეროები, ოღონდ არა მრავალწახნაგასი, არამედ მრავალკუთხედებისა. მაგალითად, **PQRST** ხუთკუთხედი არის რომელიღაც წახნაგის სახე, მისი **PQ**, **QR**, **RS**, **ST** და **TP** გვერდები — წიბოების სახეები, **P**, **Q**, **R**, **S** და **T** წვეროები კი მრავალწახნაგას წვეროების სახეები.

მკითხველმა შესაძლოა იკითხოს: „სიბრტყეზე განფენისას წახნაგის ფორმა ხომ შეიცვლება, სხვა თუ არაფერი, წიბოები გამრუდდება და მრავალკუთხედებს როგორღა მივიღებთ?" რა მეთქმის, — სწორი შენიშვნაა! მართლაც, მრავალკუთხედებს კი არა, ეგრეთ წოდებულ მრუდწირულ მრავალკუთხედებს მივიღებთ. წიბოები, საზოგადოდ, მრუდე ხაზების სახით წარმოგვიდგება... მაგრამ ეს სრულიადაც არ გვაშინებს და აი რატომ: ჩვენი ღია მრავალწახნაგა ხომ რეზინისაგან არის დამზადებული და, მაშასადამე, ეს მრუდე ხაზები შეგვიძლია, ყოველ შემთხვევაში ჩვენს წარმოდგენაში, გავასწოროთ — მონაკვეთებად ვაქციოთ. მაშინ კი, დამეთანხმეთ, სწორედ ჩვეულებრივი მრავალკუთხედებისაგან შედგენილ ფიგურას მივიღებთ, აი იმის მაგვარს, 1-ელ ნახაზზე რომ არის გამოსახული.

ცხადია, რომ ამ ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურისათვის

$$A - B + C' \qquad (2)$$

გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა იგივეა, რაც ღია მრავალწახნაგასათვის. ამიტომაც, მთელი ჩვენი შემდგომი მსჯელო-

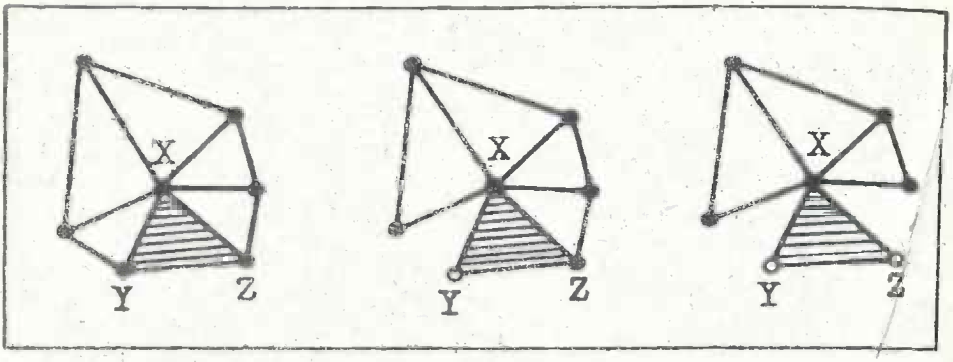


ბა საკმარისია სიბრტყეზე განფენილი ამ ფიგურისათვის წარვმართოთ — დავამტკიცოთ, რომ მისთვის სამართლიანია (1) ტოლობა.

მიღებული ფიგურა, როგორც ვთქვით, მრავალკუთხედებისაგან შედგება. ზოგიერთი ამ მრავალკუთხედიდან შეიძლება სამკუთხედი იყოს (თუ ღია მრავალწახნაგას აქვს სამკუთხა წახნაგები), ზოგი კი — არა. ჰოდა, უპირველეს ყოვლისა, უკანასკნელი სახის თითოეული მრავალკუთხედი სამკუთხედებად დავყოთ (ნახ. 2). სხვათა შორის, ამ პროცესს, მათემატიკაში ტრიანგულაციას უწოდებენ (ლათ. ***triangulum*** — სამკუთხედი). ვაჩვენოთ, რომ ამ დროს (2) გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა არ იცვლება.

მართლაც, ავიღოთ, მაგალითად, იგივე $PQRST$ ხუთკუთხედი. მასში PR დიაგონალის გავლებით თავად ეს „წახნაგი" ორად გაიყოფა, ესე იგი, C' რიცხვი 1-ით გაიზრდება. მაგრამ, ცხადია, რომ B რიცხვიც 1-ით გაიზრდება — „წიბო" ხომ ერთით მეტი გვექნება. ესე იგი, (1) გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ანალოგიური ვითარება გვექნება თუ PS დიაგონალს გავავლებთ — $PRST$ ოთხკუთხედი ორ სამკუთხედად გაიყოფა და ერთი — PS „წიბო" მოგვემატება. ამრიგად, ახლა უკვე მე-2 ნახაზზე გამოსახული ფიგურისათვის (2) გამოსახულებას იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა აქვს, რაც ღია მრავალწახნაგასათვის ჰქონდა და, მაშასადამე, ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ტრიანგულირებული ფიგურისათვის $A-B+C'=1$.

ამისათვის დავიწყოთ მიღებული სამკუთხედების მიმდევრობით ჩამოშორება. აქ სულ სამი შემთხვევა შეიძლება წარმოგვიდგეს: სახელდობრ, ჩამოსაშორებელი სამკუთხედის მხოლოდ ერთი გვერდი



ნახ. 3

ეკუთვნის ფიგურის საზღვარს (ჩამოშორებას, ასე ვთქვათ, სასაზღვრო სამკუთხედებით ვიწყებთ), ორი გვერდი ეკუთვნის საზღვარს და სამივე გვერდი ეკუთვნის საზღვარს. სამივე შესაძლო შემთხვევა მე-3 ნახაზზეა წარმოდგენილი.

პირველ შემთხვევაში ტრიანგულირებულ ფიგურას ერთ — XYZ სამკუთხედს ვაშორებთ და მასთან ერთად ერთ — YZ გვერდს. (სამივე X, Y, Z წვერო მომიჯნავე სამკუთხედებთან ერთად კვლავ ფიგურას მიეკუთვნება). შეიცვლება თუ არა (2) გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა? არა, არ შეიცვლება. მართლაც, 1-ით შემცირდება როგორც C', ისევე B!

თუ XYZ სამკუთხედს საზღვართან ორი გვერდი აქვს საერთო, მაშინ ამ სამკუთხედს „გაჰყვება" ორი — XY, YZ გვერდი და ერთი — Y წვერო, ესე იგი C' რიცხვი 1-ით შემცირდება, B რიცხვი 2-ით, A რიცხვი კი 1-ით. გამოდის, რომ (1) გამოსახულება რიცხვით მნიშვნელობას არც ახლა იცვლის!

დაბოლოს, თუ XYZ სამკუთხედის სამივე გვერდი ფიგურის საზღვარს ეკუთვნის, მაშინ ეს სამკუთხედი თან „გაიყოლებს" სამივე — XY, YZ, ZX გვერდს და ორ — Y და Z წვეროს. C' შემცირდება 1-ით, B რიცხვი 3-ით, A კი 2-ით. როგორც ხედავთ, $A-B+C'$ გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა არც ამ შემთხვევაში იცვლება!

ამრიგად, სამკუთხედების თანდათანობითი ჩამოშორებით (2) გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა უცვლელი რჩება. ბოლოს დარჩება ერთი სამკუთხედი, რომლისთვისაც

$$A=3,\ B=3,\ C'=1,$$

ესე იგი,

$$A-B+C'=1.$$

ამრიგად, (1) და მასთან ერთად (E) ტოლობაც დამტკიცებულია.

ახლა ვნახოთ, როგორ შეიძლება ეილერის თეორემაზე დაყრდნობით დავადგინოთ, თუ რამდენი და რა სახის წესიერი მრავალწახნაგა არსებობს.

მოგაგონებთ, რომ ამოზნექილ მრავალწახნაგას წესიერი ეწოდება, თუ მისი ყველა წახნაგი ერთმანეთის კონგრუენტული ანუ ტოლი წესიერი მრავალკუთხედია და, გარდა ამისა, მრავალწახნაგას თითოეულ წვეროსთან წიბოთა ერთი და იგივე რაოდენობა იყრის თავს.

ჯერ კიდევ ძველი ბერძნები იცნობდნენ ხუთ წესიერ მრავალწახნაგას. ესენია:

ტეტრაედრი — წესიერი ოთხწახნაგა ან, რაც იგივეა, წესიერი სამკუთხა პირამიდა.

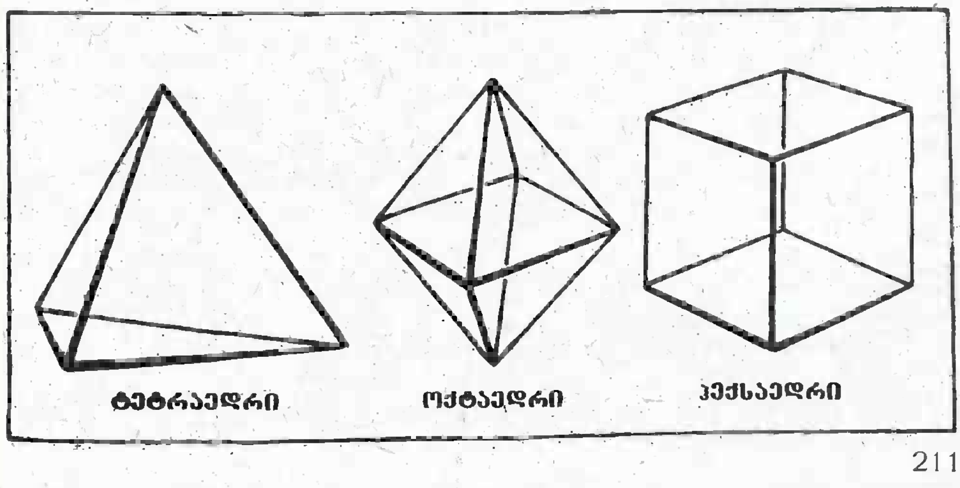
ოქტაედრი — წესიერი რვაწახნაგა, რომელიც მიიღება, თუ ფუძეებით მივადგამთ ერთმანეთს ორ ერთნაირ წესიერ ოთხკუთხა პირამიდას, რომელთა წახნაგები ტოლგვერდა სამკუთხედებია.

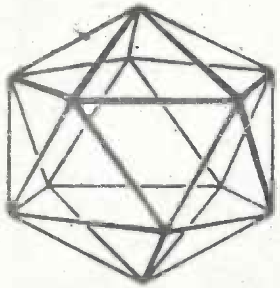
ჰექსაედრი — წესიერი ექვსწახნაგა ან, როგორც მას ჩვეულებრივად ვუწოდებთ, **კუბი**.

იკოსაედრი — წესიერი ოცწახნაგა, მისი წახნაგები ტოლგვერდა სამკუთხედებია.

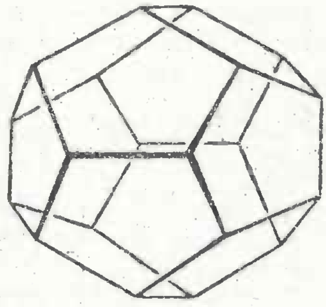
დოდეკაედრი — წესიერი თორმეტწახნაგა, რომლის წახნაგები წესიერი ხუთკუთხედებია.

მრავალწახნაგათა მოყვანილი სახელწოდებანი ბერძნულია — ამ ენის ორი სიტყვის შერწყმით არის მიღებული. მაგალითად, ოქტაედრი = ოქტა + ედრი. პირველი „შესაკრები“, ესე იგი ოქტა, ნიშნავს რვას (გაიხსენეთ მუსიკაში: ოქტავა), მეორე (ედრი) ფუძეს, ზედაპირს, გვერდს. როგორც ხედავთ, ქართული (და აგრეთვე რუსული) სახელ-





იკოსაედრი



დოდეკაედრი

წოდებანი მრავალწახნაგებისა ზუსტად ბერძნულის მსგავსად გვაქვს შემოღებული...

არსებობს თუ არა სხვა რომელიმე წესიერი მრავალწახნაგა? არა, არ არსებობს და ეს, როგორც ზემოთ ვთქვი, შეიძლება ეილერის თეორემის მოშველიებით დავამტკიცოთ, თანაც ძალიან ადვილად.

მართლაც, ვთქვათ, წესიერი მრავალწახნაგას თითოეული წახნაგი არის წესიერი n-კუთხედი და ყოველ წვეროსთან m წიბო იყრის თავს. ცხადია, რომ არც ერთი ეს რიცხვი არ შეიძლება 3-ზე ნაკლები იყოს — წახნაგი სულ ცოტა სამკუთხედი მაინც უნდა იყოს და წვეროდან სულ ცოტა სამი წიბო მაინც უნდა გამოდიოდეს! რადგან ყოველ წახნაგს n გვერდი აქვს და თითოეული მათგანი ერთდროულად ორ წახნაგს ეკუთვნის, ამიტომ წიბოების გაორკეცებული რაოდენობაა nC, ესე იგი,

$$nC = 2\,B.$$

შემდეგ, თითოეული წვეროდან m წიბო გამოდის და, მაშასადამე, mA წიბოთა გაორკეცებული რაოდენობაა — ყოველ წიბოს ხომ ორი წვერო ეკუთვნის! ამრიგად, გვაქვს:

$$mA = 2\,B.$$

თუ უკანასკნელი ორი ტოლობიდან A-სა და C-ს განვსაზღვრავთ და მათ მნიშვნელობებს (E) ტოლობაში ჩავსვამთ, სულ ელემენტარული გარდაქმნით მივიღებთ:

$$B = \frac{2mn}{2m+2n-mn}.$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ 3-ზე არანაკლები ისეთი m და n, რომ

$$\frac{2\,mn}{2m+2n-mn} \qquad (3)$$

გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა მთელი დადებითი რიცხვი იყოს.

ვთქვათ, $m=3$. მაშინ

$$\frac{2mn}{2m+2n-mn}=\frac{6n}{6-n}=\frac{6(n-6)+36}{6-n}=-6+\frac{36}{6-n},$$

საიდანაც ჩანს, რომ n ცვლადმა (გაგახსენებთ, რომ $n\geqslant 3$) შეიძლება მიიღოს მხოლოდ შემდეგი სამი მნიშვნელობა: 3, 4, 5. მაშინ A, B და C-სათვის გვაქვს შესაბამისად:

$A=4,\quad B=6,\quad C=4,$

$A=8,\quad B=12,\quad C=6,$

$A=20,\quad B=30,\quad C=12.$

ამრიგად, ამ შემთხვევებში მივიღებთ: ტეტრაედრს, ჰექსაედრს ანუ კუბს და დოდეკაედრს.

თუ $m=4$, ანალოგიური გარდაქმნით სულ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\frac{2mn}{2m+2n-mn}=-4+\frac{8}{2-n}.$$

აქედან ჩანს, რომ ჩვენთვის სასურველი მნიშვნელობა n-ისა არ არსებობს. მსგავსი ვითარება გვაქვს, თუ $m>4$.

რამდენადაც (3) გამოსახულება m-სა და n-ს სიმეტრიულად შეიცავს, ამიტომ ცხადია, რომ n-ისათვის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა გამოგვადგება: $n=3$. მისთვის m არის 3, 4 ან 5. რაც შეეხება A-სა, B-სა და C-ს, მათთვის გვაქვს:

$A=4,\quad B=6,\quad C=4,$

$A=6,\quad B=12,\quad C=8,$

$A=12,\quad B=30,\quad C=20.$

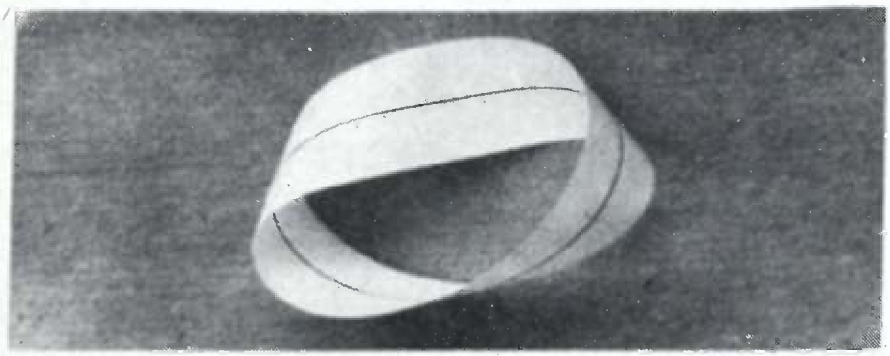
ძნელი მისახვედრი არ არის, რომ პირველ შემთხვევაში კვლავ ტეტრაედრს მივიღებთ, მეორეში — ოქტაედრს, ხოლო მესამეში — იკოსაედრს.

მიღებული შედეგი წარმოვადგინოთ შემდეგი ცხრილის სახით (კიდევ ერთხელ შეგახსენებთ, რომ m არის წიბოთა რაოდენობა მრავალწახნაგას თითოეულ წვეროსთან, n — თითოეული წახნაგის

გვერდების რიცხვი, A — მრავალწახნაგას წვეროების, B — წი
ბის, C — წახნაგების რაოდენობა).

მრავალწახნაგას ტიპი	m	n	A	B
ტეტრაედრი	3	3	4	6
ოქტაედრი	4	3	6	12
ჰექსაედრი (კუბი)	3	4	8	12
იკოსაედრი	5	3	12	30
დოდეკაედრი	3	5	20	30

როგორც ხედავთ, ძველი ბერძნები ყველა წესიერ მრავალწა
გას იცნობდნენ...



რას მივიღებთ, თუ მებიუსის ზედაპირს შუაში გამავალი ჩაკეტილი ხაზის გასწვრივ გავჭრით? ალბათ, ფიქრობთ, რომ ორ რგოლს ... სცდებით! — მებიუსის ზედაპირი არ დაიშლება — მივიღებთ ერთ რგოლს! დარწმუნდით თავად, რომ ეს ასეა.

გჯერათ თუ არა, რომ 2+3=0?

რა ბრძანეთ? უცნაური სათაურიაო?... არ უარვყოფ, იქნებ ასეც არის. თუმცა... რატომ „იქნებ“? ნამდვილად ასეა! მაგრამ, ნუ იფიქრებთ, რომ ვხუმრობ. არა, სრულიად სერიოზულად გეკითხებით: გჯერათ თუ არა, რომ $2+3=0$? ალბათ მაინც გეღიმებათ და გუნებაში ამბობთ: „განა ასეთი შეკითხვის მოცემა შეიძლება? აბა, ვინ დაიჯერებს, რომ $2+3$ ჯამი ნულს უდრის?“ მერწმუნეთ, არ გამტყუნებთ. არ გამტყუნებთ, რადგან თავის დროზე მეც თქვენსავით განცვიფრებული ვიყავი — არა და არ მჯეროდა $2+3=0$ ტოლობის ჭეშმარიტება. დიახ, ასე იყო, მაგრამ... მალე იძულებული (!) გავხდი დამეჯერებინა. ის კი არა, ახლა თქვენი დაჯერებაც მწადია. მეტიც, — მინდა გასწავლოთ კიდეც, როგორ უნდა დაასაბუთოთ არა მარტო $2+3=0$, არამედ $6+7=3$, $9+2=1$, $2\cdot5=3$, $3\cdot4=2$ და ბევრი სხვა, მათი მსგავსი ერთი შეხედვით „უკანონო“ ტოლობა. თუ გგონიათ, რომ რაღაც მეტისმეტად „ბრძნულ“ თეორიას გთავაზობთ, — სცდებით!... სულაც არა, საკმარისია გაიხსენოთ ზოგი რამ მთელ რიცხვთა გაყოფადობის შესახებ და იცოდეთ რა არის ეგრეთ წოდებული ნაშთთა კლასები და ნაშთთა სისტემები. ეს კი არც ისე ძნელია. ძნელი კი არა, ძალიანაც ადვილია!

სიმრავლის ჩაკეტილობა

კარგად არის ცნობილი, რომ ნებისმიერი ორი მთელი რიცხვის ჯამი, ნამრავლი და, აგრეთვე, სხვაობა, კვლავ მთელი რიცხვია. სხვანაირად, თუ მთელ რიცხვთა სიმრავლეს $\mathbf{Z}$-ით აღვნიშნავთ, —

$$\mathbf{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

მაშინ

$$a, b\in\mathbf{Z}\Rightarrow a+b,\ ab,\ a-b\in\mathbf{Z}.$$

როგორც ხედავთ, $a+b$, ab და $a-b$ რიცხვები იმავე სიმრავლეში უნდა ვეძებოთ, საიდანაც a და b არის აღებული. ესე იგი, შეკრებას, გამრავლებას და გამოკლებას **Z** სიმრავლიდან არ გამოვყავართ. ამიტომაც ამბობენ, რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების, გამრავლების და გამოკლების მოქმედებათა მიმართ.

არ იფიქროთ, რომ ჩაკეტილობაზე საუბარი მხოლოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში შეიძლება. არა, თუ გნებავთ, სხვა სიმრავლეებსაც დაგისახელებთ ჩაკეტილს ამა თუ იმ მოქმედების მიმართ. მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა

$$\mathbf{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებათა მიმართ, მაგრამ არაა ჩაკეტილი არც გამოკლებისა და არც გაყოფის მოქმედებათა მიმართ.

სავარჯიშო

1. დაამტკიცეთ, რომ **2**-ის ჯერად რიცხვთა

$$A=\{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების, გამრავლების და გამოკლების მოქმედებათა მიმართ.

2. შეამოწმეთ, რომ კენტ რიცხვთა B სიმრავლე —

$$B=\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

ჩაკეტილია გამრავლების მოქმედების მიმართ. არის თუ არა B ჩაკეტილი შეკრების ან გამოკლების მოქმედების მიმართ?

3. ვთქვათ, C-თი აღნიშნულია იმ მთელ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც **3**-ზე გაყოფისას ნაშთს **1**-ს იძლევიან. დაწერეთ ამ სიმრავლის ელემენტების ზოგადი სახე და დაამტკიცეთ, რომ ოთხი არითმეტიკული მოქმედებიდან C ჩაკეტილია მხოლოდ გამრავლების მოქმედების მიმართ.

4. რომელი სიმრავლეა ჩაკეტილი ოთხივე არითმეტიკული მოქმედების მიმართ?

გაყოფადობის შესახებ

ამრიგად, პირველ სამ არითმეტიკულ მოქმედებას მთელ რიცხვთა სიმრავლიდან არ გამოვყავართ. რაც შეეხება მეოთხე მოქმედებას — გაყოფას, აქ საქმე სულ სხვანაირად არის — ორი მთელი რიცხვის განაყოფი არც ისე ხშირად არის მთელი. მაგალითად, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ალალბედად აღებული მთელი რიცხვი 10-ზე

გაიყოფა? ცხადია, რამდენადაც ერთმანეთის მიმდევნო ათი მთელი რიცხვიდან მხოლოდ ერთი იყოფა უნაშთოდ 10-ზე, ამიტომ ეს ალბათობა 0,1-ის ტოლია. სხვანაირად, ათიდან ერთი შანსი გვაქვს იმის სასარგებლოდ, რომ მიღებული განაყოფი მთელი აღმოჩნდება. ცხადია, გამყოფის ზრდასთან ერთად ეს შანსი კლებულობს. დიახ, ორი მთელი რიცხვის განაყოფი იშვიათად თუ არის მთელი... მაგრამ, ხომ გაგიგიათ, — ზოგი ჭირი მარგებელიაო, — მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გაყოფის დაუბრკოლებლად შესრულების შეუძლებლობამ ბევრი საინტერესო და მნიშვნელოვანი საკითხი წამოჭრა. მათი კვლევა ძველი წელთაღრიცხვის VI-V საუკუნეებში დაიწყო და, თქვენ წარმოიდგინეთ, დღესაც არ შეწყვეტილა. ეს საკითხები, გარდა იმისა, რომ საინტერესო და მნიშვნელოვანია, მეტწილად ძალზე ძნელი გადასაწყვეტიც არის. ხშირად, ძალიან ხშირადაც კი, ცნობილი მეთოდებით ფონს ვერ გახვალ. ამიტომაც იქმნებოდა და იქმნება ახალი მეთოდები, ახალი თეორიები და ეს მათემატიკის წინსვლას განაპირობებს. ერთ-ერთი ასეთი თეორიის — შედარებათა თეორიის უმარტივეს ცნებებსა და ფაქტებზე ქვემოთ გესაუბრებით, ახლა კი მთელ რიცხვთა გაყოფადობას დავუბრუნდეთ.

ავიღოთ რომელიმე მთელი რიცხვი, მაგალითად 5. მასზე ყველა არა, მაგრამ მაინც ბევრი მთელი რიცხვი იყოფა. ასეთებია **0, 5, —5, 10, —10,** და სხვ. მათ, როგორც იცით, 5-ის ჯერად რიცხვებს უწოდებენ. ალბათ ისიც იცით, რომ თუ მთელი რიცხვი 5-ის ჯერადია, მას აუცილებლად $5k$ ნამრავლის სახე აქვს, სადაც k მთელი რიცხვია. პირიქით, ამ სახის ყველა რიცხვი 5-ის ჯერადია. ამრიგად:

(x მთელი რიცხვი 5-ის ჯერადია $\Leftrightarrow x=5k,\ k\in \mathbf{Z}$).

თუკი x რიცხვი არაა 5-ის ჯერადი, მისი 5-ზე გაყოფის შემდეგ, ცხადია, ნაშთს მივიღებთ. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ნაშთი შეიძლება იყოს **1, 2, 3** ან **4.** სხვანაირად: ამ შემთხვევაში 5-ის ჯერადი იქნება $x-1$, $x-2$, $x-3$ ან $x-4$. მაგალითად, **16** არ არის 5-ის ჯერადი. ის 5-ზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს გვაძლევს და ამიტომ $16-1$ უკვე 5-ის ჯერადია. ცხადია, ეს ასეც არის! ასევე, -34 არ არის 5-ის ჯერადი, მაგრამ $-34-1$ არის 5-ის ჯერადი. გამოდის, რომ ეს რიცხვიც 5-ზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს გვაძლევს. მაშასადამე, გვაქვს:

$$16-1=15=5\cdot 3\Rightarrow 16=5\cdot 3+1,$$
$$-34-1=-35=5\cdot(-7)\Rightarrow -34=5\cdot(-7)+1.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე ეს რიცხვი $5k+1$ სახით წარმოიდგინება. მართალია, პირველ შემთხვევაში $k=3$, მეორეში $k=-7$, მაგრამ არსებითი ის არის, რომ ორივე შემთხვევაში k მთელი რიცხვია!

განხილული ორი მაგალითიც საკმარისია, რომ დავასკვნათ: ყოველი რიცხვი, რომელიც 5-ზე გაყოფისას ნაშთს 1-ს გვაძლევს, $5k+1$ სახით წარმოიდგინება, სადაც k მთელი რიცხვია.

მსგავსი ვითარება გვაქვს მაშინაც, როცა ნაშთია 2, 3 ან 4. დარწმუნებული ვარ, თავად მოახერხებთ იმის დადგენას, რომ ამ შემთხვევებში რიცხვს შესაბამისად $5k+2$, $5k+3$ ან $5k+4$ სახე აქვს. (რა თქმა უნდა, k ყველგან მთელია)

რადგან ყოველი მთელი რიცხვის 5-ზე გაყოფისას ნაშთი ან 0-ია, ან 1, ან 2, ან 3, ან 4, ამიტომ, როგორიც უნდა იყოს x მთელი რიცხვი, იგი ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$x=5k,\ x=5k+1,\ x=5k+2,\ x=5k+3,\ x=5k+4,$$

სადაც $k\in\mathbf{Z}$. საგულისხმოა, რომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია, ესე იგი, თუ რომელიმე x-ისათვის გვაქვს

$$x=5k_1+r,\ x=5k_2+r,$$

სადაც k_1 და k_2 მთელი რიცხვებია, ხოლო $r\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, მაშინ $k_1=k_2$. მართლაც:

$$\begin{cases} x=5k_1+r \\ x=5k_2+r \end{cases} \Rightarrow 5k_1+r=5k_2+r \Rightarrow 5(k_1-k_2)=0 \Rightarrow k_1=k_2.$$

რა თქმა უნდა, ხვდებით, რომ ის, რაც 5-ის შესახებ ვთქვი, სათანადო სახეცვლილებით ნებისმიერი სხვა მთელი რიცხვისთვისაცაა სამართლიანი. თუმცა, აქ თავისებური გამონაკლისიც არის. სახელდობრ, არავითარი აზრი არა აქვს ნულის განხილვას — კარგად იცით, რომ ნულზე გაყოფა არ შეიძლება! არც 1 ვარგა, რადგან მასზე ყველა რიცხვი იყოფა. იმასაც ვიტყვი, რომ შეიძლება მხოლოდ დადებითი რიცხვებით შემოვიფარგლოთ. ახლავე მოგახსენებთ, რატომ. ვთქვათ, გამყოფი უარყოფითია, მაგალითად, -4. მაშინ მისი ჯერადი ყველა რიცხვი $-4k$ სახით ჩაიწერება, სადაც $k\in\mathbf{Z}$. რა შეიცვლება ეს რიცხვი $4k$ სახით რომ წარმოვადგინოთ? ცხადია, არაფერი — k იმავე მნიშვნელობებს გაირბენს — დადებითს, უარყოფითს, ნულის ტოლს. მაშასადამე, იმის ნაცვლად, რომ დაგვეწერა: $-20=-5k$, სადაც $k=4$, დავწერთ: $-20=5k$, სადაც $k=-4$. ამიტომაც, შემდეგში ყველგან ვიგულისხმებ, რომ გამყოფი დადებითია, თანაც 1-ზე მეტი.

რიცხვების ის წარმოდგენა, რომელსაც გავეცანით, ხშირად მოსახერხებელია სხვადასხვა ამოცანის ამოსახსნელად. მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ 3-ის არაჯერადი რიცხვის კვადრატი 3-ზე გაყოფისას ნაშთს აუცილებლად 1-ს იძლევა.

მართლაც, თუ $x\in\mathbf{Z}$ და არ არის 3-ის ჯერადი, ესე იგი მას

$3k$ ნამრავლის სახე არა აქვს, ის 3-ზე გაყოფისას მოგვცემს ნაშთს, რომელიც ან 1-ია, ან 2. მაშასადამე, $x=3k+1$ ან $x=3k+2$. თუ $x=3k+1$, მაშინ

$$x^2=9k^2+6k+1=(3k^2+2k)+1=3k_1+1,$$

სადაც $k_1=3k^2+2k\in \mathbf{Z}$. თუკი $x=3k+2$, მაშინ,

$$x^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1=3k_2+1,$$

სადაც $k_2=3k^2+4k+1\in \mathbf{Z}$.

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $x^2=3k+1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ x^2-ის 3-ზე გაყოფისას ნაშთი 1 მიიღება. ჩვენ სწორედ ამის დამტკიცება გვინდოდა.

ახლა ვნახოთ, რა ციფრით შეიძლება ბოლოვდებოდეს მთელი რიცხვის კვადრატი.

ცხადია, ნებისმიერ მთელ x რიცხვს, ერთ-ერთი შემდეგი სახე აქვს:

$$10k,\quad 10k+1,\ 10k+2,\ 10k+3,\ 10k+4,$$
$$10k+5,\ 10k+6,\ 10k+7,\ 10k+8,\ 10k+9.$$

მათი კვადრატებისთვის გვექნება შესაბამისად:

$$100k^2=10k_1,\ 100k^2+20k+1=10k_1+1,$$
$$100k^2+40k+4=10k_1+4,\ \ 100k^2+60k+9=10k_1+9,$$
$$100k^2+80k+16=10k_1+6,\ 100k^2+100k+25=10k_1+5,$$
$$100k^2+120k+36=10k_1+6,\ 100k^2+140k+49=10k_1+9,$$
$$100k^2+160k+64=10k_1+4,\ 100k^2+180k+81=10k_1+1,$$

სადაც k_1 ყველა შემთხვევაში მთელი რიცხვია.

მიღებული ტოლობები გვიჩვენებენ, რომ x^2-ის ბოლო ციფრი შეიძლება იყოს 0, 1, 4, 5, 6 ან 9. (ცხადია, ეს სულაც არ ნიშნავს იმას, რომ ამ ციფრებით დაბოლოებული ყველა რიცხვი სრული კვადრატია! — ჩვენ მხოლოდ ის ვაჩვენეთ, რომ სხვა ციფრებით მთელი რიცხვის კვადრატი არ შეიძლება ბოლოვდებოდეს.)

სავარჯიშო

5. რა ნაშთს იძლევა კენტი რიცხვის კვადრატი 4-ზე გაყოფისას?

6. მთელი რიცხვის კუბის ბოლო ციფრია 7. რა ნაშთს იძლევა ეს რიცხვი 10-ზე გაყოფისას?

7. ცნობილია, რომ x კენტი რიცხვია: $x=2k+1$. რა ნაშთს მოგვცემს მისი კუბი 4-ზე გაყოფისას?

8. დაამტკიცეთ, რომ მთელი რიცხვის მეოთხე ხარისხი შეიძლება მხოლოდ ერთ-ერთი შემდეგი ციფრით ბოლოვდებოდეს: 0, 1, 5, 6.

9. დაამტკიცეთ შემდეგი წესი: იმისათვის, რომ ხუთით დაბოლოებული რიცხვი კვადრატში ავიყვანოთ, საკმარისია მას ჩამოვაშოროთ **5**, დარჩენილი რიცხვი მის მომდევნოზე გავამრავლოთ და ნამრავლს **25** მივუწეროთ. (მაგალითი: $105^2=?$ ჩამოვაშოროთ **5**, დარჩა **10**. გავამრავლოთ **10** მის მომდევნოზე: $10\cdot 11=110$. მივუწეროთ მიღებულ რიცხს **25**; $105^2=11025$.)

რა არის შედარება?

როგორც აღვნიშნე, მთელი რიცხვის **5**-ზე გაყოფისას მიიღება ნაშთი, რომელიც ან **0**-ია (მაშინ რიცხვი **5**-ის ჯერადია!) ან **1**, ან **2**, ან **3**, ან **4**. სხვა შემთხვევა არ შეიძლება წარმოგვიდგეს, ახლა საქმეს სხვანაირად შევხედოთ. სახელდობრ, ვთქვათ, a და b ნებისმიერი ორი მთელი რიცხვია, გავარკვიოთ, როდის იქნება $a-b$ სხვაობა **5**-ის ჯერადი.

თუ a და b რიცხვების **5**-ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთებს შესაბამისად r_1-ითა და r_2-ით აღვნიშნავთ, მაშინ

$$a=5k_1+r_1,\quad b=5k_2+r_2$$

და, მაშასადამე,

$$a-b=5(k_1-k_2)+(r_1-r_2)=5k+r,$$

სადაც k მთელია, ხოლო $r=r_1-r_2$. ვნახოთ, რას შეიძლება უდრიდეს უკანასკნელი რიცხვი.

$$\begin{cases}0\leqslant r_1\leqslant 4\\ 0\leqslant r_2\leqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant r_1\leqslant 4\\ -4\leqslant -r_2\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow -4\leqslant r_1-r_2\leqslant 4\Rightarrow -4\leqslant r\leqslant 4.$$

ახლა ადვილი მისახვედრია, რომ $a-b$ სხვაობა **5**-ის ჯერადი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ არის, როცა $r=0$, ესე იგი, $r_1=r_2$. დასკვნა: $a-b$ სხვაობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის **5**-ის ჯერადი, თუ a და b რიცხვები **5**-ზე გაყოფისას ერთსა და იმავე ნაშთს გვაძლევენ.

თუ a და b მთელი რიცხვების სხვაობა უნაშთოდ იყოფა **5**-ზე, მაშინ ამბობენ, რომ **a სადარია b-სი მოდულით 5** და ამას ეგრეთ წოდებული **შედარების** სახით ჩაწერენ:

$$a\equiv b(mod\ 5).$$

ამრიგად, განსაზღვრების თანახმად,

$$a\equiv b(mod\ 5)\Leftrightarrow(a-b\ \text{სხვაობა}\ 5\text{-ის ჯერადია}).$$

ან უფრო მოხდენილად, — ყოველგვარი სიტყვების გარეშე:

$$a\equiv b(mod\ 5)\Leftrightarrow a-b=5k,\ k\in\mathbf{Z},$$

თუკი a არ არის b-ს სადარი მოდულით 5, შედარების „$\equiv$" ნიშანს „$\not\equiv$" ნიშნით შევცვლით და დავწერთ: $a \not\equiv b(mod5)$. რამდენიმე საილუსტრაციო მაგალითი:

$$12 \equiv -3(mod5),\ \ 3 \not\equiv 1(mod5),\ \ 10 \not\equiv 19(mod5),$$
$$5k \equiv 0(mod5)\ (k \in \mathbf{Z}),\ \ 5k_1 + r \equiv 5k_2 + r(mod5)\ (k_1, k_2 \in \mathbf{Z}),$$
$$5k_1 + r_1 \equiv 5k_2 + r_2(mod\ 5) \Leftrightarrow r_1 = r_2\ (k_1,\ k_2 \in \mathbf{Z}).$$

შედარების მოშველიებით ძალიან მოკლედ ჩაიწერება ზოგიერთი სიმრავლე. მაგალითად, ვთქვათ, A არის სიმრავლე იმ რიცხვებისა, რომლებიც 5-ზე გაყოფისას ნაშთს 2-ს გვაძლევენ. მაშინ შეიძლება დავწეროთ:

$$a \in A \Leftrightarrow a \equiv 2(mod5).$$

დამეთანხმეთ, მართლაც კარგი და მოხდენილი ჩანაწერია. მაგრამ ეს ცოტაა, არსებობს სხვა, უფრო მოხერხებული ჩაწერა. ამისათვის გავეცნოთ სიმრავლის აღნიშვნის ერთ ზოგად წესს.

ვთქვათ, E რაიმე, სრულიად ნებისმიერი სიმრავლეა. მისი ელემენტები სულაც არაა აუცილებელი რიცხვები იყოს — E შეიძლება იყოს, მაგალითად, რომელიღაც გარკვეული სკოლის მეშვიდეკლასელთა სიმრავლე, მზის სისტემის პლანეტათა სიმრავლე, საქართველოს მდინარეების სიმრავლე და სხვ. გარდა ამისა, განვიხილოთ რაღაც თვისება, რომელიც შეიძლება ჰქონდეთ ან არ ჰქონდეთ E-ს ელემენტებს. აღვნიშნოთ ეს თვისება P-თი, ხოლო ის, რომ რაიმე x საგანს აქვს P თვისება, $P(x)$-ით. მაგალითად, P შეიძლება აღნიშნავდეს ხუთოსნობას, მაშინ $P(x)$ ნიშნავს: „x ხუთოსანია", შეიძლება P ლუწობას აღნიშნავს, მაშინ $P(x)$ ასე წაიკითხება: „x ლუწი რიცხვია" და ასე შემდეგ.

მოცემული E სიმრავლის ის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებს P თვისება აქვს, ერთ-ერთი შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\{x \in E \mid P(x)\},\ \{x \mid x \in E,\ P(x)\}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ცხადია, თუ რა E სიმრავლეზეა საუბარი, შესაძლებელია უფრო მოკლე —

$$\{x \mid P(x)\}$$

ჩანაწერით სარგებლობა.

მაგალითად, ვთქვათ E არის საქართველოს მდინარეთა სიმრავლე, ხოლო P აღნიშნავს: „შავ ზღვას ერთვის". მაშინ

$$A = \{x \in E \mid P(x)\}$$

არის საქართველოს იმ მდინარეთა სიმრავლე, რომლებიც შავ ზღვას ერთვიან. ცხადია, რომ რიონი არის A-ს ელემენტი, მტკვარი კი — არა. სხვათა შორის, არაა გამორიცხული, რომ რაღაც

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

სიმრავლე ცარიელი აღმოჩნდეს. მაგალითად, თუ E არის გარკვეული კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე, ხოლო P ხუთოსნობას აღნიშნავს და ამ კლასში არც ერთი ხუთოსანი არ არის, მაშინ ზემოთ დაწერილი სიმრავლე ცარიელია.

ახლა განვიხილოთ

$$\{x \in \mathbf{Z} \,\|\, x \equiv 2(mod\ 5)\}$$

სიმრავლე. ალბათ მიხვდით, რომ ეს იმ მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, რომლებიც **5**-ზე გაყოფისას ნაშთს **2**-ს გვაძლევენ. აქვე ერთი შენიშვნა. რამდენადაც შედარება მხოლოდ და მხოლოდ მთელი რიცხვებისთვის გვაქვს განსაზღვრული, ამიტომ მოყვანილ ჩანაწერში იმის მინიშნება, რომ x მთელ რიცხვთა სიმრავლეს ეკუთვნის, საჭირო არ არის, შეიძლება უფრო მოკლედ დავწეროთ:

$$\{x \,\|\, x \equiv 2(mod\ 5)\}.$$

მსგავსადვე ჩაიწერება სიმრავლეები იმ მთელი რიცხვებისა, რომლებიც **5**-ზე გაყოფისას ნაშთს **0**-ს, **1**-ს, **3**-ს ან **4**-ს იძლევიან. მათზე ქვემოთ უფრო დაწვრილებით ვისაუბრებ, ახლა კი ერთი საკითხი გავარკვიოთ.

ალბათ ბევრი თქვენგანი ფიქრობს: რაღა მაინცდამაინც **5** ავიღეთ და ვიხილავთ შედარებებს ამ მოდულით, არ შეიძლებოდა სხვა რომელიმე რიცხვი აგვეღო? შეიძლებოდა, როგორ არა! მე მხოლოდ გარკვეულობისათვის ავირჩიე **5**, თორემ შემეძლო ამეღო **3, 10, 17, 124** და, საზოგადოდ, **1**-ზე მეტი ნებისმიერი დადებითი m რიცხვი. თუ m ასეთია, ამბობენ, რომ a **სადარია b-სი მოდულით m,** თუ $a-b$ უნაშთოდ იყოფა m-ზე. აღნიშვნა ზემოთ მოყვანილის მსგავსია. ამრიგად,

$$a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow a-b=mk,\ k \in \mathbf{Z}.$$

მაგალითად,

$$7 \equiv 4(mod\ 3),\ 25 \equiv 5(mod\ 10),\ 117 \equiv 66(mod\ 17).$$

ამასთანავე,

$$6 \not\equiv 4(mod\ 3),\ 21 \not\equiv 5(mod\ 5),\ 117 \not\equiv 1(mod\ 17).$$

სანამ სავარჯიშოებზე გადავიდოდეთ, სანიმუშოდ ორი ამოცანა ამოვხსნათ.

ვიპოვოთ ყველა x, რომელიც $2x+1 \equiv 6(mod\ 5)$ შედარებას აკმაყოფილებს.

როგორც ვიცით,

$$2x+1 \equiv 6(mod\ 5) \Leftrightarrow 2x+1-6=5k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=5(k+1) \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}(k+1).$$

რამდენადაც x მთელია, მიღებული ტოლობის მარჯვენა ნაწილიც

მთელი უნდა იყოს, მაგრამ 5 არ იყოფა 2-ზე, ესე იგი 2-ზე უნდა გაიყოს $k+1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ უნდა იყოს: $k+1=2k_1$, სადაც $k_1 \in \mathbf{Z}$. ამრიგად, საბოლოოდ,

$x=5k_1, \ k_1 \in \mathbf{Z}$.

როგორც ხედავთ, თუ შედარება ცვლადს შეიცავს, იგი ამ ცვლადის მიმართ გარკვეულ განტოლებაზე დაიყვანება, ამიტომაც განტოლების მსგავსად აქაც შეიძლება საუბარი შედარების ამოხსნასა და მის ამონახსენთა სიმრავლეზე, ჩვენს შემთხვევაში, მოცემული შედარების ამონახსენი 5-ის ჯერად რიცხვთა სიმრავლეა.

აქვს თუ არა ამონახსენი $x^2-1 \equiv 1(mod\ 10)$ შედარებას?

ცხადია, მოცემული შედარება $x^2=10k+2$ ტოლობის ეკვივალენტურია. ამრიგად, x მთელი რიცხვის კვადრატი 2-ით უნდა ბოლოვდებოდეს. ეს კი, როგორც ზემოთ ვნახეთ, შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ შედარებას ამონახსენი არა აქვს — მის ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

სავარჯიშო

10. მოცემულია $A=\{-2, 5, 8, 15, 23\}$ სიმრავლე. მისი რომელი x ელემენტისთვის არის ჭეშმარიტი შემდეგი შედარება:

$x \equiv 0(mod\ 5); \ x \equiv 2(mod\ 5); \ 2x-1 \equiv 1(mod\ 5)$?

11. რას უნდა უდრიდეს 10-ზე ნაკლები დადებითი b, რომ $5x-b \equiv 1(mod\ 5)$ შედარებას ამონახსენი ჰქონდეს?

12. შეამოწმეთ, რომ

$x+1 \equiv x-9(mod\ 5) \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$.

13. იპოვეთ $2x+5 \equiv 1(mod\ 2)$ შედარების უმცირესი დადებითი ამონახსენი.

14. იპოვეთ $2x^2-3 \equiv 1(mod\ 4)$ შედარების რომელიმე სამი ამონახსენი.

15. ამოხსენით $3x-1 \equiv 4(mod\ 5)$ შედარება.

16. დაამტკიცეთ, რომ $x-1 \equiv 1(mod\ 2) \Leftrightarrow x \in \{y \in \mathbf{Z} \mid y=2k\}$.

17. ვთქვათ, a და b ისეთია, რომ $a \equiv b\ (mod\ 5)$ შედარება ჭეშმარიტია. იქნება თუ არა ჭეშმარიტი $b \equiv a\ (mod\ 5)$ შედარება?

18. ვთქვათ, $a \equiv b(mod\ 5)$ და $b \equiv c(mod\ 5)$.

რა შეიძლება ითქვას $a \equiv c(mod\ 5)$ შედარების შესახებ?

19. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მთელი a, b, c რიცხვებისათვის

$a \equiv b(mod\ m) \Rightarrow a+c \equiv b+c(mod\ m)$.

20. ვთქვათ, m დადებითი რიცხვია, მეტი 1-ზე. დარწმუნდით, რომ $mx+m \equiv m(mod\ m)$ შედარების ამონახსენთა სიმრავლეა $\mathbf{Z}$.

თუ მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$ სიმრავლის ელემენტებს 5-ზე გაყოფადობის თვალსაზრისით განვიხილავთ, $\mathbf{Z}$ ბუნებრივად დაიყოფა შემდეგ ხუთ ქვესიმრავლედ:

$$K_0=\{x \| x\equiv 0(mod\ 5)\},\ K_1=\{x \| x\equiv 1(mod\ 5)\},$$

$$K_2=\{x \| x\equiv 2(mod\ 5)\},\ K_3=\{x \| x\equiv 3(mod\ 5)\},$$

$$K_3=\{x \| x\equiv 4(mod\ 5)\}.$$

ამ ქვესიმრავლეებს ეწოდებათ **ნაშთთა კლასები მოდულით 5.** როგორიც უნდა იყოს a მთელი რიცხვი, იგი აუცილებლად მოხვდება ერთ-ერთი ამ კლასში. მართლაც, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ a რიცხვის 5-ზე გაყოფისას მივიღებთ ნაშთს, რომელიც შეიძლება იყოს **0, 1, 2, 3,** ან **4** ამის შესაბამისად a იქნება K_0, K_1, K_2, K_3 ან K_4 კლასში. სავულისხმოა, რომ a არ შეიძლება ერთდროულად ორ კლასში მოხვდეს. მაგალითად,

$$\begin{cases} a\in K_1 \\ a\in K_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\equiv 1(mod 5) \\ a\equiv 3(mod\ 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+1 \\ a=5k_2+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=5(k_1-k_2)-2 \Rightarrow k_1-k_2=2/5,$$

რაც, ცხადია, შეუძლებელია, ვინაიდან k_1-k_2 მთელი რიცხვია. მსგავსადვე განიხილება დანარჩენი შემთხვევებიც (სულ რამდენი შემთხვევაა?).

ამრიგად, ხუთივე კლასის გაერთიანება მთელი $\mathbf{Z}$ სიმრავლის ტოლია და, ამასთანავე, კლასებს წყვილ-წყვილად საერთო ელემენტები არა აქვთ, ან როგორც ამბობენ ხოლმე, ისინი წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან. ყველაფერი ეს შეიძლება თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ. ამისათვის დავხაზოთ წრეწირი. ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრე იყოს $\mathbf{Z}$ სიმრავლე, ხოლო წრის სექტორები — K_0, K_1, K_2, K_3 და K_4 კლასები. ცხადია, სექტორები წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან, ერთად კი მთელ წრეს შეადგენენ.

ნაშთთა კლასები სხვა მოდულითაც შეიძლება განვიხილოთ. ძალიან საინტერესო შემთხვევა წარმოგვიდგება, როცა მოდული 2-ის ტოლია. გვექნება ორი კლასი —

$$K_0=\{x \| x\equiv 0(mod\ 2)\},\ K_1=\{x \| x\equiv 1(mod\ 2)\}.$$

ალბათ მიხვდით, რომ K_0 არის ლუწი რიცხვების სიმრავლე, K_1 — კენტი რიცხვებისა, მათი გაერთიანება კი მთელი $\mathbf{Z}$ სიმრავლეა.

21. K_0, K_1, K_2 ნაშთთა კლასებია მოდულით **3**. რომელ კლასს ეკუთვნის შემდეგი რიცხვი: -3, -1, 8, 9, 13, 15, 210?

22. განვიხილოთ ნაშთთა K_0, K_1 კლასები:

$K_0=\{x \| x\equiv 0(mod\ 2)\}$, $K_1=\{x \| x\equiv 1(mod\ 2)\}$.

შეამოწმეთ, რომ

$$\begin{cases} a\in K_0 \\ b\in K_1 \end{cases} \Rightarrow (a+b\in K_1,\ a-b\in K_1,\ ab\in K_0).$$

23. ვთქვათ, K_0, K_1, K_2, K_3 და K_4 ნაშთთა კლასებია მოდულით **5**. რომელ კლასს ეკუთვნის $a+b$ ჯამი, თუ $a\in K_2$, $b\in K_3$? რომელი კლასის რიცხვია, იმავე პირობით, ab ნამრავლი?

ნაშთთა კლასების შეკრება და გამრავლება

ნუ გაგიკვირდებათ, ნაშთთა კლასები შეიძლება შევკრიბოთ და გავამრავლოთ, უფრო სწორად, — განვსაზღვროთ მათ სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებანი. თანაც, განვსაზღვროთ ისე, რომ შეკრებისა და გამრავლების ყველა ცნობილი თვისება შესრულდეს. ვნახოთ, როგორ კეთდება ეს.

განვიხილოთ ისევ ნაშთთა კლასები მოდულით **5**. ვთქვათ, $a\in K_2$, $b\in K_3$. მაშინ

$$a=5k_1+2,\ b=5k_2+3$$

და, მაშასადამე,

$$a+b=5(k_1+k_2+1)=5k,$$

სადაც $k\in \mathbf{Z}$. ამრიგად, K_2 და K_3 კლასების რიცხვების ჯამი K_0 კლასის რიცხვს გვაძლევს და განა ბუნებრივი არ არის ვწეროთ:

$$K_2+K_3=K_0?$$

მსგავსადვე,

$$\begin{cases} a\in K_1 \\ b\in K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+1 \\ b=5k_2+2 \end{cases} \Rightarrow a+b=5(k_1+k_2)+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=5k+3,$$

რაც საფუძველს გვაძლევს K_1+K_2 ჯამი K_3-ის ტოლად მივიღოთ. ამავე მოსაზრებებიდან გამომდინარე, $K_0+K_3=K_3$, $K_1+K_4=K_0$, $K_4+K_4=K_3$ და ასე შემდეგ.

საგულისხმოა, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული შეკრება გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის კანონებს აკმაყოფილებს. შევამოწმოთ, მაგალითად, რომ

$(K_2+K_3)+K_4=K_2+(K_3+K_4)$.

როგორც ვნახეთ, $K_2+K_3=K_0$ და ამიტომ $(K_2+K_3)+K_4=K_0+K_4$. ვნახოთ, რას უდრის უკანასკნელი ჯამი.

$$\begin{cases} a\in K_0 \\ b\in K_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1 \\ b=5k_2+4 \end{cases} \Rightarrow a+b=5k+4 \Rightarrow K_0+K_4=K_4.$$

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ $K_2+(K_3+K_4)$ ჯამიც K_4-ის ტოლია,

$$\begin{cases} a\in K_3 \\ b\in K_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+3 \\ b=5k_2+4 \end{cases} \Rightarrow a+b=5(k_1+k_2+1)+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_3+K_4=K_2.$$

$$\begin{cases} a\in K_2 \\ b\in K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+2 \\ b=5k_2+2 \end{cases} \Rightarrow a+b=5(k_1+k_2)+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_2+K_2=K_4,$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ანალოგიური მოსაზრება შეიძლება დავუდოთ საფუძვლად კლასების გამრავლებასაც. მაგალითად,

$$\begin{cases} a\in K_2 \\ b\in K_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+2 \\ b=5k_2+3 \end{cases} \Rightarrow ab=25k_1k_2+15k_1+10k_2+6=$$

$$=5k+1 \Rightarrow ab\in K_1$$

და ამიტომაც, ბუნებრივია მივიღოთ:

$K_2K_3=K_1$.

აქაც არაა ძნელი იმის შემოწმება, რომ კლასების ასეთნაირად განსაზღვრული გამრავლებისათვის სამართლიანია გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის კანონები. იმედი მაქვს, ამის ჩვენებას თავად მოახერხებთ.

არის თუ არა სამართლიანი განრიგებადობის კანონი? არის! შევამოწმოთ, მაგალითად, რომ

$K_4(K_2+K_3)=K_4K_2+K_4K_3$.

როგორც ვიცით, $K_2+K_3=K_0$. ამრიგად, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ $K_4K_0=K_4K_2+K_4K_3$. გვაქვს:

$$\begin{cases} a\in K_4 \\ b\in K_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+4 \\ b=5k_2 \end{cases} \Rightarrow ab=5k_2(5k_1+4)=5k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_4K_0=K_0.$$

$$\begin{cases} a\in K_4 \\ b\in K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+4 \\ b=5k_2+2 \end{cases} \Rightarrow ab=5k+3 \Rightarrow K_4K_2=K_3.$$

$$\begin{cases} a\in K_4 \\ b\in K_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5k_1+4 \\ b=5k_2+3 \end{cases} \Rightarrow ab=5k+2 \Rightarrow K_4K_3=K_2.$$

მაგრამ, აკი ვნახეთ, რომ $K_3+K_2=K_0$. ამრიგად,

$$K_4(K_2+K_3)=K_0,\quad K_4K_2+K_4K_3=K_0,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ახლა უკვე შეგვიძლია ნაშთთა კლასების შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები შევადგინოთ.

$+$	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
K_0	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	K_1	K_2	K_3	K_4	K_0
K_2	K_2	K_3	K_4	K_0	K_1
K_3	K_3	K_4	K_0	K_1	K_2
K_4	K_4	K_0	K_1	K_2	K_3

$\times$	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
K_0	K_0	K_0	K_0	K_0	K_0
K_1	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
K_2	K_0	K_2	K_4	K_1	K_3
K_3	K_0	K_3	K_1	K_4	K_2
K_4	K_0	K_4	K_3	K_2	K_1

ცხრილებზე დაკვირვება რამდენიმე საგულისხმო დასკვნის გამოტანის საშუალებას გვაძლევს. კერძოდ, შეკრების ცხრილის პირველი სტრიქონი (ან პირველი სვეტი) გვიჩვენებს, რომ

$$K_0+K_0=K_0,\quad K_1+K_0=K_1;\quad K_2+K_0=K_2,\quad K_3+K_0=K_3,$$
$$K_4+K_0=K_4,$$

ესე იგი, K_0 რომელ კლასსაც არ უნდა მივუმატოთ, ეს უკანასკნელი არ იცვლება... გამოდის, რომ K_0 ისეთსავე როლს ასრულებს ნაშთთა კლასების შეკრებისას, როგორსაც რიცხვი ნული ჩვეულებრივი შეკრების დროს. ამიტომაც ამბობენ, რომ K_0 არის **ნეიტრალური ელემენტი შეკრების მიმართ**. მაგრამ მხოლოდ ეს არ აახლოებს K_0-ს ნულთან — გამრავლების ცხრილი გვიჩვენებს, რომ

$$K_0K_0=K_0,\quad K_1K_0=K_0,\quad K_2K_0=K_0,\quad K_3K_0=K_0,\quad K_4K_0=K_0.$$

ხედავთ? K_0-ის ნებისმიერ კლასზე გამრავლება კვლავ K_0-ს გვაძლევს. განა შეიძლება არ გავიხსენოთ ნულის ცნობილი თვისება: ნებისმიერი რიცხვის ნულზე ნამრავლი ნულის ტოლია?!

თუ გამრავლების ცხრილის მეორე სტრიქონს (ან მეორე სვეტს) მიადევნებთ თვალს, დარწმუნდებით, რომ K_1-ზე გამრავლება კლასს არ სცვლის, — ზუსტად ისევე, როგორც **1**-ზე გამრავლება არ სცვლის რიცხვს. ამრიგად, K_1 **ნეიტრალური ელემენტია ნაშთთა კლასების გამრავლების მიმართ**.

ის ანალოგია, რაც რიცხვთა შეკრებასა და გამრავლებასთან არსებობს, უფლებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ნაშთთა კლასების შეკრება და გამრავლება, თუ შეიძლება ასე ითქვას, მეტად მყარ საფუძველზე დგას.

სავარჯიშო

24. ვთქვათ, K_0, K_1 ნაშთთა კლასებია მოდულით 2. განსაზღვრეთ მათთვის შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებანი. შეადგინეთ სათანადო ცხრილები.

25. განიხილეთ K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 — ნაშთთა კლასები მოდულით 7. რას უდრის K_3+K_4 ჯამი? K_2K_6 ნამრავლი? დაამტკიცეთ, რომ

$$K_0+K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6=K_0.$$

ნაშთთა სისტემები

ნაშთთა კლასებს, როგორც იცით, შესანიშნავი თვისება აქვთ: ყოველი მთელი რიცხვი ერთსა და მხოლოდ ერთ კლასს ეკუთვნის. მაგალითად, თუ მოდული 5-ის ტოლია, მაშინ ხუთი კლასი გვაქვს და ნებისმიერი მთელი რიცხვი მხოლოდ ერთ მათგანს ეკუთვნის. ამასთანავე, K_0, K_1, K_2, K_3 და K_4 კლასები შეიცავენ შესაბამისად იმ რიცხვებს, რომელთა 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი არის 0, 1, 2, 3 და 4. ავიღოთ რომელიმე კლასი, მაგალითად, K_2. მასში შედის -3, 2, 7, 12 და უამრავი სხვა რიცხვი. საგულისხმოა, რომ თითოეული მათგანი ზუსტად განსაზღვრავს კლასს. ამიტომ, კლასების ნაცვლად ჩვენ შეგვიძლია მათი წარმომადგენლები განვიხილოთ — ამით კლასი ცალსახად იქნება განსაზღვრული. დამეთანხმებით, ალბათ, ასეთ წარმომადგენლებად ყველაზე მოსახერხებელია 0, 1, 2, 3 და 4 ავირჩიოთ. მათი სიმრავლე S_5-ით აღვნიშნოთ:

$$S_5=\{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

ამ სიმრავლეს ეწოდება **ნაშთთა სრული სისტემა მოდულით** 5. (ალბათ გასაგებია, რატომ მივუწერე S ასოს ნიშნაკად 5).

ამრიგად, ნაშთთა სრული სისტემა არის ნაშთთა კლასების წარმომადგენელთა სიმრავლე. ასეთ ვითარებას — სიმრავლის ნაცვლად მისი წარმომადგენლის განხილვას თქვენ ადრეც შეხვედრიხართ, მაგრამ, შესაძლოა, ყურადღება არ მიგიქცევიათ. აი, ერთი კარგად ცნობილი და ამასთანავე მეტად მნიშვნელოვანი მაგალითი. ვთქვათ, A არის სიმრავლე წილადებისა, რომელთა მნიშვნელი ორჯერ მეტია მრიცხველზე.

$$A=\left\{\dots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots\right\}$$

მას ზუსტად განსაზღვრავს მისი თითოეული ელემენტი. ჩვენ, რა თქმა უნდა, უპირატესობას 1/2-ს ვანიჭებთ. სხვანაირად, მას ამ სიმრავლის წარმომადგენლად ვთვლით და თუ სადმე A სიმრავლის რომელიმე ელემენტი შეგვხვდება, მას უყოყმანოდ 1/2-ით ვცვლით — ამით საქმე, როგორც წესი, მარტივდება. სხვა, მსგავსი მაგალითების დასახელებაც შეიძლება, მაგრამ ამჯერად ეს ჩვენი საუბრის თემა არ არის. დავუბრუნდეთ ისევ S_5 სიმრავლეს.

განვსაზღვროთ S_5 სიმრავლეში შეკრება და გამრავლება. სრულიად ბუნებრივია, ეს მოქმედებანი ისევე განვსაზღვროთ, როგორც კლასებისათვის. რას უდრის, მაგალითად, $2+3$? შეკრების ცხრილით $K_2+K_3=K_0$, ესე იგი, როგორიც უნდა იყოს a და b შესაბამისად K_2 და K_3 კლასებიდან, მათი $a+b$ ჯამი K_0-ის ელემენტი აღმოჩნდება. ამრიგად, გასაგებია, რომ

$$2+3=0.$$

ხედავთ, $2+3$ ჯამი ნულის ტოლია! ამ ტოლობამდე ბუნებრივად მივედით, თქვენ კი მის ჭეშმარიტებაში ეჭვი შეგქონდათ... გახსოვთ, შესავალში ვწერდი — არ მჯეროდა $2+3=0$ ტოლობის ჭეშმარიტება, მაგრამ იძულებული გავხდი დამეჯერებინა-მეთქი. ახლა, მგონი, უფლება მაქვს ვთქვა, რომ თქვენც გაიძულეთ გეღიარებინათ ამ ტოლობის სამართლიანობა!.. თუმცა, იძულება რა შუაშია, განა ზუსტმა მსჯელობამ არ მიგვიყვანა ამ დასკვნამდე?

შეკრებისა და გამრავლების ცხრილების შედგენა S_5 სიმრავლის ელემენტებისათვის ძალიან ადვილია — საკმარისია ნაშთთა კლასების ანალოგიურ ცხრილებში ყოველი კლასი მისი ნიშნაკით შევცვალოთ.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ალბათ გასაგებია, რომ ნულის როლს პირველ ცხრილში თვით **0** ასრულებს, მეორეში **0**-სას და **1**-ისას თვით **0** და **1**. ასე, მაგალითად,

$$2+0=2,\ 4+0=4,\ 3\cdot 0=0,\ 3\cdot 1=3,\ 2\cdot 1=2.$$

ნაშთა სრული სისტემები, ისევე, როგორც ნაშთთა კლასები სხვა მოდულითაც შეიძლება განვიხილოთ. საზოგადოდ, როგორიც უნდა იყოს **1**-ზე მეტი მთელი m რიცხვი, მას ნაშთთა m კლასი შეესაბამება:

$$K_0=\{x \mid x\equiv 0 (mod\ m)\},$$
$$K_1=\{x \mid x\equiv 1 (mod\ m)\},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$K_{m-1}=\{x \mid x\equiv m-1 (mod\ m)\}.$$

ნაშთთა სათანადო სისტემა კი

$$S_m=\{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m-1\}$$

სიმრავლეა.

გასაგებია, თუ როგორ უნდა განისაზღვროს შეკრება და გამრავლება ნაშთთა ამ კლასების სიმრავლეში, შემდეგ კი — S_m სიმრავლეში.

რამდენადაც $m>1$, ამიტომ ყველაზე მარტივი შემთხვევა მაშინ გვაქვს, როცა $m=2$ (იხ. 24-ე სავარჯიშო). ნაშთთა სრული სისტემა სულ ორი ელემენტისაგან შედგება: $S_2=\{0,\ 1\}$. ამ სისტემისათვის

$$0+0=0,\ 1+0=1,\ 1+1=0,$$
$$0\cdot 0=0,\ 1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1.$$

დამეთანხმეთ, მხოლოდ ერთი — $1+1=0$ ტოლობაა „უკანონო“, დანარჩენების ჭეშმარიტებაში ისიც კი არ შეიტანს ეჭვს, ვინც სულაც არ იცის რა არის ნაშთთა კლასები...

სავარჯიშო

26. დაამტკიცეთ, რომ თუ $m=10$, მაშინ $5+5=0$, $7+6=3$, $2\cdot 6=2$, $3\cdot 8=4$.

27. რას უდრის m მოდული, თუ $2\cdot 5=3$? $10\cdot 10=1$?

28. ცნობილია, რომ ნაშთთა რაღაც სრული სისტემისათვის $0+5=0$. რას უდრის მოდული?

29. განიხილეთ S_3 — ნაშთთა სრული სისტემა მოდულით **3** და შეადგინეთ მისთვის შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები.

30. შეადგინეთ შეკრებისა და გამრავლების ცხრილები ნაშთთა S_7 სისტემისათვის.

ორი შესანიშნავი რიცხვი

თავისთავად, ყველა რიცხვი შესანიშნავია. ავიღოთ თუნდაც **2**. განა აღსანიშნავი არ არის, რომ ეს ერთადერთი ლუწი მარტივი რიცხვია?! ახლა **3** ავიღოთ. რითაა ის შესანიშნავი? გარდა იმისა, რომ ეს პირველი კენტი მარტივი რიცხვია, იგი ერთადერთია, რომელიც მისი წინა ორი რიცხვის ჯამს უდრის: $1+2=3$. აი, კიდევ, რიცხვთა წყვილი — **16** და **18**. ასე ვთქვათ, ჩვეულებრივი რიცხვებია. მართალია, პირველი სრული კვადრატია, მაგრამ ასეთი ხომ უამრავია და ეს არ არის საბაბი, რომ **16**-ს რაიმე უპირატესობა მივანიჭოთ. მაგრამ ნუ იჩქარებთ, — ამოხსენით შემდეგი გეომეტრიული ამოცანა: იპოვეთ მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეები მთელი რიცხვებია და, გარდა ამისა, მისი ფართობისა და პერიმეტრის გამომსახველი რიცხვები თანატოლია. რა მიიღეთ? ასეთი მართკუთხედი ორად ორია: ერთი კვადრატი, რომლის ფართობია **16** და, მაშასადამე, პერიმეტრიც **16**-ია, მეორე — მართკუთხედი, რომლის სიგრძეა **6**, სიგანე კი — **3**, ესე იგი, ფართობიცა და პერიმეტრიც **18**-ია. კიდევ მრავალი მსგავსი მაგალითის მოყვანა შეიძლება, — როცა რიცხვი თავის „თანამოძმეებიდან" უნდა გამოვარჩიოთ. დიახ, ძნელია, რიცხვთა უსასრულო სიმრავლიდან რომელიმე რიცხვის გამოყოფა... და მაინც, არის ორი რიცხვი, რომელთაც თამამად შეიძლება შესანიშნავი ვუწოდოთ. ეს რიცხვებია π და e. დარწმუნებული ვართ, თითოეულმა თქვენგანმა იცის, რომ π არის ნებისმიერი წრეწირის სიგრძის მისსავე დიამეტრთან შეფარდება. შესაძლოა ზოგმა ისიც იცის, რომ e ისეთი რიცხვია, რომ $y=e^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციას $x=0$ წერტილში **1**-ის ტოლი წარმოებული აქვს. ჩემი მიზანია გიჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ორივე ეს რიცხვი, ასე ვთქვათ, ერთნაირი მიდგომით განისაზღვროს.

ალგებრული და ტრანსცენდენტური რიცხვები

როგორც ხედავთ, π და e რიცხვებისათვის სპეციალური აღნიშვნებია შემოღებული. რა საჭიროა რიცხვებისთვის აღნიშვნების შემოღება, — ხომ გვაქვს ციფრები, მოქმედებათა ნიშნები, რადიკალის ნიშანი, სხვა სიმბოლოებიც, ნუთუ ისინი არაა საკმარისი რიცხვების ჩასაწერად? თურმე არა! საქმის ვითარებაში უკეთ რომ გაერკვიოთ, ცოტა შორიდან დავიწყებ.

ვინ არ იცის, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი შეიძლება ძალიან ადვილად ჩავწეროთ სულ ათი ციფრის დახმარებით? არც უარყოფითი მთელი რიცხვის ჩაწერაა ძნელი — საკმარისია რიცხვს წინ უარყოფითობის აღმნიშვნელი სიმბოლო — „მინუსი" დავუწეროთ. ასევე ადვილად წყდება წილადი რიცხვის ჩაწერის საკითხიც. ამრიგად, სულ ათი ციფრი და ორიოდე სიმბოლო საკმარისია, რომ ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი ჩავწეროთ. თუკი ფესვის, ანუ რადიკალის სიმბოლოსაც შემოვიღებთ, ზოგიერთი ირაციონალური რიცხვის ჩაწერასაც შევძლებთ. ზოგიერთის, მაგრამ არა ყველასი!... რატომ? ახლავე მოგახსენებთ.

როგორც იცით, ყოველ რიცხვს, რომელიც უსასრულო ათწილადის სახით ჩაიწერება, ნამდვილი რიცხვი ეწოდება. ეს ათწილადები ორი სახისაა — პერიოდული და არაპერიოდული (თუ რიცხვი სასრული ათწილადითაა გამოსახული, მას ბოლოში ნულებს მივუწერთ, რაც საშუალებას გვაძლევს იგი პერიოდულ ათწილადად ჩავთვალოთ). პირველი სახის რიცხვები, ესე იგი, პერიოდული ათწილადები რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს შეადგენენ, მეორე, ესე იგი, არაპერიოდული — ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. მაგრამ შეიძლება სხვა თვალსაზრისზე დავდგეთ და ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა უკვე სხვა ორ ნაწილად, სახელდობრ, — ალგებრულ და ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლეებად გავყოთ.

ალგებრული ეწოდება რიცხვს, რომელიც არის მთელკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლების ფესვი (ასე ეწოდება

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n=0$$

სახის განტოლებას, რომლის ყველა $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ კოეფიციენტი მთელი რიცხვია).

ცხადია, რომ ყველა რაციონალური რიცხვი ალგებრულია. მართლაც m/n წილადი არის $nx-m=0$ განტოლების ფესვი. მაგრამ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე ზოგიერთ ირაციონალურ რიცხვსაც შეიცავს. ასეთია, მაგალითად, $\sqrt{2}$: ის ხომ $x^2-2=0$ განტოლების

ფესვია! ალგებრულია აგრეთვე უფრო რთული აგებულების ირაციონალური რიცხვებიც, ვთქვათ,

$$x_0 = \sqrt{1+\sqrt[3]{3}}\ .$$

ამაში დასარწმუნებლად შევნიშნოთ, რომ

$$x = \sqrt{1+\sqrt[3]{3}} \Rightarrow x^2 = 1+\sqrt[3]{3} \Rightarrow (x^2-1)^3 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$

მივიღეთ მეექვსე ხარისხის განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვი სწორედ x_0-ია. მაშასადამე, x_0 ალგებრული რიცხვია. (ის, რომ მიღებულ განტოლებას სხვა ფესვებიც აქვს, არაა არსებითი, — ჩვენთვის მთავარია, რომ x_0 არის მისი ფესვი).

საზოგადოდ, რადიკალებით გამოსახული ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვი ალგებრულია, — ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ისევე ვიმსჯელებთ, როგორც x_0-ის შემთხვევაში.

სულ სხვა ვითარებაა არაალგებრული, ანუ ტრანსცენდენტური რიცხვების შემთხვევაში: არც ერთი ასეთი რიცხვი არ შეიძლება ციფრებით, მოქმედებათა ნიშნებით და რადიკალებით ჩაიწეროს. ამასთან, ზოგიერთი მათგანი ისე ხშირად გვხვდება, რომ იძულებულნი ვხდებით ის რაღაც ასოთი, სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. სწორედ ამ რიცხვთა კატეგორიას ეკუთვნის როგორც π, ასევე e რიცხვი.

დაბოლოს, უინტერესო არ უნდა იყოს იმის აღნიშვნა, რომ ალგებრულ რიცხვთა სიმრავლე უფრო ღარიბია ელემენტებით, ვიდრე ტრანსცენდენტურ რიცხვთა სიმრავლე. უფრო ზუსტად, პირველი თვლადია, მეორე — კონტინუალური (იხ. „თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები“).

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის არასისრულე

რაციონალურ რიცხვთა **Q** სიმრავლე **ჩაკეტილია ოთხივე არითმეტიკული მოქმედების მიმართ:** ნებისმიერი ორი რაციონალური რიცხვის ჯამი, ნამრავლი, სხვაობა და განაყოფი (იგულისხმება, რომ გამყოფი არ უდრის 0-ს) კვლავ რაციონალურია. ეს საშუალებას გვაძლევს დაუბრკოლებლად ვაწარმოოთ ამ რიცხვებზე ხსენებული მოქმედებანი ისე, რომ ამ სიმრავლის „გარეთ“ არ გამოვიდეთ.

ჩაკეტილობის გარდა **Q** სიმრავლეს ახასიათებს **სიმკვრივე:** ერთმანეთის არატოლ ნებისმიერ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის ასეთსავე რიცხვთა უსასრულო სიმრავლეა მოთავსებული.

მართლაც, ვთქვათ, $a \in Q$, $b \in Q$. მაშინ

$$a < b \Rightarrow \begin{cases} 2a < a+b \\ a+b < 2b \end{cases} \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ რაციონალური c რიცხვი — a და b-ს არითმეტიკული საშუალო, რომელიც მათ შორისაა მოთავსებული: $a < c < b$. ცხადია, მსგავსადვე შეგვიძლია ვიპოვოთ c_1, მოთავსებული a-სა და c-ს შორის და c_2, მოთავსებული c-სა და b-ს შორის და ასე შემდეგ და ასე შემდეგ... როგორც ხედავთ, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მართლაც ძალიან მკვრივი ყოფილა.

ახლა გაიხსენეთ, რომ ყოველ რაციონალურ რიცხვს გარკვეული წერტილი შეესაბამება რიცხვთა ღერძზე და წარმოიდგინეთ $\mathbf{Q}$ სიმრავლის ელემენტები განლაგებული ამ ღერძზე. რამდენადაც $\mathbf{Q}$ მკვრივია, იქმნება შთაბეჭდილება, რომ ის მთლიანად შეავსებს ღერძს და მასზე არც ერთი თავისუფალი წერტილი არ დარჩება. დიახ, ასეთი შთაბეჭდილება კი გვექმნება, მაგრამ... იგი მცდარია! თურმე, ღერძზე რაციონალური რიცხვებისაგან თავისუფალი უსასრულოდ ბევრი წერტილია — ეს ის წერტილებია, რომლებიც ირაციონალურ რიცხვებს შეესაბამებიან. ერთ-ერთი ასეთი წერტილი შეიძლება, მაგალითად, ასე მივიღოთ: ავაგოთ ერთეული კვადრატი და მისი დიაგონალის ტოლი მონაკვეთი გადავზომოთ სათავიდან მარჯვნივ. მონაკვეთის მარჯვენა ბოლო — აღვნიშნოთ ის A-თი, საძიებელია. მართლაც, პითაგორას თეორემის თანახმად, OA მონაკვეთის სიგრძის კვადრატი 2-ის ტოლია, მაგრამ ხომ კარგადაა ცნობილი, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ს უდრის! მაშასადამე, A წერტილი არც ერთ რაციონალურ რიცხვს არ შეესაბამება.

მიღებული შედეგი მეტად საგულისხმოა. ის გვიჩვენებს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში თავისებური „ხარვეზებია", ეს სიმრავლე არ არის სრული. კერძოდ, რაციონალური რიცხვები არა კმარა ისეთი მნიშვნელოვანი ოპერაციის ჩასატარებლად, როგორიცაა გაზომვა.

როგორ მოვიქცეთ? ცხადია, „ხარვეზები" უნდა შევავსოთ — რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე უნდა გავაფართოოთ ახალ სიმრავლემდე, რომელსაც ზემოხსენებული ნაკლი არ ექნება. ამ გაფართოებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლემდე მივყავართ. როგორც იცით, ასე ეწოდება რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა „კარგი" თვისება აქვს და ამასთან ის სრულიც არის. რას ნიშნავს ეს — როგორ გავიგოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის სისრულე? ამას ახლავე მოგახსენებთ.

ამრიგად: რა არის სისრულე, ან უკეთ — რას ვგულისხმობთ, როცა ვამბობთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სრულია? გამოჩენილმა მათემატიკოსებმა — ფრანგმა ოგიუსტენ კოშიმ (1789 — 1857) და გერმანელებმა რიხარდ დედეკინდმა (1831 — 1916) და გეორგ კანტორმა (1845 — 1918) მოგვცეს ფორმით ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მაგრამ შინაარსით ერთმანეთის ეკვივალენტური სამი სხვადასხვა განსაზღვრება სისრულისა. მე გაგაცნობთ კანტორისეულ განსაზღვრებას, რომელიც ეგრეთ წოდებული ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპით არის გამოხატული. ჯერ გავარკვიოთ, თუ რას ნიშნავს ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემა.

ვთქვათ მოცემულია სეგმენტთა

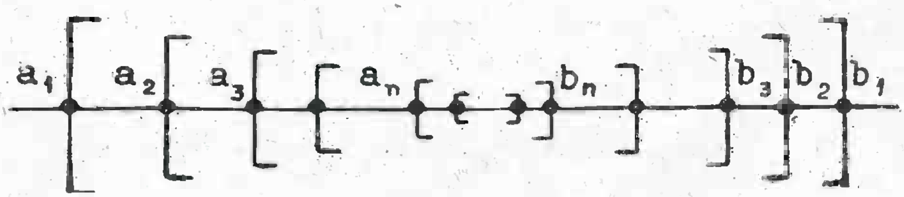
$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

უსასრულო მიმდევრობა, სადაც a_n და b_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ ნამდვილი რიცხვებია. თუ სეგმენტთა ეს მიმდევრობა ისეთია, რომ ყოველი მათგანი წინაშია მოთავსებული:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \; n=1, 2, 3, \ldots,$$

მაშინ მას ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემა ეწოდება.

თუ ამ სეგმენტებს გეომეტრიულად წარმოვიდგენთ (იხ. ნახ.), ინტუიციურად ცხადია, რომ არსებობს რიცხვთა ღერძის ერთი წერტილი მაინც, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის და ეს ხდება



იმიტომ, რომ ღერძზე არ არის „ხარვეზები“ — იგი უწყვეტია. ჩვენ რომ ღერძის მხოლოდ ის წერტილები განვიხილოთ, რომლებიც რაციონალურ რიცხვებს შეესაბამებიან, სულ სხვა სურათი იქნება. მართლაც, ავიღოთ თუნდაც იგივე $\sqrt{2}$ და წარმოვადგინოთ ის უსასრულო ათწილადის სახით:

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots$$

აღვნიშნოთ a_n-ითა და b_n-ით ამ რიცხვის მიახლოებანი 10^{-n} სიზუსტით შესაბამისად ნაკლებობით და მეტობით:

$$a_1=1{,}4, \; a_2=1{,}41, \; a_3=1{,}414, \; a_4=1{,}4142, \ldots,$$

$$b_1=1{,}5, \; b_2=1{,}42, \; b_3=1{,}415, \; b_4=1{,}4143, \ldots.$$

ცხადია, ნებისმიერი n-ისათვის $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$ და, მაშასადამე, $([a_n, b_n])$ ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემაა. არსებობს თუ არა ერთი წერტილი მაინც, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის? არა, არ არსებობს! გასაგებია, რატომ: (a_n) და (b_n) მიმდევრობების ზღვარია $\sqrt{2}$, ესე იგი, ყველა სეგმენტს შეიძლება ეკუთვნოდეს მხოლოდ ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი, რომელიც ღერძზე არ გვაქვს — ჩვენ ხომ მხოლოდ რაციონალურ წერტილებს ვიხილავთ!

აი, სწორედ ხსენებული მოსაზრებებიდან გამომდინარე კანტორმა ჩამოაყალიბა ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპი, რომლითაც, როგორც ვთქვი, **R** სიმრავლის სისრულეა გამოხატული.

ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპი

ჩალაგებულ სეგმენტთა ნებისმიერი სისტემისათვის არსებობს ერთი მაინც ნამდვილი რიცხვი, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის.

უნდა აღვნიშნო, რომ ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპი თეორემა კი არ არის, — ეს არის ნამდვილ რიცხვთა თეორიის ერთ-ერთი აქსიომა. ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ ამ პრინციპის დამტკიცება არ შეიძლება. არა, დამტკიცება შეიძლება, მაგრამ სხვა, მისი ეკვივალენტური წინადადება უნდა მივიღოთ აქსიომად.

თავმოყრილ სეგმენტთა სისტემა

„...არსებობს ერთი მაინც ნამდვილი რიცხვი, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის". ერთი მაინც... სახელდობრ, რამდენი? — იკითხავთ თქვენ. გიპასუხებთ: ან ერთი ან უსასრულოდ ბევრი! მართლაც, თუ, მაგალითად, $a_n = 0$, $b_n = 10^{-n} (n = 1, 2, 3, ...)$, მაშინ ჩალაგებულ სეგმენტთა $([a_n, b_n])$ სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის მხოლოდ ერთი რიცხვი — ნული (შეამოწმეთ!). თუკი ყველა სეგმენტს ორი — a და b რიცხვი ეკუთვნის, ცხადია, მათ შორის მოთავსებული ნებისმიერი რიცხვიც ამ სეგმენტებში იქნება (მოიფიქრეთ სათანადო მაგალითი!). ალბათ ხვდებით, რომ საინტერესო უფრო პირველი შემთხვევაა — როცა ყველა სეგმენტს მხოლოდ ერთი რიცხვი ეკუთვნის. როდის იქნება ასე? თურმე, ამისთვის საკმარისია სეგმენტთა სიგრძეები ნულისაკენ მიისწრაფოდნენ. სხვანაირად: თუ $([a_n, b_n])$ ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემაა და ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს $[a_m, b_m]$ სეგმენტი, რომლის

სიგრძე ε-ზე ნაკლებია, მაშინ სისტემის ყველა სეგმენტს არ შეიძლება ერთზე მეტი რიცხვი ეკუთვნოდეს.

მართლაც, ვთქვათ, მოცემული სისტემის ყველა სეგმენტს ორი — a და b რიცხვი ეკუთვნის და $a<b$. ავიღოთ დადებითი ε რიცხვი ისე, რომ ის $b-a$ სხვაობაზე ნაკლები იყოს. პირობის ძალით არსებობს ისეთი $[a_m, b_m]$ სეგმენტი, რომლის სიგრძე ε-ზე ნაკლებია: $b_m-a_m<\varepsilon$. ჩვენი დაშვებით, a და b რიცხვები ყველა სეგმენტს და, მაშასადამე, $[a_m, b_m]$-საც ეკუთვნიან. ამიტომ $a_m\leqslant a<b\leqslant b_m$, საიდანაც

$$b-a\leqslant b_m-a_m<\varepsilon<b-a.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ამტკიცებს, რომ დაშვება არ არის სწორი — ყველა სეგმენტს შეიძლება მხოლოდ და მხოლოდ ერთი რიცხვი ეკუთვნოდეს.

ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემას, რომლის სეგმენტების სიგრძეები ნულისაკენ მიისწრაფვიან, **თავმოყრილ სეგმენტთა სისტემა** ჰქვია. ამრიგად, თავმოყრილ სეგმენტთა ნებისმიერი სისტემისათვის არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. სხვათა შორის, მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ თავმოყრილ სეგმენტთა ყოველი სისტემა გარკვეულ ნამდვილ რიცხვს განსაზღვრავს — ეს ის რიცხვია, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის.

ახლა ერთი საინტერესო მაგალითი განვიხილოთ.

ვთქვათ,

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

და, საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა ნაწილში n რადიკალია.

ინდუქციით სულ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ყველა x_n ნაკლებია 2-ზე. მართლაც,

$$x_1=\sqrt{2}<2.$$

შემდეგ, რადგან $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, ამიტომ

$$x_k<2\Rightarrow x_{k+1}<\sqrt{2+2}=2,$$

ესე იგი, $x_n<2$ ნებისმიერი n-ისათვის.

დავამტკიცოთ, რომ სეგმენტთა $([x_n, 2])$ მიმდევრობა თავმოყრილ სეგმენტთა სისტემაა. ამისათვის უნდა დავრწმუნდეთ, რომ

1°. $[x_{n+1}, 2] \subset [x_n, 2]$, $n=1, 2, 3, \ldots$,

2°. ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $[x_m, 2]$ სეგმენტი, რომ $2-x_m < \varepsilon$.

ვინაიდან, როგორც ეს ადვილი მისახვედრია,

$([x_{n+1}, 2] \subset [x_n, 2]) \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$,

ამიტომ პირველი პირობის შესამოწმებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $x_{n+1} > x_n$. მაგრამ ეს თითქმის ცხადია, მართლაც, თუ

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომ გამოსახულებას, რომელშიც $n+1$ რადიკალია, უკანასკნელ რადიკალსა და მის ქვეშ მდგომ 2-იანს ჩამოვაშორებთ, მივიღებთ

$$x_{n+1} > \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = x_n$$

უტოლობას, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამრიგად, $([x_n, 2])$ ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემაა. ვაჩვენოთ, რომ ის თავმოყრილიც არის. ამისათვის წინასწარ ინდუქციით დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი n-ისათვის

$$2-x_n < 2^{1-n}.$$

თუ $n=1$, მაშინ $2-x_n = 2-\sqrt{2}$ და ცხადია, რომ დასამტკიცებელი უტოლობა ჭეშმარიტია. ამრიგად, ინდუქციის ბაზისი არის. გადავდგათ ინდუქციური ბიჯი. დავუშვათ, უტოლობა ჭეშმარიტია რაღაც k-სათვის: $2-x_k < 2^{1-k}$ და დავრწმუნდეთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $(k+1)$-ისათვისაც. გვაქვს:

$$2-x_{k+1} = \frac{4-x_{k+1}^2}{2+x_{k+1}} = \frac{2-x_k}{2+x_{k+1}} < \frac{2^{1-k}}{2} = 2^{-k},$$

რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

ახლა იმის შემოწმება, რომ $([x_n, 2])$ სეგმენტთა თავმოყრილი სისტემაა სულ ადვილია. მართლაც, ვთქვათ, ε მოცემული დადებითი რიცხვია. ცხადია, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური m, რომ $2^{1-m} < \varepsilon$. ამ m-ისათვის

$$2-x_m < 2^{1-m} < \varepsilon.$$

ამრიგად, სეგმენტთა მოცემული სისტემა თავმოყრილია — არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომელიც სისტემის ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. ცხადია, რომ ეს რიცხვია 2.

განვიხილოთ დადებით რიცხვთა ორი — (x_n) და (y_n) მიმდევრობა. x_n იგივე იყოს, რაც ზემოთ, y_n კი —

$$y_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$$

ტოლობით განვსაზღვროთ (ტოლობის მარჯვენა ნაწილში n რადიკალია). დარწმუნებული ვარ, არ გაგიჭირდებათ იმის დადგენა, რომ $x_{n+1}y_{n+1} = y_n$ (ამ ტოლობით ქვემოთ ვისარგებლებთ).

ახლა, (x_n) და (y_n) მიმდევრობების მოშველიებით შევადგინოთ ორი ახალი — (p_n) და (q_n) მიმდევრობა:

$$p_n = 2^n y_n, \quad q_n = \frac{2^{n+1} y_n}{x_n}.$$

ცხადია, რომ

$$q_n = \frac{2p_n}{x_n} > p_n,$$

რადგან, როგორც ვიცით, $x_n < 2$ ნებისმიერი n-ისათვის.

მაშასადამე, შევვიძლია შევადგინოთ $[p_n, q_n]$ სეგმენტები. დავამტკიცოთ, რომ $([p_n, q_n])$ სეგმენტთა თავმოყრილი სისტემაა.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი n-ისათვის:

$$p_n < p_{n+1} < q_{n+1} < q_n.$$

ის, რომ $p_{n+1} < q_{n+1}$, ზემოთ ვნახეთ. მაშასადამე, დასამტკიცებელი დარჩა $p_n < p_{n+1}$ და $q_{n+1} < q_n$ უტოლობები, დავიწყოთ პირველით. გვაქვს:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2^{n+1} y_{n+1}}{2^n y_n} = \frac{2y_{n+1}}{y_n} = \frac{2x_{n+1}y_{n+1}}{x_{n+1}y_n} = \frac{2y_n}{x_{n+1}y_n} =$$

$$= \frac{2}{x_{n+1}} > 1,$$

რადგან $x_{n+1} < 2$.

ამრიგად, $p_n < p_{n+1}$.

არც მეორე — $q_{n+1} < q_n$ უტოლობის დამტკიცებაა ძნელი. მართლაც,

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{2^n x_{n+1} y_n}{2^{n+1} x_n y_{n+1}} = \frac{x_{n+1} y_n}{2x_n y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}^2 y_n}{2x_n x_{n+1} y_{n+1}} =$$

$$= \frac{x_{n+1}^2 y_n}{2x_n y_n} = \frac{x_{n+1}^2}{2x_n} = \frac{2 + x_n}{2x_n} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} > 1,$$

კვლავ $x_n < 2$ უტოლობის გამო.

მაშასადამე, $q_{n+1} < q_n$.

ამით დამტკიცდა, რომ მოცემული მიმდევრობის ყოველი სეგმენტი წინა სეგმენტშია ჩართული:

$[p_{n+1}, q_{n+1}] \subset [p_n, q_n]$.

ესე იგი, ჩალაგებული სეგმენტები გვაქვს. შევამოწმოთ, რომ $([p_n, q_n])$ არამცთუ ჩალაგებული, სეგმენტთა თავმოყრილი სისტემაც არის.

ვთქვათ, ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. ვინაიდან

$$q_m - p_m = \frac{2p_m}{x_m} - p_m = \frac{p_m}{x_m}(2 - x_m) <$$

$$< \frac{q_m}{x_1}(2 - x_m) \leqslant \frac{q_1}{x_1}(2 - x_m) = 2\sqrt{2}(2 - x_m),$$

ამიტომ, თუ m-ს ისე შევარჩევთ, რომ იყოს

$$2 - x_m < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}},$$

მაშინ $[p_m, q_m]$ სეგმენტის სიგრძე ε-ზე ნაკლები იქნება. შეიძლება თუ არა m-ის ასეთნაირად შერჩევა? შეიძლება, რადგან $([x_n, 2])$ თავმოყრილ სეგმენტთა სისტემაა და, მაშასადამე, $2 - x_n$ სხვაობა შესაძლებელია რაგინდ მცირე გავხადოთ (ცხადია, n-ის ზრდის ხარჯზე).

ამრიგად, $([p_n, q_n])$ მართლაც თავმოყრილ სეგმენტთა სისტემაა და გარკვეულ ნამდვილ რიცხვს განსაზღვრავს. სწორედ ამ რიცხვს აღნიშნავენ π ასოთი. ალბათ იცით, რომ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა **3,14159**.

დავძენ, რომ p_n არის ერთეულ წრეწირში ჩახაზული წესიერი 2^{n+1}-კუთხედის ნახევარპერიმეტრი, ხოლო q_n — იმავე წრეწირზე შემოხაზული წესიერი 2^{n+1}-კუთხედის ნახევარპერიმეტრი.

e რიცხვი

როგორც ნახეთ, ჩვენი ძველი ნაცნობი — π რიცხვი შეიძლება თავმოყრილ სეგმენტთა საშუალებით განისაზღვროს. ახლა ნახეთ, როგორ შეიძლება იმავე გზით შემოვიღოთ კიდევ ერთი შესანიშნავი რიცხვი — e.

განვიხილოთ სეგმენტთა $([u_n, v_n])$ მიმდევრობა, სადაც

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

დავამტკიცოთ, რომ $u_n < u_{n+1}$, ხოლო $v_n > v_{n+1}$. ამისათვის გარკვეულ შეფარდებათა შეფასება იქნება საჭირო, რისთვისაც ბერ-

ნულის უტოლობით ვისარგებლებთ. მოგაგონებთ, რა უტოლობაა ეს: თუ $h > -1$, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh,$$

ამასთან, ტოლობა მხოლოდ მაშინ არის, როცა $n=1$ ან $h=0$. (იხ. „მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი").

დავიწყოთ $u_n < u_{n+1}$ უტოლობით. გვაქვს:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

ბერნულის უტოლობის ძალით

$$\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\left(-\frac{1}{n^2+2n+1}\right) =$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

ამრიგად, $u_n < u_{n+1}$. მსგავსადვე,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} >$$

$$> \left(1+(n+2)\frac{1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1,$$

საიდანაც $v_n > v_{n+1}$.

როგორც ხედავთ, ($[u_n, v_n]$) ჩალაგებულ სეგმენტთა სისტემაა. თურმე, ის თავმოყრილიც არის — ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $[u_m, v_m]$ სეგმენტი, რომლის სიგრძე ε-ზე ნაკლებია. მართლაც, ვინაიდან

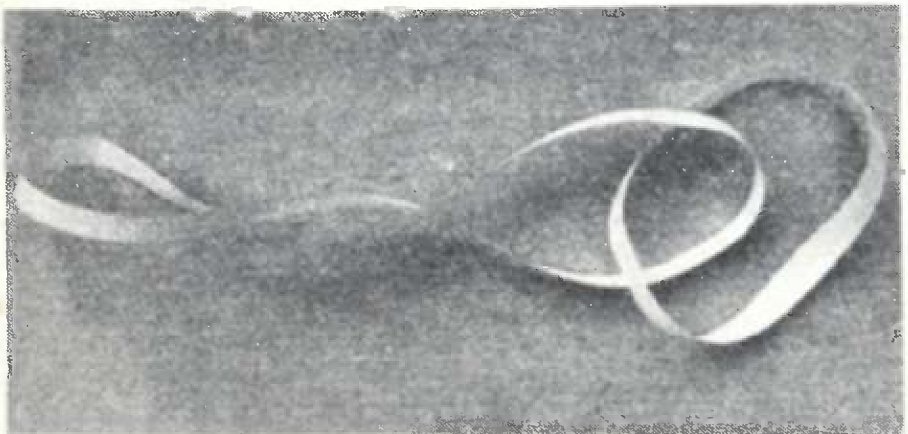
$$v_m - u_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \cdot \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{u_m}{m} < \frac{v_m}{m} \leqslant \frac{v_1}{m} = \frac{4}{m},$$

ამიტომ

$$m > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow u_m - u_m < \varepsilon.$$

როგორც იცით, თავმოყრილ სეგმენტთა ნებისმიერი სისტემა გარკვეულ ნამდვილ რიცხვს განსაზღვრავს. ცხადია, არც ($[u_n, v_n]$) სისტემაა გამონაკლისი. რიცხვი, რომელსაც სეგმენტთა ეს სისტემა განსაზღვრავს, e ასოთი აღინიშნება. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა **2,71828.** ვიტყვი კიდევ იმას, რომ e, ისევე როგორც π, ტრანსცენდენტური რიცხვია.



გავჭრათ მებიუსის ზედაპირი იმ წირის გასწვრივ, რომელიც მისი ნაპირიდან სიგანის ერთი მესამედითაა დაშორებული. მივიღებთ... სხვადასხვა ზომის ორ, ერთმანეთთან გადაჯაჭვულ რგოლს!

მეჯლისი პრინცესასთან

პრინცესა ႠႰႨႧႫႤႲႨႩႠႱ მისი და — ႢႤႭႫႤႲႰႨႠ და დეიდაშვილები ႴႨႪႭႱႭႴႨႠ და ႫႳႱႨႩႠ ეწვივნენ. პრინცესა დიდად გაახარა ამ სტუმრობამ — ოთხივენი ხომ ერთად აღიზარდნენ და ბავშვობიდანვე გულითადი მეგობრები იყვნენ.

სტუმრების პატივსაცემად გაიმართა მეჯლისი, რომელზეც პრინცესას განკარგულებით ყველა **ნატურალური რიცხვი** მოიპატიჟეს. დაუსრულებელ ნაკადად მოედინებოდნენ ისინი ႠႰႨႧႫႤႲႨႩႨႱ დიდებულ დარბაზში...

აი, თავმომწონედ მოაბიჯებს **ერთი** — მას წილად ხვდა პატივი, პირველი შემოსულიყო დარბაზში და მისალმებოდა პრინცესასა და მის სტუმრებს. მას მოჰყვებიან **ორი, სამი, ოთხი** და ასე შემდეგ და ასე შემდეგ, როგორ არ ჰგვანან ისინი ერთმანეთს!

დაიწყო ცეკვები. თითქმის ყველა რიცხვი მონაწილეობდა ზეიმში...

გამხიარულებულმა დიასახლისმა უცბად შენიშნა, რომ შეფიქრიანებული ႫႳႱႨႩႠ გაოცებით შესცქეროს ხან ერთ, ხან მეორე რიცხვს, ათვალიერებს ჯგუფებს, რომლებშიც ისინი გაერთიანებულან.

— რა იყო, გენაცვალე, რატომ არ მოილხენ, შეხედე, როგორი მრავალფეროვნებაა! — მიმართა დეიდაშვილს ႠႰႨႧႫႤႲႨႩႠႫ.

— ჩემო კარგო, სწორედ მაგ მრავალფეროვნებამ დამაფიქრა — შენი ქვეშევრდომები ისე უცნაურად იქცევიან, ვერაფერი გამიგია!?

— მერედა, რატომ გიკვირს ეს? ისინი ხომ სულ სხვადასხვანი არიან, ერთმანეთისაგან არა მარტო გარეგნობითა და საზოგადოებ-

რივი მდგომარეობით განირჩევიან, არამედ ხასიათითაც. გინდა, ზოგი რამ გიამბო მათ შესახებ? — ჰკითხა პრინცესამ მუსიკას და ნაზად აკოცა.

— ძალიან მადლობელი ვიქნები. ვფიქრობ, შენი მონათხრობი გეომეტრიასა და ფილოსოფიასაც დააინტერესებს. ასე არ არის, ჩემო ძვირფასებო? — მიუბრუნდა მუსიკა დეიდაშვილებს, რომლებიც აგრეთვე ყურადღებით აკვირდებოდნენ მეჯლისზე მოპატიჟებულთ.

— რაღა თქმა უნდა, — გამოეხმაურნენ ისინი, — ეტყობა, ივეს თვითონ აქ ვერაფერს გავარკვევთ.

— მაშ კარგი, ვეცდები დავაკმაყოფილო თქვენი ცნობისმოყვარეობა, — თქვა არითმეტიკამ. — თუმცა, იცით, რა მოვიფიქრე? მოდით, ვთხოვოთ პითაგორას, ჩემს მაგიერ მან გააკეთოს ეს. მისთვის ხომ **რიცხვთა სამყაროს** ყველა საიდუმლოებაა ცნობილი. შეხედეთ, ახლაც როგორ ყურადღებით აკვირდება ყველაფერს!

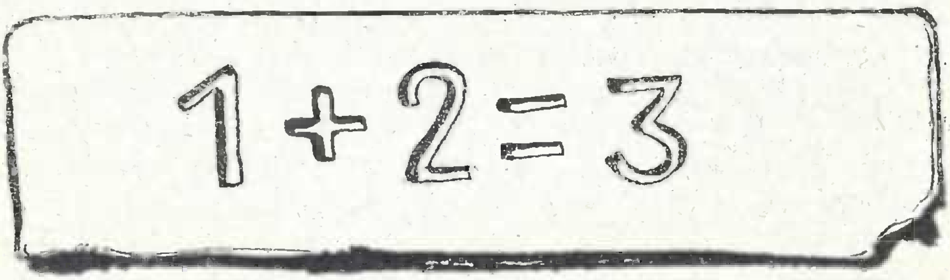
დობილები მშვენივრად იცნობდნენ პითაგორას — ის არაერთხელ სტუმრებია მათ. ოთხივე მასთან მივიდა.

— ბრძენო პითაგორა, — მიმართა პრინცესამ, — ჩვენი სტუმრები ძალიან დაინტერესდნენ ჩემი კარისკაცებით. დავაპირე, ზოგი რამ მეამბნა მათთვის ამ, როგორც ისინი ამბობენ, თავისებური და უცნაური სამყაროს შესახებ, მაგრამ გადავიფიქრე, — შენ ხომ ამას ჩემზე უკეთ შეძლებ. ჰქენი სიკეთე, ნუ გვეტყვი თხოვნაზე უარს. მეც სიამოვნებით მოგისმენ — შენ უთუოდ ახალი ამბებიც გეცოდინება.

— დიდი სიამოვნებით, ძვირფასო პრინცესა, მზად ვარ თქვენდა სამსახურად, — თავის დაკვრით მიუგო პითაგორამ და დაიწყო თხრობა.

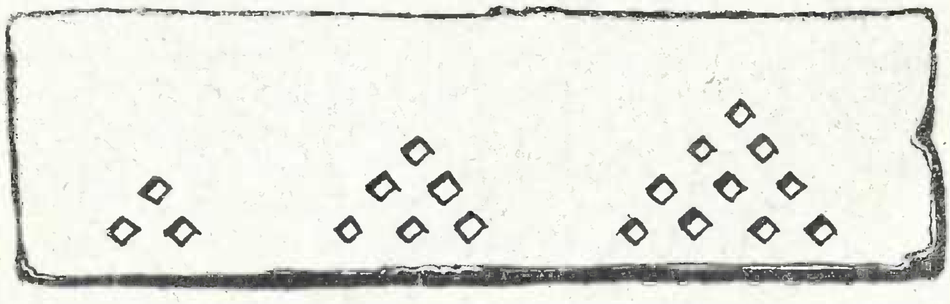
— ქვეყნად არაფერია **რიცხვებზე** საინტერესო. ყოველი **რიცხვი** განუმეორებელია, ამასთან თითოეულს რაღაც საგულისხმო თვისება აქვს, ზოგიერთს — რამდენიმეც კი! მაგალითისთვის ავიღოთ **ერთი**. თქვენ, რასაკვირველია, შენიშნავდით, რა ამაყად შემოვიდა ის დარბაზში. ჩვენს **ერთს** აქვს ამის უფლება — ის პირველია **ნატურალურ რიცხვთა** მწკრივში და საოცარი თვისებით გამოირჩევა: მასზე ყოველი რიცხვი იყოფა, ის კი მარტო თავის თავზე იყოფა — ეს ერთადერთი რიცხვია, რომელსაც მხოლოდ ერთი გამყოფი აქვს. განა საინტერესო არ არის? საგულისხმოა ისიც, რომ **ერთზე** გაყოფისა და გამრავლებისას სხვა რიცხვები არ იცვლებიან, ამიტომაც მას ყველა პატივსა სცემს და აფასებს. **ერთი** ტოლობას ასახიერებს! აი **ორი** კი — უტოლობის დასაწყისია. სხვათა შორის, ხომ მოგახსენეთ, **ერთი** ერთადერთი რიცხვია მხოლოდ ერთი გამყოფი რომ

აქვს-მეთქი. ასევე ერთადერთია ორი — მის გარდა არც ერთი ლუწი **მარტივი რიცხვი** არ არსებობს! შესანიშნავი თვისებებისაა **სამი.** გარდა იმისა, რომ იგი სამკუთხა რიცხვია, პირველი კენტი **მარტივი რიცხვიც** არის. მაგრამ ესეც ცოტაა — მას ისეთი თვისება აქვს, რომელიც სხვა არც ერთ რიცხვს არა აქვს! სახელდობრ, **სამი** წინა რიცხვების ჯამის ტოლია. აი, შეხედეთ, — პითაგორამ თიხის ფირფიტა აიღო და ზედ ჩხირით დაწერა:



— ბოდიშს ვიხდი, რომ გაწყვეტინებთ, — თქვა ფილოსოფიამ, — **სამკუთხა რიცხვი** არისო, რომ თქვით, რას ნიშნავს ეს?

პითაგორამ ფირფიტაზე ჩხირით წერტილები დასვა და ფირფიტა ქალბატონებს აჩვენა.



— აჰა, დახედეთ, აქ გამოსახულია **სამკუთხა რიცხვები: სამი, ექვსი, ათი.** ალბათ გასაგებია, თუ რატომ ვუწოდებ მე მათ ასე. არ იფიქროთ, რომ მეტი ასეთი რიცხვი არ არსებობს, მაგრამ ძალიანაც რომ მოხოვოთ, ყველას ვერ ჩამოთვლით — მათი რაოდენობა უსასრულოა! — ღიმილით თქვა პითაგორამ და თხრობა განაგრძო.

— ხომ ხედავთ, **ექვსი** სამკუთხა რიცხვია, მაგრამ თავისიანებში ის მხოლოდ ამით არ არის გამორჩეული, ამიტომაც არის, რომ ასე მედიდურად დასეირნობს დარბაზში — ის თავის უპირატესობას გრძნობს!

— ასეთი რა უპირატესობა აქვს? — იკითხა გეომეტრიამ.

— საქმე ის გახლავთ, რომ **ექვსი** თავისი საკუთარი გამყოფების ჯამის ტოლია. მისი გამყოფებია **1, 2** და **3**, რომელთა ჯამია **ექვსი**. ეს ხომ სრულყოფილებაა! ასეც ვუწოდებ: **სრულყოფილი რიცხვი**.

— საოცარია, ნამდვილად საოცარი! — თქვა მუსიკამ, — ნუთუ სხვა სრულყოფილი რიცხვი არ არსებობს?

— არსებობს, — ღიმილით თქვა პითაგორამ, — მაგრამ ისინი ერთობ ცოტანი არიან. ეს ბუნებრივიცაა: სრულყოფილება ხომ თავისებური სილამაზეა და ასეთი სილამაზე კი, სამწუხაროდ, არც ისე ხშირად გვხვდება. მე ვიცნობ ოთხ **სრულყოფილ რიცხვს**, რომელთაგან ერთი ერთნიშნაა, ერთი — ორნიშნა, ერთი — სამნიშნა და ერთიც ოთხნიშნა. ეს რიცხვებია: **6, 28, 496, 8128**. ვფიქრობ, რომ ხუთ — და ექვსნიშნა რიცხვებს შორის **სრულყოფილი რიცხვი** არ უნდა იყოს. შეამჩნიეთ, რომ ყველა დასახელებული რიცხვი ლუწია? ჯერჯერობით ვერა და ვერ მოვახერხე ერთი კენტი **სრულყოფილი რიცხვი** მაინც აღმომეჩინა. დარწმუნებული ვარ, ასეთი არც არსებობს!

— ეს რა შესანიშნავი რამ ყოფილა! — შესძახა ფილოსოფიამ და არითმეტიკისაკენ მიბრუნებულმა სთხოვა მას: — ძვირფასო, დაავალე შენს მსახურებს, განაგრძონ **სრულყოფილი რიცხვების** ძებნა!

— აუცილებლად, აუცილებლად. ჩვენი საყვარელი პითაგორას გამოკვლევები გაგრძელდება, — თქვა არითმეტიკამ, მერე ეშმაკურად მოჭუტა თვალები და დობილებს ჰკითხა: — ნუთუ არ გაოცებთ რიცხვთა წყვილის — **220**-ისა და **284**-ის ყოფაქცევა?

— როგორ არა, — გამოეპასუხა მუსიკა, — თავიდანვე შევნიშნე, რომ ეს ორი რიცხვი სულ ერთად არის, არ კი ვიცი, რატომ...

— ოო, ისინი ნამდვილი მეგობრები არიან, — თქვა პითაგორამ, — მათ ვერაფერი დააშორებთ ერთმანეთს. ამიტომაც დავარქვი ამ წყვილს **მეგობრული რიცხვები** — ისინი, თითქოსდა, გადაჯაჭვულები არიან. საქმე ის არის, რომ ყოველი მათგანის საკუთარ გამყოფთა ჯამი მეორის ტოლია. აი, ინებეთ: **220**-ის საკუთარი გამყოფებია **1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55** და **110**, ხოლო **284**-ისა **1, 2, 4, 71, 142**. ამავე დროს შეხედეთ, პითაგორამ კვლავ თიხის ფირფიტა აჩვენა სტუმრებს:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

$$1+2+4+71+142=220$$

— ამას წინათ ერთმა კაცმა მკითხა — რა არის მეგობარიო. მეგობარი ეს მეორე მე არის-მეთქი, ვუპასუხე და მაგალითისთვის **რიცხვთა წყვილი** — 220 და 284 დავუსახელე. ალბათ გაინტერესებთ, კიდევ თუ არის **მეგობრული რიცხვები**. არის, კიდევ სამ წყვილს ვიცნობ, ისინი დარბაზის თითქმის ბოლოში არიან, ეს ძალიან დიდი რიცხვებია.

— მე შევნიშნე, რომ **ცხრა** რაღაც უცნაურად დადის — მხედრულ ნაბიჯებს ადგამს და თითოეული ნაბიჯით თითქოს ლურსმანს აჭედებსო. რატომ? — იკითხა ფილოსოფიამ.

— საქმე ის არის, ძვირფასო ქალბატონო, რომ **ცხრა** სიმტკიცეს ანსახიერებს, იგი სიმტკიცის სიმბოლოა, — პითაგორამ თიხის ფირფიტა წარწერით გაავსო და სტუმარს უჩვენა, — აი, შეხედეთ:

$1 \times 9 = 09$	$0 + 9 = 9$
$2 \times 9 = 18$	$1 + 8 = 9$
$3 \times 9 = 27$	$2 + 7 = 9$
$4 \times 9 = 36$	$3 + 6 = 9$
$5 \times 9 = 45$	$4 + 5 = 9$
$6 \times 9 = 54$	$5 + 4 = 9$
$7 \times 9 = 63$	$6 + 3 = 9$
$8 \times 9 = 72$	$7 + 2 = 9$
$9 \times 9 = 81$	$8 + 1 = 9$

— ეს რა გამოდის?... **რიცხვი** რომ **ცხრაზე** გავამრავლოთ, მივიღებთ **რიცხვს**, რომლის ციფრთა ჯამი **ცხრა** არის. ასეა, არა? — აღტაცებით თქვა ფილოსოფიამ.

— დიახ, ასეა, — დაუდასტურა პითაგორამ.

— მართლაც საოცარი თვისებაა! — თქვა მუსიკამ და მცირე დუმილის შემდეგ იკითხა: — ნამრავლი მრავალნიშნა რიცხვი რომ იყოს, მაშინ?

— მაშინაც იგივე მიიღება, ოღონდ შეკრება უნდა გავაგრძელოთ. გავამრავლოთ ცხრაზე, მაგალითად, **2031**. ვნახოთ, რა გვექნება.

$$2031 \times 9 = 18279$$

$$1+8+2+7+9=36 \qquad 3+6=9$$

-და ეს ყოველთვის ასეა?

— მერწმუნეთ, ყოველთვის! მეორე ასეთი მტკიცე რიცხვი არ არსებობს.

— მე კიდევ ის შევნიშნე, რომ **რიცხვები**, როგორც კი ცეკვა დაიწყო, რაღაც უცნაურად დაწყვილდნენ, თუნდაც **თერთმეტი** და **ცამეტი, ჩვიდმეტი** და **ცხრამეტი, ოცდაცხრა** და **ოცდათერთმეტი,** ხოლო რაც შეეხება **ხუთს,** იგი ხან **სამთან** ცეკვავს, ხან — **შვიდთან.** რატომ? — დაინტერესდა გეომეტრია.

— ოჰ, ეს სულ ადვილი ასახსნელია, — გაეღიმა პითაგორას, — თქვენს მიერ დასახელებული ყველა **რიცხვი მარტივია,** თანაც **ტყუპები.** მოგეხსენებათ, ორ მეზობელ **კენტ რიცხვს,** რომელთაგან თითოეული მარტივია, **ტყუპი მარტივი რიცხვები** ჰქვია. აი სწორედ ასეთი რიცხვები დაწყვილდნენ. რაც შეეხება **ხუთს,** ის **სამის** ტყუპისცალიც არის და **შვიდისაც.** ამიტომაც ხან ერთთან ცეკვავს, ხან მეორესთან.

— ოი, ამას როგორ ვერ მივხვდი?! — გეომეტრიის სახეზე სინანული გამოიხატა, — მე ხომ ძალიან კარგად ვიცნობ **მარტივ რიცხვებს...**

— არა უშავს, ჩემო დაო, — ანუგეშა ის არითმეტიკამ, — ნუ დარდობ. სჯობს მადლობა გადავუხადოთ ამ ბრძენ კაცს და საცეკვაოდ წავიდეთ.

ყველამ მხურვალე მადლობა უძღვნა პითაგორას, რომელმაც, თავის მხრივ, აღუთქვა მათ, რომ კვლავაც ერთგულად ემსახურება მისი გულის რჩეულებს — არითმეტიკას, გეომეტრიას, ფილოსოფიასა და მუსიკას.

სახალისო და თავსატეხი ამოცანები

ბევრს ჰგონია, რომ სახალისო და თავსატეხი ამოცანების ამოხსნა მხოლოდ და მხოლოდ სასიამოვნო დროსტარებაა და სხვა არაფერი. მცდარი აზრია! — ყოველი ასეთი ამოცანა, როგორც წესი, გვაიძულებს დავძაბოთ ჩვენი გონება და მივაგნოთ მისი ამოხსნის ორიგინალურ, — არცთუ იშვიათად ერთადერთ გზას. ამიტომაც, თამამად შეიძლება ითქვას, რომ სახალისო და თავსატეხი ამოცანები ინტელექტის განვითარების ერთ-ერთი მძლავრი საშუალებაა. საგულისხმოა ისიც, რომ ამ ტიპის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა არავითარ სპეციალურ ცოდნას არ მოითხოვს — საკმარისია მხოლოდ მოსაზრებულობა! ამოცანები, რომელთაც გთავაზობთ, სწორედ ასეთია — მათ უმრავლესობას კარგად მოაზროვნე მეშვიდე — მერვეკლასელი მოსწავლეც კი დაძლევს. ისიც უნდა გითხრათ, რომ ვეცადე ისეთი ამოცანები შემერჩია, რომელთაც ლამაზი და ხშირად მოულოდნელი ამოხსნები აქვს, რაც, ვიმედოვნებ, სიამოვნებასაც მოგანიჭებთ.

1. სახალისო მათემატიკის საღამოს წამყვანმა სცენაზე სამი ნიღბოსანი მოსწავლე გამოიყვანა და დამსწრეთ ასე მიმართა: „თქვენს წინაშე არიან ბესიკი, დათო და ლადო. ერთი მათგანის გვარია აბაშიძე, მეორისა — ეძგვერაძე, მესამისა — ლომიძე. მე ვიცი, რომ ბესიკი არ არის ლომიძე, ლადო მე-5 კლასში სწავლობს და მისი მამა მათემატიკოსია. გარდა ამისა, ვიცი ისიც, რომ ლომიძე მე-6 კლასის მოსწავლეა და აბაშიძის მამა ინჟინერია. დამეხმარეთ ბესიკის, დათოსა და ლადოს გვარების დადგენაში“. მცირე ფიქრის შემდეგ, საღამოს ერთმა მონაწილემ ზუსტად დაასახელა თითოეული ნიღბოსნის გვარი.

შეეცადეთ, იქნებ თქვენც დაადგინოთ მათი გვარები!

2. დედამ მაგიდაზე ქლიავით სავსე თეფში დადგა და ქეთინოს, გიორგისა და ლალის ბარათი დაუტოვა — რომ მოხვალთ, თანაბრად გაიყავით და მიირთვითო. მოვიდა ქეთინო, წაიკითხა ბარათი, ქლიავების მესამედი შეჭამა და წავიდა. მერე გიორგი მოვიდა, მან არ იცოდა, რომ ქეთინომ თავისი წილი ქლიავებისა უკვე შეჭამა, სასწრაფოდ აიღო დარჩენილი ქლიავების მესამედი და გაიქცა. ბოლოს ლალი მოვიდა, გაყო დარჩენილი ქლიავები სამ ტოლ ნაწილად, მესამედი შეჭამა, თანაც გაიფიქრა: „რა ცოტა ქლიავი უყიდია დედას, თითოეულს მხოლოდ ოთხი გვერგო“.

რამდენი ქლიავი დაუტოვა დედამ შვილებს?

3. სამი ყუთია. ერთში ორი თეთრი ბირთვია, მეორეში — ორი შავი, მესამეში — თეთრი და შავი. ყუთებს აქვთ წარწერები: „ორი თეთრი“, „ორი შავი“, „თეთრი და შავი“, მაგრამ ცნობილია, რომ არც ერთი წარწერა არ შეესაბამება სინამდვილეს. უნდა ერთი ყუთიდან ამოვიღოთ მხოლოდ ერთი ბირთვი, დავხედოთ რა ფერისაა ის და დავადგინოთ, რომელ ყუთში რა ფერის ბირთვებია.

რომელი ყუთიდან უნდა ამოვიღოთ ბირთვი?

4. ორი პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 18 კმ-ია, ერთმანეთის შესახვედრად ერთდროულად გამოვიდნენ კახა და გიორგი. კახა საათში 5 კმ-ს გადის, გიორგი — 4 კმ-ს. კახას თან გამოჰყვა ძაღლი, რომელიც საათში 8 კმ სიჩქარით დარბის. გამოსვლისთანავე, იგი გაიქცა გიორგისაკენ, შეხვდა მას და უმალ უკან გამობრუნდა მიირბინა კახასთან, მაშინვე ისევ გიორგისკენ გაიქცა და ასე შემდეგ, ერთი სიტყვით, სულ კახასა და გიორგის შორის დარბოდა, სანამ ისინი ერთმანეთს არ შეხვდნენ.

რამდენი კილომეტრი გაირბინა ძაღლმა?

5. თემურმა უთხრა მალხაზს: „ჩაიფიქრე რაიმე მთელი რიცხვი 1-დან 32-ამდე ჩათვლით, დაგისვამ ხუთ კითხვას, რომლებზეც შენ ან „ჰოს“ მიპასუხებ, ან „არას“ და მე გამოვიცნობ ჩაფიქრებულ რიცხვს“.

მალხაზი ძალიან გაკვირვებული იყო, რომ თემურმა სულ ხუთი კითხვით გამოიცნო რიცხვი, რომელიც მან ჩაიფიქრა და სთხოვა თემურს — ახლა კიდევ ჩავიფიქრებო. თემურმა კვლავ გამოიცნო და უთხრა მალხაზს: „1-დან 64-ამდე ჩათვლით რომ ჩაიფიქრო რიცხვი, მაშინ ექვსი კითხვით გამოვიცნობ შენ არჩეულ რიცხვს“.

რა კითხვები დაუსვა თემურმა მალხაზს პირველ ორ შემთხვევაში? რა კითხვების დასმას აპირებდა ის მესამე შემთხვევაში? შეეცადეთ განაზოგადოთ ეს ამოცანა.

6. მეფოკუსე რომელიმე მაყურებელს აძლევს ორ კამათელს და სთხოვს გააგოროს ისინი ისე, რომ მას არ აჩვენოს რა რიცხვები მოვა. შემდეგ სთავაზობს ერთ-ერთი რიცხვი გაამრავლოს 5-ზე, ნამრავლს 6 მიუმატოს, ეს ჯამი გააორკეცოს და შემდეგს მეორე რიცხვი მიუმატოს. უსახელებს მაყურებელი საბოლოო ჯამს მეფოკუსეს, ეს უკანასკნელი კი დაუყოვნებლივ ეუბნება მას, თუ რა რიცხვები მოვიდა კამათელზე.

მეფოკუსე რამდენჯერმე იმეორებს ამ ფოკუსს და ყოველთვის ზუსტად ასახელებს რიცხვებს. როგორ ახერხებს ის ამას?

7. ვთქვათ, a და b ნებისმიერი რიცხვებია. მათი სხვაობა c-თი აღვნიშნოთ: $a-b=c$. გავამრავლოთ ეს ტოლობა $(a-b)$-ზე და გარდავქმნათ.

$$(a-b)^2=c(a-b) \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=ac-bc \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab-ac=ab-bc-b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a(a-b-c)=b(a-b-c).$$

გავყოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი $(a-b-c)$-ზე, მივიღებთ $a=b$ ტოლობას.

თუ, კერძოდ, $a=4$, $b=5$, გვექნება $4=5$, ესე იგი, ორჯერ ორი ხუთი ყოფილა! რა მოხდა?

8. ლითონის ფულის ათი გროვაა, თითოეულში ათი ფულია, ასევე ფული ფორმით ერთნაირია, მაგრამ ერთ გროვაში ყველა ყალბია. როგორ უნდა დავადგინოთ საწონიან სასწორზე ერთი აწონით, რომელ გროვაშია ყალბი ფულები, თუ ცნობილია, რომ ნამდვილი ფული 5 გრამს იწონის, ყალბი კი — 4 გრამს?

9. რვა ლითონის ფულიდან ერთი, ყალბი, დანარჩენებზე მსუბუქია. უსაწონო სასწორზე სამი აწონით დაადგინეთ, რომელია ყალბი ფული.

10. დილის საუზმეზე ლილიპუტებმა გულივერს ერთი ჭიქა ყავაც მიართვეს. მან მოსვა ჭიქის ნახევარი და სთხოვა მასპინძლებს ჭიქაში რძე ჩაემატებინათ. მოსვა რა მთელი ჭიქა ნარევის მესამედი, გულივერმა კვლავ ითხოვა ჭიქის რძით შევსება. ახლა ნარევის მეექვსედი შესვა და ჭიქა ისევ რძით გაავსებინა. ბოლოს ეს ჭიქაც დაცალა და მასპინძლებს მადლობა გადაუხადა:

რა უფრო მეტი დალია გულივერმა — ყავა თუ რძე?

11. მრგვალ მაგიდას ორნი უსხედან და თამაშობენ. მათ საკმაო რაოდენობით ერთნაირი ზომის მუყაოს რგოლები აქვთ და მორიგეობით დებენ თითო რგოლს მაგიდაზე. თამაშის პირობები შემდეგია:

ა. რგოლის რგოლზე ან მის ნაწილზე დადება არ შეიძლება, ესე იგი, რგოლი უნდა დაიდოს მაგიდის მხოლოდ თავისუფალ ადგილზე.

ბ. დადებული რგოლის გადაადგილება აკრძალულია.

გ. იგებს ის, ვინც ბოლო რგოლს დადებს.

როგორ უნდა ითამაშოს დამწყებმა, რომ თამაში მოიგოს?

12. მათემატიკურ ოლიმპიადაში 98 მოსწავლე მონაწილეობდა. მათ შესთავაზეს სამი ამოცანა. პირველი ამოცანა ამოხსნა 60-მა მოსწავლემ, მეორე — 58-მა, ხოლო მესამე — 30-მა. პირველი და მეო-

რე ამოცანა ამოხსნა 26-მა მოსწავლემ, პირველი და მესამე — 18-მა, მეორე და მესამე — 14-მა.

რამდენმა მოსწავლემ ამოხსნა სამივე ამოცანა?

13. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{12345678 \cdot 12345679 - 12345681 \cdot 12345682}{12345680} =$$

$$= \frac{1986 \cdot 1987 - 1989 \cdot 1990}{1988}$$

ისე, რომ გამოთვლები არ ჩაატაროთ.

14. მეფეს კარზე ორი ბრძენი ჰყავდა. მასხარა სულ გაიძახოდა — სიბრძნით არც ერთს არ ჩამოუვარდებიო. მეფემ გადაწყვიტა გამოეცადა მასხარა და უთხრა: „აი, მე ხელში ქაღალდის ხუთი რგოლი მაქვს — სამი თეთრი და ორი შავი. შენცა და ორივე ბრძენს ზურგზე თითო რგოლს დაგიმაგრებთ, მაგრამ ისე, რომ არც ერთს არ გეცოდინებათ, რომელს რა ფერის რგოლი აქვს. მერე დაგაყენებთ რიგში. შენ პირველი იქნები და ვერ დაინახავ რა ფერის რგოლები აქვს ბრძენებს. შენს უკან იქნება პირველი ბრძენი, რომელიც ნახავს შენს ზურგზე დამაგრებულ რგოლს. რიგში მესამე იქნება მეორე ბრძენი, ის ორივე თქვენგანის რგოლებს დაინახავს. ვნახოთ, ვინ მიხვდება პირველი, ვის რა ფერის რგოლები აქვს ზურგზე“. მეფემ დაუმაგრა რგოლები სამივეს და რიგში ჩააყენა. რამდენიმე ხანს ბრძენებიცა და მასხარაც გაჩუმებულები იყვნენ — ფიქრობდნენ. მერე მასხარამ სიხარულით წამოიძახა — თეთრი რგოლი მაქვს ზურგზე დამაგრებულიო. მეფე დაინტერესდა, როგორ მივიდა მასხარა ამ დასკვნამდე და პასუხი რომ მოისმინა, მოეწონა მისი გამჭრიახობა — საჩუქრად ხალათი უბოძა.

როგორ მსჯელობდა მასხარა?

15. ზევარი თავისი ვაჟიშვილით და ზაური თავისი ვაჟიშვილით სათევზაოდ წავიდნენ. ზევარის მიერ დაჭერილი თევზების რაოდენობა 2-ით ბოლოვდება, ხოლო მისი ვაჟის მიერ დაჭერილი თევზების რაოდენობა 3-ით. ამავე რიცხვით ბოლოვდება ზაურის მიერ დაჭერილი თევზების რაოდენობა. რაც შეეხება ზაურის ვაჟს, მან მხოლოდ 4 თევზი დაიჭირა. ყველას მიერ დაჭერილი თევზების საერთო რაოდენობა ნატურალური რიცხვის კვადრატია.

რა ჰქვია ზევარის ვაჟს?

16. საახალწლოდ ერთმა მათემატიკოსმა შემდეგი ექსპერიმენტი ჩაატარა. აიღო ყუთი და უსასრულო რაოდენობა ბირთვებისა, დანომრილი **1, 2, 3, ...** რიცხვებით. ახალი წლის დადგომამდე **1** წუთით ადრე მან ყუთში ჩააწყო ბირთვები, რომელთა ნომრები იყო **1, 2, 3, ..., 1000** და ამოიღო ბირთვი №1. შემდეგ, ახალი წლის დადგომას **1/2** წუთი რომ აკლდა, ჩააწყო ბირთვები **1001, 1002, 1003, ..., 2000** და ამოიღო ბირთვი №2. ახალი წლის დადგომამდე **1/3** წუთით ადრე ჩააწყო ყუთში შემდეგი ათასი ბირთვი და ამოიღო ბირთვი №3 და ასე შემდეგ...

რამდენი ბირთვი აღმოჩნდა ყუთში, საათმა თორმეტი რომ დარეკა?

17. წარმოიდგინეთ, რომ არის უსასრულო ნომრიანი სასტუმრო, რომლის ოთახების ნომრებია **1,2,3,4,5,...** ყველა ნომერი ერთ ადგილიანია და ყველა დაკავებულია. თქვენ სასტუმროს ადმინისტრატორი ხართ. მოულოდნელად ჩამოვიდა მეტად პატივსაცემი ადამიანი, რომელსაც აუცილებლად უნდა შესთავაზოთ ნომერი. როგორ მოახერხებთ თქვენ ამას ისე, რომ არც ერთი ძველი სტუმარი ოთახიდან არ გამოიყვანოთ და ყველა ნომერში კვლავ ერთი კაცი დარჩეს?

18. ერთ კუნძულზე ცხოვრობს ტომი, რომლის ყოველი წარმომადგენელი ან მუდამ სიმართლეს ამბობს, ან მუდამ ტყუის. დავარქვათ მათ შესაბამისად მართლის მთქმელები და მატყუარები. ერთი კაცი ჩავიდა კუნძულზე, შეხვდა იქაურ ორ მაცხოვრებელს და ჰკითხა პირველს: „თქვენ მართლისმთქმელი ხართ თუ მატყუარა?" მან რაღაც ჩაიბურტყუნა, რაც ჩასულმა ვერ გაიგო. „რა თქვა თქვენმა ამხანაგმა?" მეორემ მიუგო: „მან თქვა, რომ იგი მატყუარაა".

ახლა მე თქვენ გეკითხებით, მკითხველო: მართლისმთქმელია მეორე თუ მატყუარა?

19. ჩაიფიქრეთ რაიმე ორნიშნა რიცხვი, რომლის ათეულებისა და ერთეულების სხვაობა 2-ია ან 2-ზე მეტი. შეუცვალეთ ადგილები ციფრებს. მიიღებთ ორნიშნა ან ერთნიშნა რიცხვს. ამ რიცხვებიდან უდიდესს უმცირესი გამოაკელით. ახლა ეს სხვაობა შეკრიბეთ რიცხვთან, რომელიც მისი ციფრების გადანაცვლებით არის მიღებული. რა თქმა უნდა, 99 მიიღეთ!

როგორ მივხვდი?

სარჩევი

ბენდუქიძე ა.დ.

მათემატიკა. სერიოზული და სახალისო. — თბ.: «ნაკადული», 1988. — 256 გვ., ფასი ... 20.000 ეგზ.

მათემატიკის სხვადასხვა საკითხისადმი მიძღვნილი მეცნიერულ-პოპულარული წიგნი.

Б (70803 — 124) / (М-603 (08) - 88) 116 — 88

ISBN 5 — 525 — 00032 — 6

ამ წიგნის ავტორი ყმაწვილობიდანვე მათემატიკის ტრფიალი იყო. ამჟამად იგი თბილისის უნივერსიტეტის დოცენტია, მაგრამ საშუალო სკოლასთან არასოდეს გაუწყვეტია კავშირი.

ავთანდილ ბენდუქიძე მოწოდებით პედაგოგია და ბევრს აკეთებს, რათა ახალგაზრდობას სინამდვილის შეცნობა ასწავლოს, გაუღვივოს სიყვარული მეცნიერებისადმი, აგრძნობინოს ის სიხარული, რომელიც მეცნიერების დაუფლებას ახლავს თან.